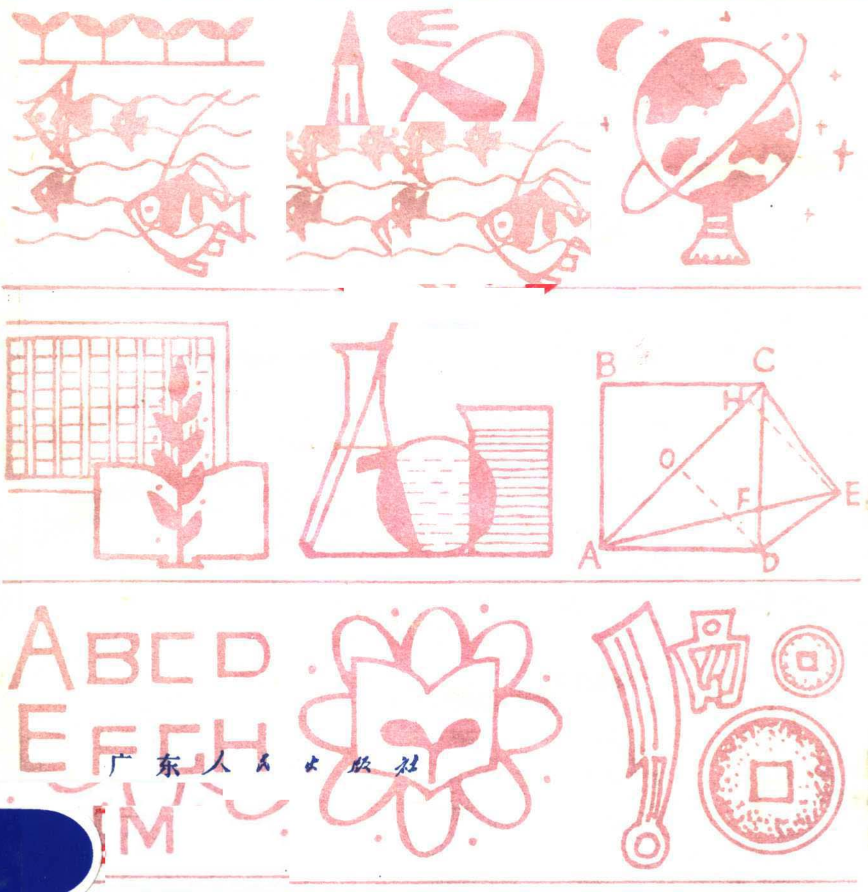
中学生复习丛书

数学



广东人民出版社

中学生复习丛书

数　学

广东省中小学教材编写组编

*

广东人民出版社出版
广东省新华书店发行
广东新华印刷厂印刷

*

787×1092 毫米 32 开本 13.5 印张 302,000 字
1981 年 1 月第 1 版　1981年 1 月第 1 次印刷
书号 7111·1040　定价 1.05 元

说　　明

这套《中学生复习丛书》是以全日制十年制学校各科教学大纲（试行草案）为主要依据，以现行全国通用中学课本为基本内容，参考近年来全国高等学校招生入学考试大纲和试题的要求而编写的。它力求对各学科的基础知识作比较系统、完整的归纳介绍，并结合进行基本训练，以帮助读者更好掌握各学科的知识内容，可供我省高中学生系统复习时参考，也可供具有相当高中文化程度的青年作高考复习用书或自学读物。

全套丛书分为政治、语文、历史、地理、数学、物理、化学、生物和英语等九科，分册单独出版。此外，应广大师生的要求，本套丛书中的数学、物理、化学和生物四科，我们另行编写有与该科配套的练习题和解答，同时出版，以方便读者自学、参考。

这套丛书是由我组约请华南师范学院、广东教育学院、广州市教育局教研室、广州师范学院、广州市教师进修学院、广雅中学和广东实验学校等院校有关教师及广州市部分中学教师共同编写的。在编写过程中曾广泛参考了各兄弟省市编写的这类复习资料，从中吸收了许多有益的成果。同时，省内外一些中学师生和读者也对本书的编写提出了宝贵意见，在此，我们一并表示深切的谢意。

广东省教育厅教材编写组

一九八〇年十一月

目　录

第一部分　代　数

第二部分　三　角

第三部分　平面几何

第四部分　立体几何

第五部分　平面解析几何

第一部分　代　　数

Ⅰ．数

一、　有理数

正整数、负整数，正分数、负分数和零的全体叫做有理数．

如果m和n是互质整数，且$m\neq 0$，那么，任何一个有理数都可以表示为$\frac{n}{m}$的形式；反过来，每一个形如$\frac{n}{m}$的数都是有理数．

二、　无理数

无限不循环小数叫做无理数．

1．方　根

如果$x^n=a$（n是大于1的正整数），那么，x叫做a的n次方根．其中，n叫做根指数，a叫做被开方数．

1）　方根的性质

①　正数的偶次方根是两个相反的数；

②　负数的偶次方根在实数范围内无意义；

③　正数的奇次方根是一个正数；

④　负数的奇次方根是一个负数；

⑤　零的任何次方根是零。

2）　算术根

正数的正的方根叫做算术根．记作

$$\sqrt[n]{a} \qquad (a\geqslant 0,\ n\text{为正整数})。$$

①　零的算术根是零；

②　算术根的基本性质：

$$(\sqrt[n]{a})^n=\sqrt[n]{a^n}=a \qquad (a\geqslant 0)。$$

2．例　题

例1．　如果$a<0$，那么，$\sqrt{a^2}\div a=1$是否成立，为什么？

解：　$\because$　$a<0$，

$\therefore$　$\sqrt{a^2}=-a$。

$\sqrt{a^2}\div a=(-a)\div a=-1$。

$\therefore$　等式$\sqrt{a^2}\div a=1$不成立。

例2．　证明$\sqrt{3}$是无理数。

证明：设$\sqrt{3}$不是无理数，它就是有理数，但显然不是整数，所以可设

$$\sqrt{3}=\frac{n}{m} \quad (m\text{和}n\text{是互质的正整数})。$$

等号两边平方，得

$$3=\left(\frac{n}{m}\right)^2,$$

$\therefore$　$3m^2=n^2$。

因m和n是互质的正整数，故n必为3的倍数．令$n=3k$（k为整数），代入上式，得

$$(3k)^2=3m^2。$$

$\therefore \qquad m^2 = 3k^2$.

因 k 是 n 的约数，故 m 和 k 互质，所以 m 也一定是 3 的倍数．这样，m、n 就至少有一个公因数 3，显然与假设矛盾．因此，$\sqrt{3}$ 不是有理数而是无理数．

三、 实 数

有理数和无理数的全体叫做实数．

1． 实数和数轴的关系

实数和数轴上的点之间具有"一一对应"的关系．在数轴上表示实数的点叫做实数点．

2． 实数的绝对值

一个正数的绝对值是它的本身，一个负数的绝对值是它的相反数，零的绝对值是零．即

$$|a| = \begin{cases} a\text{，} & \text{当 } a>0 \text{ 时；} \\ 0\text{，} & \text{当 } a=0 \text{ 时；} \\ -a\text{，} & \text{当 } a<0 \text{ 时．} \end{cases}$$

从数轴上看，实数的绝对值就是表示这个实数点与原点的距离．如图 1—1 所示．

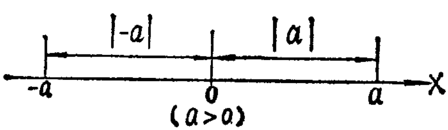


图 1—1

3． 实数的大小比较

一切正数大于零，零大于一切负数，两个负数，绝对值大的反而小，绝对值小的反而大．

从数轴上看，实数点越往右，它所表示的数就越大。

4. 例 题

例1. 设a为任意实数，试化简

$$\sqrt{(a-2)^2}+\sqrt{(a+3)^2}+\sqrt{(a-5)^2}.$$

解：原式$=|a-2|+|a+3|+|a-5|$

$$=\begin{cases}4-3a, & \text{当} \quad a\leqslant -3\text{时；}\\ 10-a, & \text{当}-3<a\leqslant 2\text{时；}\\ a+6, & \text{当}\quad 2<a\leqslant 5\text{时；}\\ 3a-4, & \text{当}\quad 5<a\text{时。}\end{cases}$$

例2. 证明任意两个奇数的平方差能够被8整除。

证明：设x为任一个奇数，则另一个奇数可表示为$x+2n$（n为自然数），于是

$$(x+2n)^2-x^2=x^2+4nx+4n^2-x^2$$
$$=4n(x+n).$$

上式显然可被4整除。又在$n(x+n)$中，如果n为偶数，它能被2整除；如果n为奇数，则$x+n$就为偶数，它也能被2整除。所以任意两个奇数的平方差能被8整除。

四、复 数

1. 虚 数

1） 虚数单位

i叫做虚数单位。它具有以下的性质：

① $i^2=-1$；

② i和实数在一起，可按实数的运算法则进行运算；

③ i的乘幂具有周期性：

$$i^{4n+1}=i, \qquad i^{4n+2}=-1,$$

$$i^{4n+3} = -i, \qquad i^{4n} = 1.$$

这里，n为正整数。

2） 纯虚数

虚数单位 i 和实数 b 相乘，得形如 bi 的数，

① 如果 $b \neq 0$，那么，bi这个数叫做纯虚数。

如果 $b = 0$，那么，规定 $bi = 0i = 0$；

② 如果 $B > 0$，$\sqrt{B}$ 是实数，那么

$$\sqrt{-B} = \sqrt{B}\, i.$$

在运算时，先把$\sqrt{-B}$ 表示为$\sqrt{B}\,i$，可避免发生一些错误。

2. 复 数

形如 $a+bi$(a、b 都是实数)的数叫做复数。a 叫做复数的实部，bi 叫做复数的虚部，b 叫做复数的虚部系数。

如果 $b=0$，这个复数就是实数 a；

如果 $b \neq 0$，$a=0$，这个复数就是纯虚数 bi。

1） 复数的几何表示法

在直角坐标平面内，把X轴叫做实轴，Y 轴叫做虚轴，这样的平面叫做复平面（或高斯平面）；复数 $a+bi$ 和复平面内的点之间有一一对应的关系，如图 1—2 所示，点 Z 的横坐标为 a，纵坐标为 b。

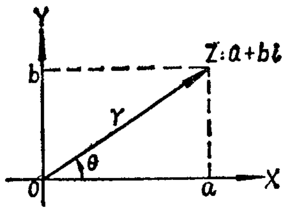


图 1—2

在复平面内，表示实数的点在X轴上，表示纯虚数的点在除原点外的Y 轴上，表示虚数的点在X轴以外。

如果Z点表示复数 $a+bi$，那么，向量 OZ（记作 $\overrightarrow{OZ}$ 或

$\vec{Z}$）和复数$a+bi$相对应。

2） 复数的模数（绝对值）

如图1—2，向量$\overrightarrow{OZ}$的长r叫做复数$a+bi$的模数(或绝对值)。记作

$$|\overrightarrow{OZ}| \quad 或 \quad |a+bi|$$

即
$$r=mod(a+bi)=|\overrightarrow{OZ}|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

3） 复数的幅角

如图1—2，X轴的正方向和向量$\overrightarrow{OZ}$所夹的角θ叫做复数$a+bi$的幅角。不等于零的复数$a+bi$的幅角有无数多个值，这些值相差为2π的整数倍。记作

$$\theta=Arg(a+bi).$$

其中适合于

$$0\leqslant\theta<2\pi$$

的幅角的值叫做幅角的主值。记作

$$\theta=arg(a+bi).$$

如果没有特别说明，复数的幅角一般指幅角的主值。

要确定复数$a+bi$的幅角主值θ，可由下式决定：

$$\begin{cases}cos\theta=\dfrac{a}{r},\\ sin\theta=\dfrac{b}{r};\end{cases}$$

或
$$tg\theta=\frac{b}{a}\quad（注意a和b的符号）.$$

显然，在复数$a+bi$中，如果

$b=0$、$a>0$，则正实数的幅角主值为 0；

$b=0$、$a<0$，则负实数的幅角主值为 π；

$a=0$、$b>0$，则系数为正数的纯虚数的幅角主值为$\frac{\pi}{2}$；

$a=0$、$b<0$，则系数为负数的纯虚数的幅角主值为$\frac{3\pi}{2}$；

$a=0$、$b=0$，则零的复数的幅角主值不能确定。

4） 复数的三角式

利用复数 $a+bi$ 的模数 r 和幅角 θ，可把复数表示为

$$a+bi=r(cos\theta+isin\theta)。$$

式子 $r(cos\theta+isin\theta)$ 叫做复数 $a+bi$ 的三角式（或三角函数式），而 $a+bi$ 叫做复数的代数式。

5） 复数的指数式

复数 $a+bi$ 的模数 r 和幅角 θ，利用欧拉公式

$$e^{i\theta}=cos\theta+isin\theta,$$

可把复数表示为

$$a+bi=re^{i\theta}。$$

式子 $re^{i\theta}$ 叫做复数 $a+bi$ 的指数式。e（$=2.71828\cdots$）是自然对数的底数。

复数的代数式、三角式和指数式有

$$a+bi=r(cos\theta+isin\theta)=re^{i\theta}$$

的关系，它们可以互化。

6） 复数为零

如果 $a=0$、$b=0$，那么，复数 $a+bi$ 叫做为零。即

$$a+bi=0;$$

反过来，如果$a+bi=0$，那么，$a=0$、$b=0$。

7） 复数相等

如果 $a=c$、$b=d$，那么，复数 $a+bi$ 和 $c+di$ 叫做相等．即

$$a+bi=c+di.$$

反过来，如果 $a+bi=c+di$，那么，$a=c$，$b=d$。

8） 共轭复数

如果两个复数的实部相等、虚部的系数互为相反数，那么，这两个复数叫做共轭复数．即复数

$$a+bi \quad 和 \quad a-bi$$

$(b\neq 0)$是共轭复数．

共轭复数的和、积都是实数，差是纯虚数。

在复平面内，共轭复数的对应点是关于实轴对称的。

共轭复数 $a+bi$ 和 $a-bi$ 的模数相等：

$$|a+bi|=|a-bi|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

3． 复数的性质

1） 复数没有顺序性，两个复数中只要有一个不是实数，就不能规定它的大小；

2） 在复数范围内可以永远进行加、减、乘、除（除数不为零)、乘方、开方六种运算；

3） 复数的 n 次方根有 n 个值。

4． 复数的运算法则

1） 加法和减法

一般用代数式来表示，对求解比较方便：

$$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i.$$

2） 乘法

① 用代数式来表示：

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i;$$

② 用三角式来表示：

$$r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$
$$=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)];$$

③ 用指数式来表示：

$$r_1e^{i\theta_1}\cdot r_2e^{i\theta_2}=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

3） 除法

① 用代数式来表示：

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{cb-ad}{c^2+d^2}\,i\ (c+di\neq 0);$$

② 用三角式来表示：

$$\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}$$
$$=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$$
$$(r_2\neq 0);$$

③ 用指数式来表示：

$$\frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}\ (r_2\neq 0).$$

4） 乘方

一般用三角式来表示，对求解比较方便：

$$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n$$
$$=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)(n\text{是整数}).$$

这个公式叫做棣美弗定理。

5） 开方

同样用三角式来表示，对求解也比较方便：

$$\sqrt[n]{r(\cos\theta+i\sin\theta)}$$
$$=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{2k\pi+\theta}{n}+i\sin\frac{2k\pi+\theta}{n}\right).$$

其中，n是正整数，$\sqrt[n]{r}$表示r的n次算术根，$k=0,1,2,\cdots\cdots,n-1$。

5. 例 题

例1. 计算 $\dfrac{3-4i}{1+2i}+i^{26}-(1-i)^6$。

解： 原式$=\dfrac{(3-4i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}+i^{4\times6+2}-[(1-i)^2]^3$

$$=\frac{3-8-4i-6i}{1+4}-1-(+8i)$$

$$=-2-10i.$$

注意：利用共轭复数的积为实数的性质，可将分母化为实数，使运算简便。

例2. 把复数$Z=1+cos\theta+isin\theta$ $\left(0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$化为三角式。

解： 设 $Z=a+bi$，则

$$a=1+cos\theta\text{、}b=sin\theta,$$

$$\therefore\quad r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2(1+cos\theta)}=2cos\frac{\theta}{2}.$$

令Z的幅角主值为φ，则

$$tg\varphi=\frac{b}{a}=\frac{sin\theta}{1+cos\theta}=tg\frac{\theta}{2}.$$

$$\because\quad sin\theta>0\text{、}cos\theta>0,$$

$$\therefore\quad \varphi=\frac{\theta}{2}.$$

$$\therefore\quad Z=2cos\frac{\theta}{2}\left(cos\frac{\theta}{2}+isin\frac{\theta}{2}\right).$$

注意：从表面看，Z似是复数的三角式，但Z的模数和幅角各是多少都不知道，故要把Z看为$a+bi$形式的复数。

例3. 求1的立方根。

解：∵ $1=\cos 0+i\sin 0$，

∴ $$\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{\cos 0+i\sin 0}=\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}.$$

当$k=0$ 时，

$$\sqrt[3]{1}=\cos 0+i\sin 0=1;$$

当$k=1$时，

$$\sqrt[3]{1}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

当$k=2$ 时，

$$\sqrt[3]{1}=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

∴ 1的立方根是1，$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

注意：如果用ω表示$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，那么，$\omega^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$. 这样1的三个立方根就是1，$\omega$，$\omega^2$. 由此可推得：

$$\omega\cdot\omega^2=\omega^3=1;\quad 1+\omega+\omega^2=0.$$

1的三次方根的这两个性质，在解题时经常用到。

例4. 用棣美弗定理推导三倍角的正余弦定理。

解：根据棣美弗定理，得

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos 3\theta+i\sin 3\theta.$$

按乘法公式，得

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos^3\theta+3\cos^2\theta\cdot i\sin\theta$$
$$+3\cos\theta\cdot(i\sin\theta)^2+(i\sin\theta)^3$$

$$=(4\cos^3\theta-3\cos\theta)+i(3\sin\theta-4\sin^3\theta).$$

根据复数相等的条件，得

$$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta,$$

$$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta.$$

例5. 化简 $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^n+\left(\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^n$（$n$是整数）。

解：

$$原式=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n+\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]^n$$

$$=\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}+\cos\left(-\frac{n\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{n\pi}{3}\right)$$

$$=2\cos\frac{n\pi}{3}$$

$$=\begin{cases}\pm 2, & 当n=3k\quad 时；\\ \pm 1, & 当n=3k+1时；\\ \pm 1, & 当n=3k+2时（k是整数）.\end{cases}$$

例6. 如果$2x+|x|=2+6i$，求x。

解： 设$x=a+bi$，则

$$|x|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

原式变形为

$$2(a+bi)+\sqrt{a^2+b^2}=2+6i,$$

$$\therefore\quad\begin{cases}2a+\sqrt{a^2+b^2}=2, & ①\\ 2b=6. & ②\end{cases}$$