21世纪高等教育规划教材

上册

应用高等数学

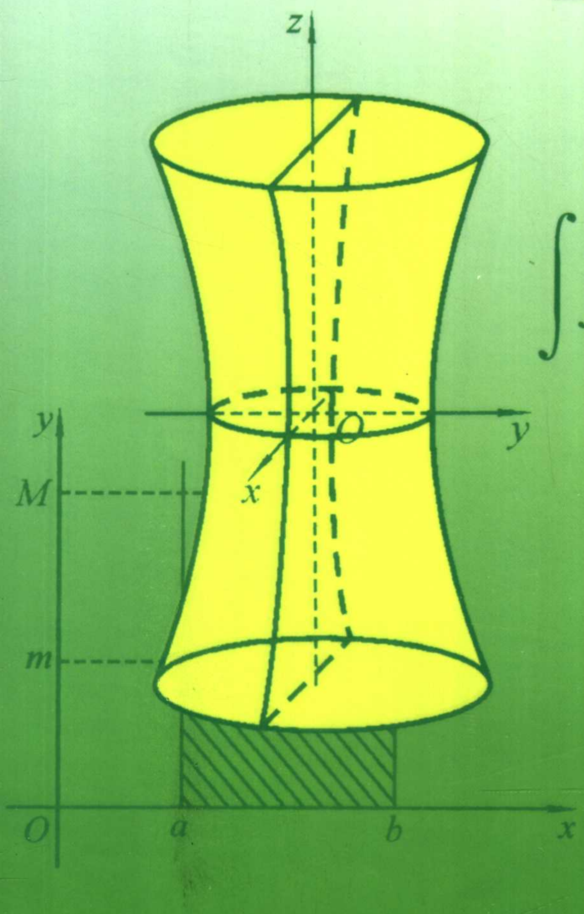
供理工类各专业用

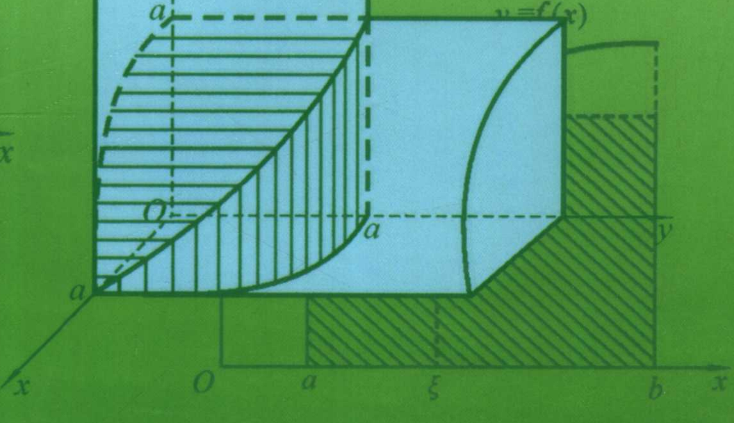
主编　孔亚仙

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$$

$$(-\infty, +\infty)$$





浙江科学技术出版社

21世纪高等教育规划教材
浙江省高等教育重点教材

上册

应用高等数学

供理工类各专业用

主　　编　孔亚仙
主　　审　骆忍冬
副 主 编　(按姓氏笔画为序)
王珍娥　　严小宝
陈建芳　　金　辉
潘仲川
编写人员　(按姓氏笔画为序)
丁匡平　　李淑红
李新柯　　吴晓红
钟继雷

浙江科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

应用高等数学. 上册/孔亚仙主编. —修订本. —杭州:
浙江科学技术出版社,2005.9
供理工类各专业用
ISBN 7-5341-2756-4

Ⅰ.应… Ⅱ.孔… Ⅲ.高等数学-高等学校:技
术学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 106858 号

责任编辑:宋 东
封面设计:金 晖

21 世纪高等教育规划教材
浙江省高等教育重点教材
应用高等数学
上 册
(供理工类各专业用)
主编 孔亚仙
*
浙江科学技术出版社出版发行
杭州富春电子印务有限公司排版
杭州富春印务有限公司印刷
开本:787×1092 1/16 印张:16 字数:323 000
2005年9月第 1 版
2006年8月第2次印刷
ISBN 7-5341-2756-4
定 价:25.00 元

前　言

《应用高等数学》由浙江省二十多所高职高专院校联合编写。全书共三册,包括上册(供理工类各专业用)、上册(供非理工类各专业用)和下册(供各类专业选用)。本教材于2001年首次出版,经过不断地修订完善,逐渐成为浙江省较有影响的高职高专数学教材之一。2005年,《应用高等数学》被列为浙江省高等教育重点建设教材,为此,成立了《应用高等数学》编写委员会,由温州职业技术学院王小明老师担任编写委员会主任。

本书编委会在教材的建设中力求体现以下原则:

一、以学生为本。针对高职高专学生的特点,在保留高等数学核心内容的前提下,对教学内容予以不同程度的精简与优化。我们注重突出基本概念和基本方法,讲清重要结论,淡化某些过于繁杂的理论推证。本教材基本上能够满足高职高专素质教育和各类专业教育的要求。为方便学生,我们还将初等数学的知识要点编成"预备知识"附于书后,以供备查。

二、重视直观化描述。对常用数学概念和结论的叙述,尽可能配以直观化描述。全书配有大量插图和图表,意在从直观意义和几何意义入手,帮助学生更好地掌握数学知识。

三、突出应用能力。实践应用是数学知识价值的最好体现。在教材知识结构、编写构思以及例题、习题等方面的安排上,我们着意培养学生处理实际问题的应用能力。

四、运用计算机。本书安排了数学软件 Mathematica 的选学内容,以强化学生处理数据和图形的能力,并强化他们运用计算机的意识。这些内容易懂易学,对于提高学生实际应用能力有显著的作用。

五、知识模块组合灵活化。本书的框架结构已为模块式教学留下较大的组合空间。常用的数学知识模块在本书中已经齐全。我们力图使这些知识模块保持最大限度的独立性,以方便各类专业选学。

本教材理工类上册内容,除一元和多元函数微积分以外,还包括常微分方程、级数和 Laplace 变换。非理工类上册以一元和多元微积分为主,同时加强了高等数学在经济领域中的应用。下册为线性代数和概率统计的内容。三册内容前后贯串,又有相对的独立性,选用自由度大。各册中都安排了结合本册内容的 Mathematica 数学实验。

为了有利于学生复习巩固和提高,我们同时编写了与本书配套的《应用高等数学练习册》供各校选用。该练习册一套共三册,题目题型与难度和各册教材的教学内容密切配合。它们已在教学实践中经过多年的使用,相信定能成为读者得心应手的朋友。

本套教材理工类上册主编为孔亚仙(浙江建设职业技术学院),非理工类上册主编为于德明(浙江机电职业技术学院),下册主编为王小明(温州职业技术学院)。

理工类上册副主编(按姓氏笔画排序,下同)为王珍娥(浙江机电职业技术学院)、严小宝(丽水职业技术学院)、陈建芳(绍兴托普信息职业技术学院)、金辉(浙江医药高等专科学校)、潘仲川(浙江交通职业技术学院);参加编写的人员还有:丁匡平(丽水职业技术学院)、李淑红(丽水学院)、李新柯(浙江建设职业技术学院)、吴晓红(杭州万向职业技术学院)、钟继雷(浙江国际海运职业技术学院)。

非理工类上册副主编为华荣伟(浙江医学高等专科学校)、沈建根(嘉兴职业技术学院)、罗道宝(浙江经贸职业技术学院)、洪哲(浙江科技学院)、童宏胜(杭州职业技术学院);参加编写的人员还有:毕道旺(浙江万里学院国际经贸职业技术学院)、杨乃如(杭州职业技术学院)、陆毅(浙江国际海

运职业技术学院)、金友良(丽水职业技术学院)、金来友(浙江旅游职业技术学院)。

下册副主编为王新力(浙江经济职业技术学院)、杨迪明(浙江邮电职业技术学院)、胡亚红(丽水学院)、宣明(温州职业技术学院);参加编写的人员还有:王新成(温州职业技术学院)、戎笑(浙江机电职业技术学院)、阮晓刚(浙江电力职业技术学院)、骆秋琴(温州科技职业学院)、高永久(杭州科技职业技术学院)、黄柏江(浙江邮电职业技术学院)、蓝春霞(丽水学院)。

本教材各分册中有关 Mathematica 数学实验的内容,均由温州职业技术学院王小明撰写。

上述全体编写人员即为本书编写委员会成员,其中具有高级职称的老师占 80%以上。

我省高职高专数学界的前辈骆忍冬、施沛沄、王潘玲老师,是最早主持编写本教材的三位学者,多年来他们始终积极参与本教材的撰写与组织工作,这次又承蒙担任本套教材各分册的主审,为提高本书的质量作出了重要贡献。编委会特向他们致以崇高的敬意。

本书的编写与发行得到了浙江省数学会职教数学专业委员会的大力支持与帮助,编委会一并致以诚挚的感谢。

《应用高等数学》编写委员会

2006 年 7 月

目　录

第一章　函数的极限与连续

极限是微积分学中最基本、最重要的概念之一，极限的思想与理论是整个高等数学的基础，连续、微分、积分等重要概念都归结于极限. 因此掌握极限的思想与方法是学好高等数学的前提条件. 本章将在初等数学的基础上，介绍极限与连续的概念.

§1－1　函数

一、函数的概念

定义 1.1　设有一非空实数集 D，如果存在一个**对应法则** f，使得对于每一个 $x\in D$，都有惟一的实数 y 与之对应，则称对应法则 f 是定义在 D 上的一个**函数**. 记作 $y=f(x)$，其中 x 为**自变量**，y 为**因变量**，习惯上称 y 是 x 的**函数**，D 称为**定义域**.

当自变量 x 取定义域 D 内的某一定值 x_0 时，按对应法则 f 所得的对应值 y_0，称为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 时的**函数值**，记作 $f(x_0)$，即 $y_0=f(x_0)$. 当自变量 x 取遍 D 中的数，所有对应的函数值 y 构成的集合称为函数的**值域**，记作 M，即

$$M=\left\{y\,\middle|\,y=f(x),x\in D\right\}$$

例 1　已知 $f(x)=x^2-x-1$，求 $f(0)$，$f(1)$，$f(-x)$.

解　$f(0)=0^2-0-1=-1$

$f(1)=1^2-1-1=-1$

$f(-x)=(-x)^2-(-x)-1=x^2+x-1$

例 2　求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{4}{x^2-1}$；　　(2) $y=\sqrt{6+x-x^2}+\ln(x+1)$.

解　(1) $x^2-1\neq0$，$x\neq\pm1$，所以定义域为 $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$

(2) $\begin{cases}6+x-x^2\geqslant0\\x+1>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant3\\x>-1\end{cases}$，所以定义域为 $x\in(-1,3]$

由函数定义可知，定义域与对应法则一旦确定，则函数随之惟一确定. 因此，我们把函数的定义域和对应法则称为函数的两个要素. 如果两个函数的定义域、对应法则均相同，那么认为这两个函数是同一函数. 反之，如果两要素中有一个不同，则这两个函数就不是同一函数.

例如 $f(x)=\sin^2x+\cos^2x$ 与 $\varphi(x)=1$，因为 $\sin^2x+\cos^2x=1$，即这两个函数的对应法则相同，而且定义域均为 R，所以它们是相同的函数.

又如 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $\varphi(x)=x+1$，虽然 $\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1$，但由于这两个函数的定义域不同，所以这两个函数不是同一函数.

通常函数可以用三种不同的形式来表示：表格法、图形法和解析法（或称公式法）. 三种形式各有其优点和不足，实际问题中往往把三种形式结合起来使用.

二、函数的性质

1. 单调性

设函数 $y=f(x)$在(a,b)内有定义,若对(a,b)内的任意两点 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有$f(x_1)<f(x_2)$,则称 $y=f(x)$在(a,b)内**单调增加**;若当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$在(a,b)内**单调减少**,区间(a,b)称为**单调区间**.

2. 奇偶性

设函数 $y=f(x)$在以原点为中心的某一对称区间 D 上有定义,若对于任意的 $x\in D$,都有 $f(-x)=f(x)$,则称 $y=f(x)$为**偶函数**;若有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $y=f(x)$为**奇函数**. 否则 $y=f(x)$为**非奇非偶函数**.

在直角坐标系中,偶函数的图像关于 y 轴对称,奇函数的图像关于原点对称.

3. 有界性

设函数 $y=f(x)$在(a,b)内有定义,若存在一个正数 M,使得对任意的 $x\in(a,b)$,恒有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $y=f(x)$在(a,b)内**有界**.

如 $y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 都在$(-\infty,+\infty)$内有界.

4. 周期性

设函数 $y=f(x)$在 D 上有定义,若存在一个正实数 T,对于任意的 $x\in R$,恒有 $f(x+T)=f(x)$,则称$f(x)$是以 T 为**周期**的**周期函数**.

通常所说的周期函数的周期,是指它们的最小正周期. 如 $y=\sin x$ 的周期是 2π,$y=\tan x$ 的周期是 π,$y=A\sin(wx+\varphi)$的周期是$\frac{2\pi}{|w|}$. 函数 $y=C$(C 为常数)是周期函数,但不存在最小正周期,此类函数称为**平凡周期函数**.

三、反函数

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$,其定义域为 D,值域为 M. 如果对于每一个 $y\in M$,有惟一的 $x\in D$与之对应,并使 $y=f(x)$成立,则得到一个以 y 为自变量,x 为因变量的函数,称此函数为 $y=f(x)$的**反函数**,记作

$$x=f^{-1}(y)$$

显然,$x=f^{-1}(y)$的定义域为 M,值域为 D. 由于习惯上自变量用 x 表示,因变量用 y 表示,所以 $y=f(x)$的反函数可表示为

$$y=f^{-1}(x)$$

例如 $y=\sqrt{x}$的反函数是$y=x^2(x\geqslant0)$,其定义域就是 $y=\sqrt{x}$的值域$[0,+\infty)$,值域是 $y=\sqrt{x}$的定义域$[0,+\infty)$,如图 1-1(a)所示.

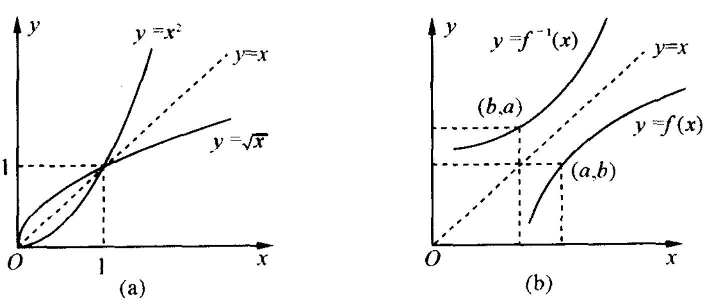


图 1-1

在同一直角坐标系中，函数 $y=f(x)$ 和其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称，如图 1－1(b)所示.

四、初等函数

1. 基本初等函数

下列六种函数统称为基本初等函数.

（1）常数函数 $y=C$（C 为常数），其图形为一条平行或重合于 x 轴的直线.

（2）幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 为实数），其在第一象限内的图形如图 1－2 所示.

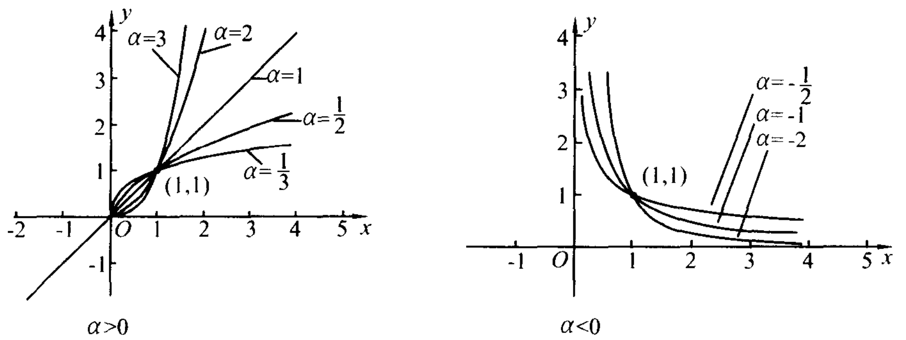


图 1－2

（3）指数函数 $y=a^{x}$（$a>0, a\neq 1$），定义域为 R，值域为 $(0,+\infty)$，图形如图 1－3(a)所示.

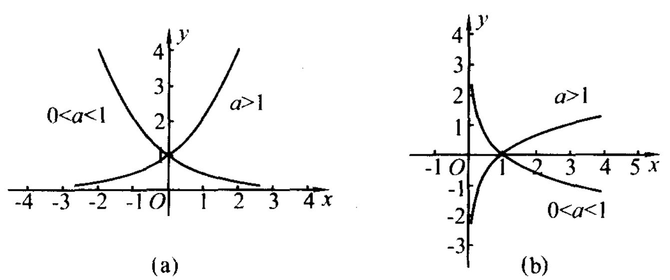


图 1－3

（4）对数函数 $y=\log_a x$（$a>0, a\neq 1$），定义域为 $(0,+\infty)$，值域为 R，图形如图 1－3(b)所示.

（5）三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$. 其中正弦函数 $y=\sin x$ 和余弦函数 $y=\cos x$ 的定义域都为 R，值域都为 $[-1,1]$，正切函数 $y=\tan x$ 的定义域为 $\left\{x \,\middle|\, x\in\mathbf{R}, 且\ x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right\}$，值域为 R，这三个函数的图形如图 1－4 所示.

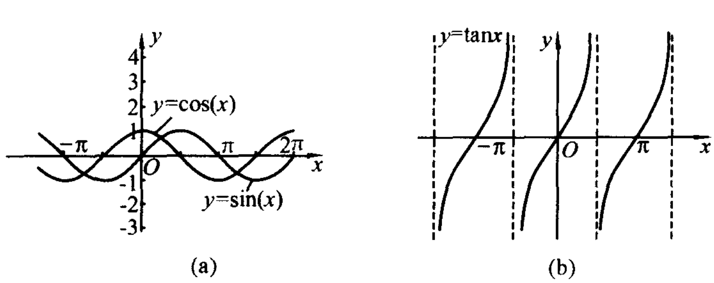


图 1－4

(6) 反三角函数 $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\arctan x$, $y=\text{arccot}\, x$, 其中反正弦函数 $y=\arcsin x$ 与反余弦函数 $y=\arccos x$ 的定义域都为 $[-1,1]$, 值域分别为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 和 $[0,\pi]$; 反正切函数 $y=\arctan x$ 的定义域为 R, 值域为 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, 这三个函数的图形如图 1-5 所示.

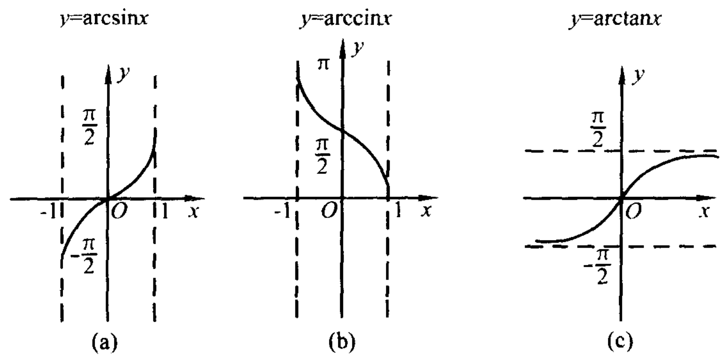


图 1-5

2. 复合函数

定义 1.3 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f, 函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 M_φ, 若 $M_\varphi \cap D_f \neq \varnothing$, 则将 $y=f[\varphi(x)]$ 称为 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**, u 称为**中间变量**, x 为**自变量**.

如函数 $y=\ln u$, $u=x^2+1$, 因为 $u=x^2+1$ 的值域 $[1,+\infty)$ 包含在 $y=\ln u$ 的定义域 $(0,+\infty)$ 内, 即 $[1,+\infty)\cap(0,+\infty)\neq\varnothing$, 所以 $y=\ln(x^2+1)$ 是 $y=\ln u$ 与 $u=x^2+1$ 的复合函数.

注意: (1) 并不是任何两个函数都可以复合的, 如 $y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 就不能复合. 因为 $u=2+x^2$ 的值域为 $[2,+\infty)$, 而 $y=\arcsin u$ 的定义域为 $[-1,1]$, 所以对于任意的 x 所对应的 u, 都使 $y=\arcsin u$ 无意义.

(2) 复合函数还可推广到由三个及以上函数的有限次复合.

例 3 指出下列函数的复合过程:

(1) $y=\sqrt[3]{2x+1}$;　　(2) $y=\ln\tan\frac{x}{2}$.

解 (1) $y=\sqrt[3]{2x+1}$ 是由 $y=\sqrt[3]{u}$ 与 $u=2x+1$ 复合而成的;

(2) $y=\ln\tan\frac{x}{2}$ 是由 $y=\ln u$, $u=\tan v$, $v=\frac{x}{2}$ 复合而成的.

例 4 已知 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,1]$, 求 $f(\ln x)$ 的定义域.

解 由 $-1\leqslant \ln x\leqslant 1$ 得 $\frac{1}{e}\leqslant x\leqslant e$

所以 $f(\ln x)$ 的定义域为 $\left[\frac{1}{e},e\right]$.

3. 初等函数

定义 1.4 由基本初等函数经过**有限次四则运算**或**有限次的复合**, 且可用一个解析式表示的函数, 称为**初等函数**.

有些函数在其定义域内, 当自变量在不同范围内取值时, 要用不同的解析式表示, 这类函数称为**分段函数**, 分段函数中有些是初等函数, 有些是非初等函数.

例 5 已知 $f(x)=\begin{cases}2^x, & x\leqslant 0;\\ 1-x, & 0<x\leqslant 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$ 求 $f(-2)$, $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(2)$, 并作出函数图形.

解 $f(-2)=2^x\Big|_{x=-2}=\dfrac{1}{4}$； $f(0)=2^x\Big|_{x=0}=1$；

$f(\dfrac{1}{2})=(1-x)\Big|_{x=\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$； $f(2)=1\Big|_{x=2}=1$.

图形如图 1－6 所示.

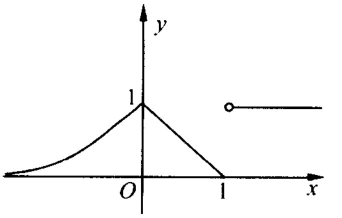


图 1－6

五、建立函数关系举例

运用函数解决实际问题，通常先要找到这个实际问题中的变量与变量之间的依赖关系，然后把变量间的这种依赖关系用数学解析式表达出来(即建立函数关系)，最后进行分析、计算.

例 6 如图1－7，从边长为 a 的正三角形铁皮上剪一个矩形，设矩形的一条边长为 x，周长为 P，面积为 A，试分别将 P 和 A 表示为 x 的函数.

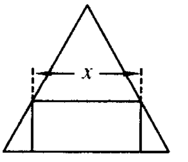


图 1－7

解 因为矩形的另一条边长为$\dfrac{a-x}{2}\cdot\tan 60°=\dfrac{\sqrt{3}(a-x)}{2}$，得

该矩形周长 $P=\sqrt{3}(a-x)+2x=(2-\sqrt{3})x+\sqrt{3}a, x\in(0,a)$

矩形面积 $A=\dfrac{\sqrt{3}(a-x)}{2}\cdot x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}ax-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2, x\in(0,a)$.

例 7 电力部门规定，居民每月用电不超过 30 度时，每度电按 0.5 元收费；当用电超过 30 度但不超过 60 度时，超过的部分每度电按 0.6 元收费；当用电超过 60 度时，超过部分每度电按 0.8 元收费，试建立居民月用电费 G 与月用电量 W 之间的函数关系.

解 当 $0\leqslant W\leqslant 30$ 时，$G=0.5W$

当 $30<W\leqslant 60$ 时，$G=0.5\times 30+0.6\times(W-30)=0.6W-3$

当 $W>60$ 时，$G=0.5\times 30+0.6\times 30+0.8\times(W-60)=0.8W-15$

所以 $G=f(W)=\begin{cases}0.5W, & 0\leqslant W\leqslant 30;\\ 0.6W-3, & 30<W\leqslant 60;\\ 0.8W-15, & W>60.\end{cases}$

习题 1－1

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{2x-x^2}$； (2) $y=\sqrt{x^2-3x+2}$；

(3) $y=\ln(1-x^2)$； (4) $y=\arcsin 2x$.

2. 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2+2, & x>0;\\ 1, & x=0;\\ 3x, & x<0.\end{cases}$ 求 $f(-1), f(0), f(1)$的值，并作出函数的图形.

3. 求下列函数的反函数：

(1) $y=3x+1$； (2) $y=1-\ln x$； (3) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$.

4. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $y=x^2\sin x$； (2) $y=\sin x+\cos x$；

(3) $y=x^2+2\cos x$； (4) $y=\dfrac{e^{-x}-1}{e^x+1}$.

5. 分析下列复合函数的结构，并指出它们的复合过程：

(1) $y=\sqrt{x^2+1}$； (2) $y=e^{\sin x}$；

(3) $y=\cos^2(x-1)$;　　　　　　　　　(4) $y=\lg\sin(x+1)$.

6. 把一个直径为50厘米的圆木截成横截面为长方形的方木,若此长方形截面的一条边长为 x 厘米,截面面积为 A 平方厘米,试将 A 表示成 x 的函数,并指出其定义域.

§1-2　极限的概念

一、数列的极限

先看下面两个按一定次序排列的一列数:

(1) $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$

(2) $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$

我们称它们为**数列**,分别记作 $\left\{\frac{1}{n}\right\},\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$.

现在来考察 n 无限增大时,这两个数列的变化趋势. 为清楚起见,我们把这两个数列的前 n 项:$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 分别在数轴上表示出来(如图1-8,图1-9所示).

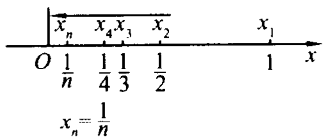


图1-8

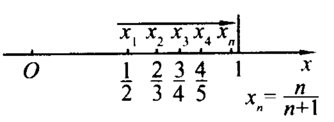


图1-9

由图1-8可以看出,当 n 无限增大时,表示 $x_n=\frac{1}{n}$ 的点逐渐密集在点 $x=0$ 的右侧,且 $x_n=\frac{1}{n}$ 无限接近于0;由图1-9可以看出,当 n 无限增大时,表示 $x_n=\frac{n}{n+1}$ 的点逐渐密集在点 $x=1$ 的左侧,且 $x_n=\frac{n}{n+1}$ 无限接近于1.

上述两个数列具有相同的变化特征,即当 n 无限增大时,它们都无限接近于一个确定的常数. 对于具有这样特征的数列,我们给出定义.

定义1.5　如果当 n 无限增大时,数列 $\{x_n\}$ 无限接近于一个确定的常数 A,则把常数 A 称为数列 $\{x_n\}$ 的**极限**(也称数列 $\{x_n\}$ **收敛**于 A). 记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A\text{(或当 }n\to\infty\text{ 时},x_n\to A)$$

因此,上述数列(1)有极限为0,记作 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$;数列(2)有极限为1,记作 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$.

例1　观察下面数列的变化趋势,并写出它们的极限.

(1) $x_n=\frac{1}{2^{n-1}}$;　　(2) $x_n=\frac{n+1}{n}$;　　(3) $x_n=\frac{1}{(-3)^n}$;　　(4) $x_n=4$.

解　(1) $x_n=\frac{1}{2^{n-1}}$ 的项依次为 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots$,当 n 无限增大时,x_n 无限接近于0,所以

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=0$;

(2) $x_n=\frac{n+1}{n}$ 的项依次为 $2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\cdots$,当 n 无限增大时,x_n 无限接近于1,所以

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$;

(3) $x_n=\frac{1}{(-3)^n}$的项依次为$-\frac{1}{3},\frac{1}{9},-\frac{1}{27},\frac{1}{81},\cdots$，当 n 无限增大时，x_n 无限接近于 0，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}=\frac{1}{(-3)^n}=0$；

(4) $x_n=4$ 为常数数列，无论 n 取怎样的正整数，x_n 始终为 4，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}4=4$.

一般地，**一个常数数列的极限等于这个常数本身**，即

$$\lim_{n\to\infty}C=C \quad (C\text{ 为常数})$$

需要指出的是，并不是所有数列都有极限，如数列 $x_n=2^n$，当 n 无限增大时，x_n 也无限增大，不能无限接近于一个确定常数，所以它没有极限. 又如数列 $x_n=(-1)^n$，当 n 无限增大时，x_n 在 -1和 1 这两个数上来回摆动，不能无限接近于一个确定常数，所以它也没有极限.

对于没有极限的数列，我们称该数列的**极限不存在**，亦称该数列**发散**.

二、函数的极限

对于函数的极限，根据自变量的不同变化过程分两种情况介绍.

1. 当 $x\to\infty$ 时，函数 $y=f(x)$ 的极限

当自变量 x 的绝对值无限增大时，记作 $x\to\infty$.

定义 1.6 设函数 $y=f(x)$在$|x|>a$ 时有定义（a 为某个正实数），如果当自变量 x 的绝对值无限增大时，函数 $y=f(x)$无限趋近于一个确定的常数 A，则称常数 A 为当$x\to\infty$时，函数 $y=f(x)$的**极限**，记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$（或当 $x\to\infty$时，$f(x)\to A$）.

这里要指出的是，$x\to\infty$表示 x 既取正值而无限增大（记作 $x\to+\infty$），同时又取负值而其绝对值无限增大（记作 $x\to-\infty$）.

显然，函数 $f(x)$在 $x\to\infty$时的极限与在 $x\to+\infty$，$x\to-\infty$时的极限存在以下关系：

定理 1.1 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

例 2 讨论下列函数当 $x\to\infty$时的极限.

(1) $y=\frac{1}{x}$；　　(2) $y=2^x$；　　(3) $y=\arctan x$.

解 (1) 由反比例函数的图形及性质可知，当$|x|$无限增大时，$\frac{1}{x}$无限接近于 0，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$；

(2) 由指数函数的图形及性质可知，$\lim\limits_{x\to+\infty}2^x=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}2^x$ 不存在.

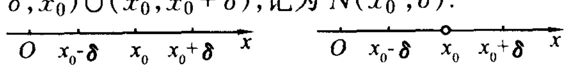
(3) 由反正切函数的图形及性质可知，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$不存在.

2. 当 $x\to x_0$ 时，函数 $y=f(x)$ 的极限

当自变量 x 无限接近于某一定值x_0 时，记作 $x\to x_0$.

定义 1.7 设 $\delta>0$，我们把集合$\left\{x\,\middle|\,|x-x_0|<\delta\right\}$称为点$x_0$ 的 δ **邻域**，点 x_0 称为**邻域的中心**，δ 称为**邻域的半径**. 又称集合$\left\{x\,\middle|\,0<|x-x_0|<\delta\right\}$为$x_0$ 的**去心邻域**.

如图 1-10(a)、(b)所示. 显然，x_0 的 δ 邻域即为开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$，记为 $N(x_0,\delta)$；x_0 的去心 δ 邻域即为$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$，记为 $N(\hat{x_0},\delta)$.



(a)　　(b)

图 1-10

定义 1.8 设函数 $y=f(x)$在 x_0 的某去心邻域 $N(\hat{x_0},\delta)$内有定义,如果当 x 无限趋近于x_0时,$f(x)$无限接近于一个确定的常数 A,则称常数 A 为当$x\to x_0$ 时函数 $f(x)$的**极限**,记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A(\text{或当 } x\to x_0 \text{ 时}, f(x)\to A)$$

如函数 $y=2^x$,从图 1-11 可看出,当 x 从 1 的左、右两旁无限趋近于 1 时,曲线 $y=2^x$ 上的点 M 与 M'都无限接近于点$N(1,2)$,即函数 $y=2^x$ 的值无限接近于常数 2,所以 $\lim\limits_{x\to 1}2^x=2$.

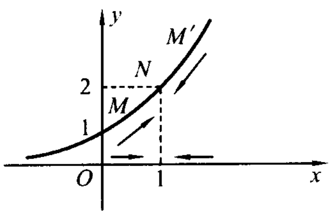


图 1-11

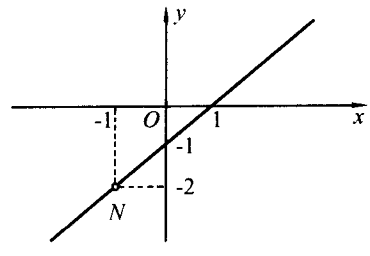


图 1-12

需要指出的是:

(1) 由于现在考察的是当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$的变化趋势,所以定义中并不要求 $f(x)$在点 x_0 处有定义;

(2) $x\to x_0$ 表示自变量 x 从x_0 的左、右两旁同时无限趋近于 x_0.

例 3 考察当 $x\to -1$ 时,函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$的变化趋势,并求 $x\to -1$ 时的极限.

解 从函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}=x-1(x\neq -1)$的图形(图 1-12)可知,当 x 从左、右两旁同时无限趋近于 -1 时,函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}=x-1(x\neq -1)$的值无限趋近于常数 -2,所以

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}=\lim_{x\to -1}(x-1)=-2.$$

定义 1.9 设函数 $y=f(x)$在$(x_0-\delta,x_0)$或$(x_0,x_0+\delta)$内有定义,若当自变量 x 从x_0 的左(右)近旁无限接近于 x_0,记作 $x\to x_0^-$ $(x\to x_0^+)$时,函数 $y=f(x)$无限接近于一个确定的常数 A,则称常数 A 为$x\to x_0$ 时的**左(右)极限**,记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \text{ 或} f(x_0-0)=A(\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \text{ 或} f(x_0+0)=A).$$

极限与左、右极限之间有以下结论:

定理 1.2 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$.

例 4 讨论下列函数当 $x\to 0$ 时的极限.

(1) $f(x)=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ -1, & x<0.\end{cases}$ (2) $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 0;\\ 1-x, & x<0.\end{cases}$

解 (1) 因为,$\lim\limits_{x\to 0^+}\operatorname{sgn}(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}1=1$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\operatorname{sgn}(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-1)=-1$,所以根据定理 1.2,$\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn}(x)$不存在. $\operatorname{sgn}(x)$称为符号函数,见图 1-13(a).

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(1-x)=1$,所以根据定理1.2,$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$,如图 1-13(b).

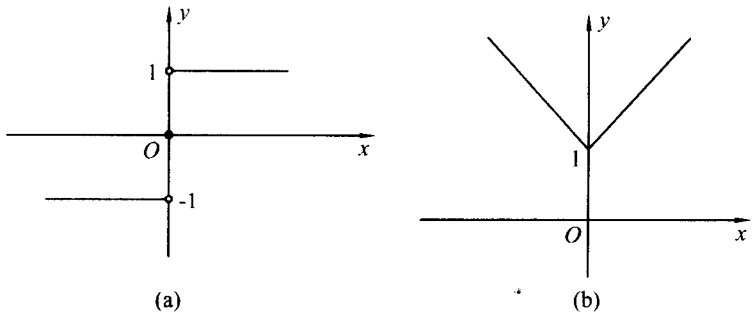


图 1－13

习题 1－2

1．观察下列数列的变化趋势，并判断极限是否存在，若存在，指出其极限值．

（1）$x_n=1+n$；　　（2）$x_n=2+\frac{1}{n}$；

（3）$x_n=\frac{1}{n^2}$；　　（4）$x_n=1+(-1)^n$．

2．考察下列函数当 $x\to 2$ 时的变化趋势，并求出其当 $x\to 2$ 时的极限．

（1）$y=2x+1$；　　（2）$y=\frac{x^2-4}{x-2}$．

3．讨论下列函数当 $x\to 0$ 时的极限．

（1）$f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0;\\ 0, & x=0;\\ e^x, & x>0.\end{cases}$　　（2）$f(x)=\frac{|x|}{x}$．

§1－3　极限的运算

一、极限的四则运算

定理 1.3　设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则

（1）$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$；

（2）$\lim\limits_{x\to x_0}C\cdot f(x)=C\cdot\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=CA$（$C$ 为常数）；

（3）$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\cdot B$；

（4）$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\frac{A}{B}$（$B\neq 0$）．

说明：

（1）上述运算法则对于 $x\to\infty$ 时的情形也是成立的；而且法则（1）与（3）可以推广到有限个具有极限的函数的情形．

（2）由于数列可以看作定义在正整数集上并依次取值的函数，所以数列极限可以看作是一种特殊的函数极限．因此，对于数列极限也是有类似的四则运算法则．

例 1　求 $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2x-3)$．

解　$\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2x-3)=\lim\limits_{x\to 1}x^2+\lim\limits_{x\to 1}2x-\lim\limits_{x\to 1}3$

$$=\lim_{x\to 1}x^2+2\lim_{x\to 1}x-\lim_{x\to 1}3$$
$$=1+2\times 1-3=0$$

例 2 求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x+2}{x-1}$.

解 $$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-3x+2}{x-1}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(2x^2-3x+2)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-1)}$$
$$=\frac{2\lim\limits_{x\to 2}x^2-3\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}2}{\lim\limits_{x\to 2}x-\lim\limits_{x\to 2}1}$$
$$=\frac{2\times 4-3\times 2+2}{2-1}=4$$

例 3 求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}$.

解 因为当 $x\to 2$ 时,分母的极限为零,所以不能直接用法则(4).因为在 $x\to 2$ 的过程中,$x-2\neq 0$,所以

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+1)=3$$

例 4 求 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

解 因为当 $x\to 1$ 时,$\dfrac{1}{1-x}$与$\dfrac{1}{1-x^3}$的极限都不存在,所以不能直接应用法则(1)计算,应先通分,进行适当的变形,然后用相应的法则来计算.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1+x+x^2-3}{1-x^3}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{1-x^3}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{-(x+2)}{1+x+x^2}=-\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x+2)}{\lim\limits_{x\to 1}(1+x+x^2)}=-1$$

例 5 求下列函数极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x-5}{4x^2+x+2}$;　　　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-3}{3x^3-2x^2-1}$.

解 (1) 因为当 $x\to\infty$时,分子、分母的极限都不存在,所以不能直接应用法则(4).可先用 x^2 同除分子、分母,然后再求极限.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x-5}{4x^2+x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}}{4+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}=\frac{3-0-0}{4+0+0}=\frac{3}{4}$$

(2) 不能直接应用法则(4).先用 x^3 同除分子、分母,然后再求极限.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-3}{3x^3-2x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}}{3-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^3}\right)}=\frac{0+0-0}{3-0-0}=0$$

例 6 设无穷等比数列$\{a_n\}$的首项为 a_1,公比 q 满足$|q|<1$,求数列$\{a_n\}$的所有项之和 S.

解 设数列$\{a_n\}$的前 n 项的和为S_n,由等比数列的前 n 项和公式可得:

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

所以　$S=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$