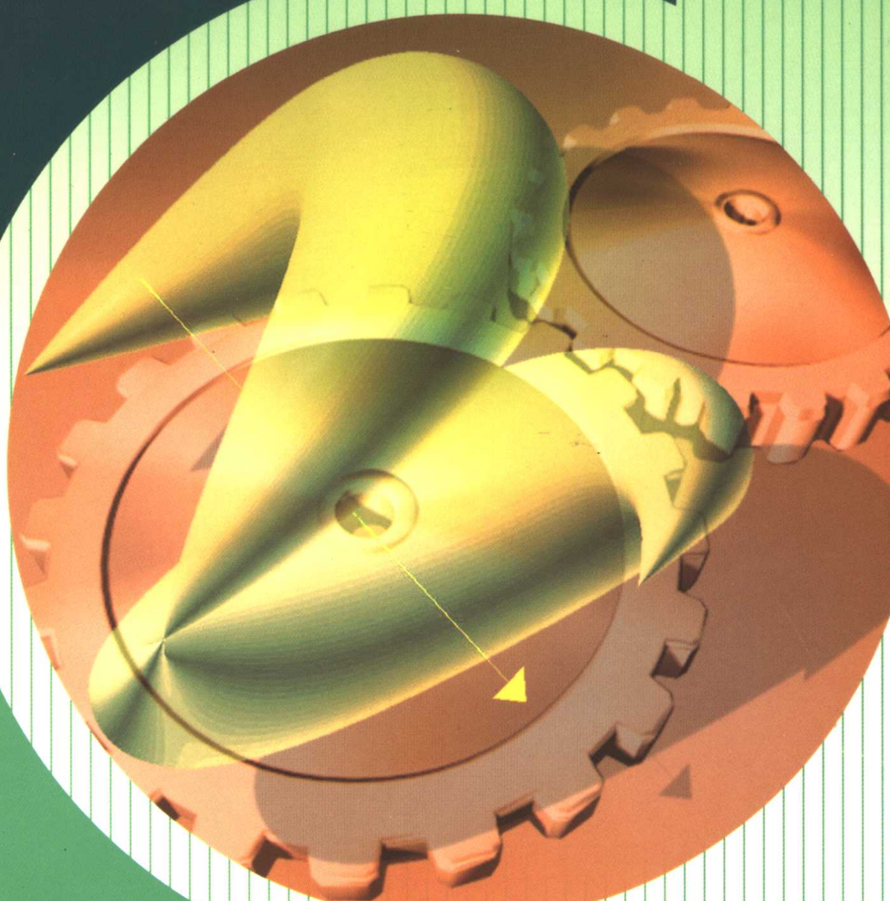
银领工程

高等职业教育应用型人才培养培训工程系列教材

机械类高等数学

邵汉强 主编

组冠兴 罗湖英 副主编



高等教育出版社
Higher Education Press

银领工程

高等职业教育应用型人才培养培训工程系列教材

机械类高等数学

邵汉强 主编

俎冠兴 罗湖英 副主编

高等教育出版社

内容提要

本书是根据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，由中国职业技术教育学会教学工作委员会数学教学研究会（高职）牵头，经过对全国数百所高职高专院校机械类专业数学课程开设情况进行书面调研及组织三次专题研讨会的基础上编写而成的。

本书从概念的引入到内容的选择，从例题的确定到实际数学模型的求解，都体现出了浓厚的专业特色；突破了传统的大学数学教材的编写方法和体系，考虑了技能型人才培养的要求；做到了和机械类专业技能型人才培养的需要相衔接，与我国目前高职高专学生的实际数学水平相衔接。

全书内容包括函数、极限与连续、导数与微分及其应用，不定积分、定积分及其应用，常微分方程、向量与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、数学软件包等。书后附习题答案、参考书目等内容。

本书可作为高等职业院校、本科院校举办的二级职业技术学院、成人高等学校机电一体化、机械设计与制造、自动化、数控技术等工科专业的高等数学教材，也可供相关科技人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

机械类高等数学／邵汉强主编，—北京：高等教育出版社，2006.7

ISBN 7-04-018934-8

Ⅰ．机…　Ⅱ．①邵…　Ⅲ．高等数学-高等学校：技术学校-教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 057787 号

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	化学工业出版社印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092　1/16	**版　　次**	2006 年 7 月第 1 版
印　　张	26	**印　　次**	2006 年 7 月第 1 次印刷
字　　数	640 000	**定　　价**	29.70 元

物料号　18934-00

出版说明

为了认真贯彻《国务院关于大力推进职业教育改革与发展的决定》，落实《2003—2007年教育振兴行动计划》，缓解国内劳动力市场技能型人才紧缺现状，为我国走新型工业化道路服务，自2001年10月以来，教育部在永州、武汉和无锡连续三次召开全国高等职业教育产学研经验交流会，明确了高等职业教育要"以服务为宗旨，以就业为导向，走产学研结合的发展道路"，同时明确了高等职业教育的主要任务是培养高技能人才。这类人才，既要能动脑，更要能动手，他们既不是白领，也不是蓝领，而是应用型白领，是"银领"。从而为我国高等职业教育的进一步发展指明了方向。

培养目标的变化直接带来了高等职业教育办学宗旨、教学内容与课程体系、教学方法与手段、教学管理等诸多方面的改变。与之相应，也产生了若干值得关注与研究的新课题。对此，我们组织有关高等职业院校进行了多次探讨，并从中遴选出一些较为成熟的成果，组织编写了"银领工程"丛书。本丛书围绕培养符合社会主义市场经济和全面建设小康社会发展要求的"银领"人才的这一宗旨，结合最新的教改成果，反映了最新的职业教育工作思路和发展方向，有益于巩固并更好地推广这些经验和成果，很值得广大高等职业院校借鉴。我们的这一想法和做法也得到了教育部领导的肯定，教育部副部长吴启迪专门为首批"银领工程"丛书提笔作序。

我社出版的高等职业教育各专业领域技能型人才培养培训工程系列教材也将陆续纳入"银领工程"丛书系列。

"银领工程"丛书适用于高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院、继续教育学院和民办高校使用。

高等教育出版社

2006年5月

前　言

高等数学课程是高等职业教育各类专业必修的重要基础课和工具课。它对培养学生的理性思维、科学精神、治学态度以及用数学解决实际问题的能力都有着非常重要的作用。为了适应高等职业教育快速发展的需要，真正落实高等职业教育的培养目标，根据高等职业教育数学教学的特点和需求，为满足高等职业教育机械类、电类、信息类、经济管理类各专业对数学教学的需要，在高等教育出版社的委托下，由中国职业技术教育学会教学工作委员会数学教学研究会(高职)主任侯风波教授牵头，按整体建设的思路，对高等数学课程进行了为期二年的研究与建设。2004年8月，研究会在湖南岳阳召开了第一次会议，启动了高职数学课程教学现状的研究工作，总结了高职数学课程改革所取得的成绩及存在的问题，成立了高职数学课程教材编委会；2005年1月，研究会在江苏无锡召开了第二次会议，按机械、电、信息、经管等专业大类分别研讨了高职数学课程整体建设思路；2005年4月，研究会在上海召开了第三次会议，讨论确定了上述四个专业大类高等数学课程教学基本要求、教学大纲、教学日历、教材编写大纲等16个教学文件，并确定根据上述16个文件按机械、电、信息、经管四个专业大类进行高等数学教材的编写工作，并进行了编写任务的分工；2005年10月，研究会在承德召开了四本书的审稿交流会议，确定了本套教材的主编、副主编等人选。由中国职业技术教育学会教学工作委员会数学教学研究会(高职)组织编写的这套教材包含《机械类高等数学》、《电类高等数学》、《信息类高等数学》、《经管类高等数学》及与之配套的电子教案、试题库、助学课件等教学资料，给高等职业教育机械、电、信息、经管等专业大类的数学课程教学提供了较为完整的教学解决方案。本书即为其中之一。本书在编写过程中力求体现如下特点：

1. 按照教学的基本要求，在不破坏数学本身体系的前提下，充分考虑高职高专教育特点和目前的教育实际，以“必需”、“够用”为度。

2. 努力体现机电类高职高专教材的专业特色。从概念的引入到内容的选择，从例题的确定到实际数学模型的求解都力求体现出专业特色。

3. 在讲清基本概念、基本方法的基础上，降低了本课程理论推导的难度，力求低起点、通俗易懂。每小节除了思考题、练习题之外还安排了自测题，便于学生理解、掌握和巩固知识。

4. 在中国职业技术教育学会教育工作委员会高职高专数学研究会的指导下，确立本教材编写的指导思想是：一个突破——突破传统的大学数学教材的编写方法和体系，考虑技能型人才培养的要求。两个衔接——和机电类专业技能型人才培养的需要相衔接、和我国目前高职高专学生的实际数学水平相衔接，突出应用。

全书内容包括函数、极限与连续、导数与微分及其应用，不定积分、定积分及其应用，常微分方程、向量与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、数学软件包等。书后附习题答案、参考书目等内容。

本书可作为高等职业学校、高等专科学校、职业技术学院、成人高等学校等工科类院校的机

电一体化、机械设计与制造、自动化、数控技术等工科专业的高等数学教材。

本书建议基本教学时数为72～120学时，标有*号的内容为选学内容。

参加本书编写的有无锡工艺职业技术学院邵汉强（第1、2章）、陈震（第3章），山东工业职业学院俎冠兴（第4、5章），河北农业大学水产学院罗湖英（第8、9章），吉林交通职业技术学院赵堺（第6章）、张振山（第7章），济南铁道职业技术学院郑琦（第10、11章）、严树国（第12、13章），承德石油高等专科学校李仁芮（第14章）。全书的框架结构由承德石油高等专科学校侯风波教授制定，全书统稿、定稿由邵汉强承担。

中国职业技术教育学会教学工作委员会数学教学研究会（高职）主任侯风波教授和高等教育出版社罗德春、周先海同志，在此书的编写过程中都做了大量的工作，编者对他们表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，时间也比较仓促，书中不当之处在所难免，恳请同仁和读者指正。

编 者

2006年2月

目　录

第一章　绪　　论

高等数学是高职高专机电类专业必修的一门非常重要的基础课，主要包括一元函数微积分学、多元函数微积分学、微分方程、空间解析几何、级数、数学软件包 Matlab 等内容. 其核心内容是微积分.

本章主要对微积分的产生与发展，微积分的研究对象与方法，如何学好高等数学等作简要的介绍.

第一节　高等数学的作用和意义

"紧接着函数概念的采用，产生了微积分，它是继 Euclid 几何之后，全部数学中的一个最伟大的创造."(《古今数学思想》第二册 p17)

一、高等数学的发展过程

1. 古代微积分思想溯源

微积分的思想方法，可以追溯到古代. 我国古代《庄子》第 33 篇"天下篇"中就包含很多数学道理，在学术上很有价值. 例如："至大无外，谓之大一；至小无内，谓之小一.""大一"相当于我们的无穷大，"小一"就相当于无穷小. 整句话的意思可以翻译为：至大就是没有边界的，这叫无穷大；至小是没有内部的，这叫无穷小. 又如在讲数列时经常被引用的，人们所熟悉的"一尺之棰，日取其半，万世不竭"的数列极限思想. 意思就是：一尺长的棍子，第一天取去一半，第二天取去剩下的一半，以后每天都取去剩下的一半，这样永远也取不尽. 用数列的语言来描述，就是：对于数列

$$\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$$

当 $n\to\infty$ 时，尽管 $\frac{1}{2^n}\to 0$，但总有 $\frac{1}{2^n}\neq 0$.

再如，刘徽的"割圆术"，用圆内接多边形的面积去逼近圆面积，也是极限思想的萌芽. 这与古希腊诡辩学派的成员安提丰提出的"穷竭法"是一样的意思，他认为，对圆求积问题，先作圆内接正方形，然后边数成倍增加，得内接正八边形、正十六边形、正三十二边形……. 他深信这样继续下去最后的正多边形必与圆周相合. 也就是多边形与圆的"差"必会"穷竭"，于是便可以化圆为方了. 安提丰的结论虽然是错误的，但提出了一种求圆面积的近似方法.

希腊诡辩学派哲学家芝诺提出的最著名的悖论"追兔说". 他说，阿基里斯（希腊神话中跑如飞的英雄）追乌龟，永远追不上. 比方说，阿基里斯的速度是龟的 10 倍，龟在前面 100 米，当阿基

里斯跑了 100 米到达龟的出发点时,龟已经前进了 10 米;阿基里斯再追 10 米,龟又前进了 1 米;阿基里斯再追 1 米,龟又前进了 1/10 米,这样永远相隔一小段距离,所以总也追不上. 芝诺并不是真的认为阿氏追不上龟,问题是他和当时的很多学者都不知道何时才能追上龟(作为思考题,请大家思考一下此问题,即兔子何时追上龟).

微积分问题至少被 17 世纪十几位最大的数学家和几十位小一些的数学家探索过. 位于他们全部贡献的顶峰是牛顿和莱布尼茨的成就.

2. 微积分的形成与发展

恩格斯曾讲过:“微积分是由牛顿和莱布尼茨大体上完成的,但不是由他们发明的.”

从距离(作为时间的函数)求瞬时速度的问题及其逆问题提出后,不久就被看出是计算一个变量对另一个变量的变化率的问题及其逆问题,较为典型的问题是求曲线的切线问题和求变速直线运动物体的瞬时速度等问题.

下面我们从两位大师的研究工作来体会一下微积分的产生与发展.

牛顿(Newton)的工作

数学和科学的巨大进展,几乎总是建立在几百年中作出一点一滴贡献的许多人的工作之上的. 需要有一个人来走那最高和最后一步,在微积分中,这个人就是牛顿.

1669 年,牛顿在《运用无穷多项方程的分析学》一书中利用“瞬”(用 0 表示),即现在的无穷小的思想,不仅给出了求一个变量对于另一个变量的瞬时变化率的普遍方法,而且证明了面积可以由求变化率的逆过程得到. 这就是我们后面要讲的微积分基本定理.

1671 年,他在《流数法和无穷级数》一书中更用“流”(即变量)与“流数”(即变化率)的概念清楚地陈述了微积分的基本问题,已知两个流之间的关系,求它们的流数之间的关系,以及它的逆问题.

1676 年,完成论文《求曲边形的面积》,之后完成了一本包括微积分在内的巨著《自然哲学的数学原理》.

莱布尼茨(Leibniz)的工作

在微积分建立中,和牛顿并列在一起的是莱布尼茨,虽然他们的贡献是完全不同的.

莱布尼茨从 1684 年起发表微积分论文,而他在 1673 年左右就看到,求曲线的正问题和反问题的重要性,他完全相信反问题等价于通过求和来求面积和体积.

1675 年,他的手稿中已经出现了现代微积分中完全一致的结论

$$\frac{y^2}{2}=\int\left\{\int \mathrm{d}y\right\}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\int y\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x};\ \int x\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x^2}{2}.$$

经过牛顿和莱布尼茨的工作,将微积分算术化,即在代数的概念上建立微积分,使微积分成为一门独立的科学,用来处理较前更为广泛的问题. 而另一个极端重要的贡献是把面积、体积及其他以前作和来处理的问题归并到反微分. 因此,四个主要问题——速率、切线、最大(小)值、求和——全部归结为微分和反微分.

而继牛顿、莱布尼茨之后的微积分,主要是完善、系统化一些概念和具体的积分方法,扩展微积分的主要内容. 如一元函数和多元函数的概念、微分和积分的技巧、微积分的逻辑基础等. 并由此产生了数学的一些主要分支,如微分方程、无穷级数、微分几何、复变函数等等.

二、微积分研究的几类科学问题及方法

微积分的创立是为了处理17世纪主要的四类科学问题.

第一类是:已知物体的移动的距离表为时间的函数公式,求物体在任意时刻的速度和加速度;反之,已知物体的加速度表为时间的函数的公式,求速度和距离.

例1.1　设在自由落体运动中,不计空气阻力的作用,物体下落的距离与时间 t 的函数关系为:

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

求物体的运动速度.其中 g 为重力加速度.

本问题的难点是物体运动的速度是随着时间而变化的,而用公式:

$$\text{速度}=\frac{\text{路程}}{\text{时间}}=\frac{s}{t}$$

求出的是时间 t 内的平均速度,而不是瞬时速度.为了解决此问题,我们作如下处理:
设时刻 t_0 的速度 v_0,然后在 t_0 处考察一很小时间间隔 Δt 内的平均速度(如图1.1所示),在 Δt 时间段内,速度近似看成不变,即近似看成是匀速的.

$$\Delta s=\frac{1}{2}g(t_0-\Delta t)^2-\frac{1}{2}gt_0^2=gt_0\cdot\Delta t+\frac{1}{2}g(\Delta t)^2,$$

$$v_0\approx\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{gt_0\cdot\Delta t+\frac{1}{2}g(\Delta t)^2}{\Delta t}=gt_0+\frac{1}{2}g\Delta t.$$

应当指出,用 $\bar{v}$ 代替 v_0 只是近似值,近似程度的好坏取决于 Δt 的大小,Δt 越小,近似程度就越好.由此请同学们设想:当 Δt 越来越小时,精确程度肯定越来越高,那么当 $\Delta t\to 0$(即 Δt 无限地趋近于0)时,$\bar{v}$ 将无限接近于一个确定的常数 gt_0 就应该是瞬时速度 v_0,即

$$v_0=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(gt_0+\frac{1}{2}g\Delta t\right)=gt_0.$$

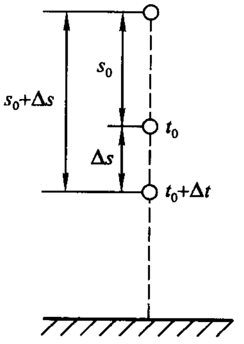


图1.1

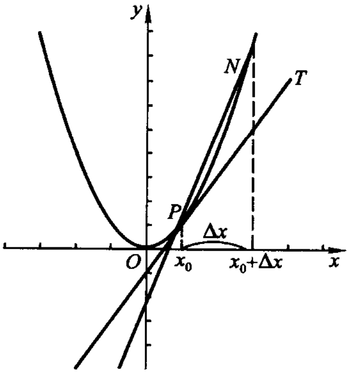


图1.2

这就得出了物理中已知的一个公式:自由落体在任意时刻 t_0 的瞬时速度. $v_t=gt$.

第二类问题是：求曲线的切线.

例 1.2 求抛物线 $y=x^2$ 上 $x=x_0$ 处的切线.

解 要求切线 PT，先作割线 PN，设 N 点的横坐标为 $x_0+\Delta x$，当 N 点沿着曲线越来越接近 P 点时可以近似用割线 PN 代替切线 PT，当 N 点无限接近 P 点时，割线 PN 的极限位置，应该就是切线 PT. 而 N 无限接近 P 的过程就是 $\Delta x \to 0$ 的过程（图 1.2）.

割线 PN：$y=2x_0x-x_0^2+(x-x_0)\Delta x$.

当 $N\to P$，即 $\Delta x\to 0$ 时，

切线 PT：$y=2x_0x-x_0^2$.

例如 $x_0=1$ 时，抛物线 $y=x^2$ 上点 $(1,1)$ 处的切线为：

$$y=2x-1.$$

第三类问题是：求函数的最大值与最小值. 炮弹在炮筒里射出，它的射程依赖于炮筒对地面的倾斜角，即发射角. 一个"实际"的问题是求能获得最大射程的发射角. 17 世纪初期，伽利略断定（在真空中）最大射程在发射角是 45°时达到；他还得到了炮弹从各个不同角度发射后所达到的不同最大高度.

第四类问题是：求曲线长（如行星在已知时期中移动的距离）；曲线围成的面积；曲面围成的体积；物体的重心；一个体积相当大的物体（例如行星）作用于另一个物体上的引力.

例 1.3 求图 1.3 中由抛物线 $y=x^2$，$x=1$ 及 ox 轴围成的平面图形的面积 S.

解 由于有一边是曲线，面积不能用已知的公式来计算，因为我们面临的是"曲与直"的矛盾. 为了解决这一矛盾，我们把 x 轴上从 0 到 1 分成 n 等份，然后再从所有分点作 x 轴的垂线，将整个平面图形分成了很多窄的"曲边梯形"（有一边是曲线的"梯形"），各分点横坐标为：

$$0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\frac{3}{n},\cdots,\frac{n-1}{n},\frac{n}{n}=1,$$

各个小曲边梯形的底长为：

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2,\left(\frac{2}{n}\right)^2,\left(\frac{3}{n}\right)^2,\left(\frac{4}{n}\right)^2,\cdots,\left(\frac{n-1}{n}\right)^2,\left(\frac{n}{n}\right)^2.$$

在各个小曲边梯形上，以左边为长，作小矩形（如图 1.3 所示）. 各小矩形面积为：

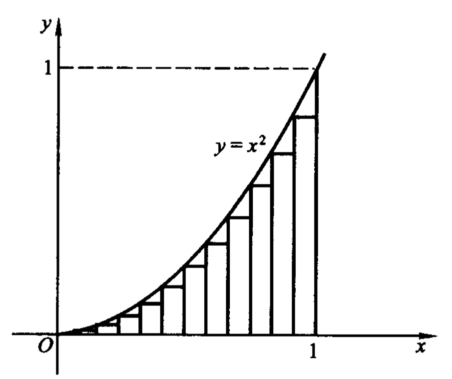


图 1.3

$$0,\left(\frac{1}{n}\right)^2\frac{1}{n},\left(\frac{2}{n}\right)^2\frac{1}{n},\left(\frac{3}{n}\right)^2\frac{1}{n},\cdots,\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\frac{1}{n},$$

各小矩形面积之和为：

$$S_n=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2^2}{n^2}+\frac{3^2}{n^2}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^2}\right)$$
$$=\frac{1}{n^3}\ \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right).$$

用 S_n 近似代替 S，应当说近似程度的好坏完全取决于 n 的大小，分得越细，即 n 越大，精确程度就越好，当 $n\to\infty$ 时，则 $S_n\to S$，而