



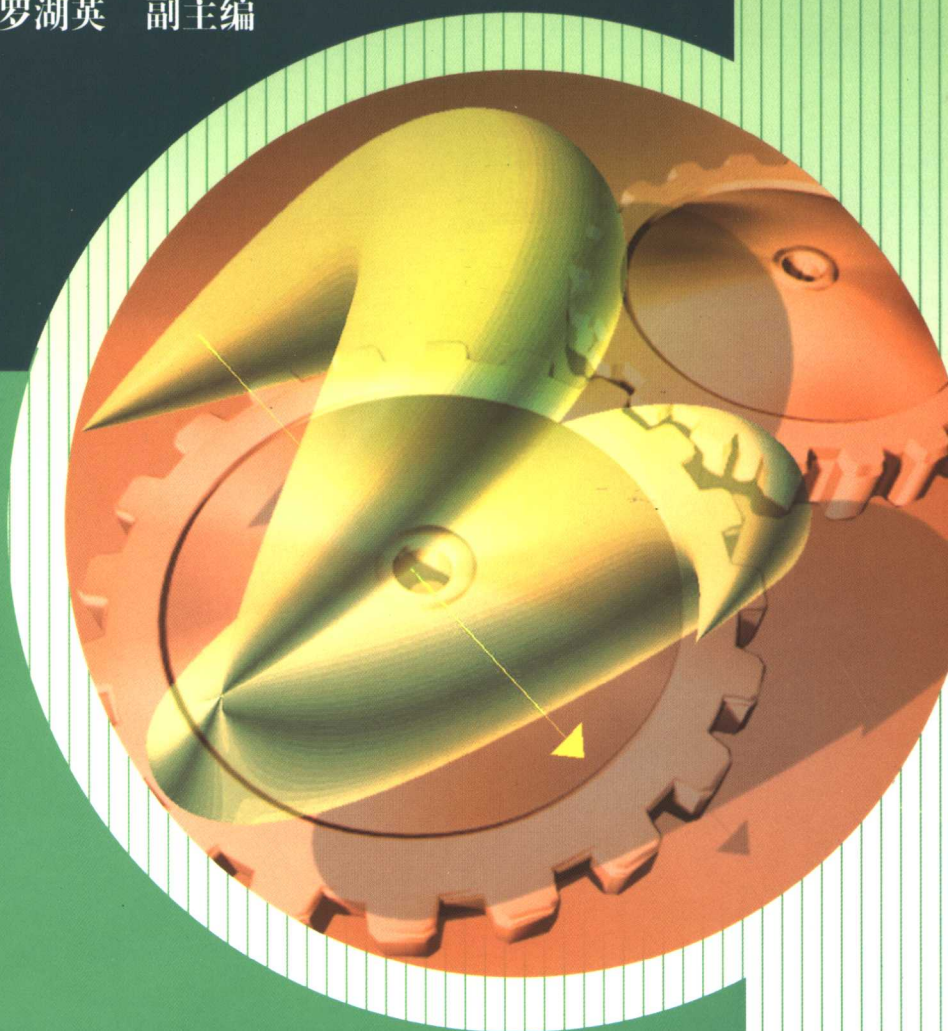
银领工程

高等职业教育应用型人才培养培训工程系列教材

机械类 高等数学

■ 邵汉强 主编

■ 俎冠兴 罗湖英 副主编



高等教育出版社
Higher Education Press

银领工程

高等职业教育应用型人才培养培训工程系列教材

机械类高等数学

邵汉强 主编

俎冠兴 罗湖英 副主编

高等教育出版社

内容提要

本书是根据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》,由中国职业技术教育学会教学工作委员会数学教学研究会(高职)牵头,经过对全国数百所高职高专院校机械类专业数学课程开设情况进行书面调研及组织三次专题研讨会的基础上编写而成的。

本书从概念的引入到内容的选择,从例题的确定到实际数学模型的求解,都体现出了浓厚的专业特色;突破了传统的大学数学教材的编写方法和体系,考虑了技能型人才培养的要求;做到了和机械类专业技能型人才培养的需要相衔接,与我国目前高职高专学生的实际数学水平相衔接。

全书内容包括函数、极限与连续、导数与微分及其应用,不定积分、定积分及其应用,常微分方程、向量与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、数学软件包等。书后附习题答案、参考书目等内容。

本书可作为高等职业院校、本科院校举办的二级职业技术学院、成人高等学校机电一体化、机械设计与制造、自动化、数控技术等工科专业的高等数学教材,也可供相关科技人员参考。

高等职业教育应用型人才培养培训工程系列教材编委会

主 任 侯风波

副主任 彭奇林

委 员 邵汉强 崔西玲 王仲英 张金河

图书在版编目(CIP)数据

机械类高等数学/邵汉强主编,一北京:高等教育出版社,2006.7

ISBN 7-04-018934-8

I. 机... II. ①邵... III. 高等数学-高等学校:技术学校-教材 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 057787 号

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100011
总 机 010-58581000

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 化学工业出版社印刷厂

购书热线 010-58581118
免费咨询 800-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
畅想教育 <http://www.widedu.com>

开 本 787×1092 1/16
印 张 26
字 数 640 000

版 次 2006 年 7 月第 1 版
印 次 2006 年 7 月第 1 次印刷
定 价 29.70 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 18934-00

出版说明

为了认真贯彻《国务院关于大力推进职业教育改革与发展的决定》，落实《2003—2007 年教育振兴行动计划》，缓解国内劳动力市场技能型人才紧缺现状，为我国走新型工业化道路服务，自 2001 年 10 月以来，教育部在永州、武汉和无锡连续三次召开全国高等职业教育产学研经验交流会，明确了高等职业教育要“以服务为宗旨，以就业为导向，走产学研结合的发展道路”，同时明确了高等职业教育的主要任务是培养高技能人才。这类人才，既要能动脑，更要能动手，他们既不是白领，也不是蓝领，而是应用型白领，是“银领”。从而为我国高等职业教育的进一步发展指明了方向。

培养目标的变化直接带来了高等职业教育办学宗旨、教学内容与课程体系、教学方法与手段、教学管理等诸多方面的改变。与之相应，也产生了若干值得关注与研究的新课题。对此，我们组织有关高等职业院校进行了多次探讨，并从中遴选出一些较为成熟的成果，组织编写了“银领工程”丛书。本丛书围绕培养符合社会主义市场经济和全面建设小康社会发展要求的“银领”人才的这一宗旨，结合最新的教改成果，反映了最新的职业教育工作思路和发展方向，有益于巩固并更好地推广这些经验和成果，很值得广大高等职业院校借鉴。我们的这一想法和做法也得到了教育部领导的肯定，教育部副部长吴启迪专门为首批“银领工程”丛书提笔作序。

我社出版的高等职业教育各专业领域技能型人才培养培训工程系列教材也将陆续纳入“银领工程”丛书系列。

“银领工程”丛书适用于高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院、继续教育学院和民办高校使用。

高等教育出版社

2006 年 5 月

前 言

高等数学课程是高等职业教育各类专业必修的重要基础课和工具课。它对培养学生的理性思维、科学精神、治学态度以及用数学解决实际问题的能力都有着非常重要的作用。为了适应高等职业教育快速发展的需要,真正落实高等职业教育的培养目标,根据高等职业教育数学教学的特点和需求,为满足高等职业教育机械类、电类、信息类、经济管理类各专业对数学教学的需要,在高等教育出版社的委托下,由中国职业技术教育学会教学工作委员会数学教学研究会(高职)主任侯风波教授牵头,按整体建设的思路,对高等数学课程进行了为期二年的研究与建设。2004年8月,研究会在湖南岳阳召开了第一次会议,启动了高职数学课程教学现状的研究工作,总结了高职数学课程改革所取得的成绩及存在的问题,成立了高职数学课程教材编委会;2005年1月,研究会在江苏无锡召开了第二次会议,按机械、电、信息、经管等专业大类分别研讨了高职数学课程整体建设思路;2005年4月,研究会在上海召开了第三次会议,讨论确定了上述四个专业大类高等数学课程教学基本要求、教学大纲、教学日历、教材编写大纲等16个教学文件,并确定根据上述16个文件按机械、电、信息、经管四个专业大类进行高等数学教材的编写工作,并进行了编写任务的分工;2005年10月,研究会在承德召开了四本书的审稿交流会议,确定了本套教材的主编、副主编等人选。由中国职业技术教育学会教学工作委员会数学教学研究会(高职)组织编写的这套教材包含《机械类高等数学》、《电类高等数学》、《信息类高等数学》、《经管类高等数学》及与之配套的电子教案、试题库、助学课件等教学资料,给高等职业教育机械、电、信息、经管等专业大类的数学课程教学提供了较为完整的教学解决方案。本书即为其中之一。本书在编写过程中力求体现如下特点:

1. 按照教学的基本要求,在不破坏数学本身体系的前提下,充分考虑高职高专教育特点和目前的教育实际,以“必需”、“够用”为度。
2. 努力体现机电类高职高专教材的专业特色。从概念的引入到内容的选择,从例题的确定到实际数学模型的求解都力求体现出专业特色。
3. 在讲清基本概念、基本方法的基础上,降低了本课程理论推导的难度,力求低起点、通俗易懂。每小节除了思考题、练习题之外还安排了自测题,便于学生理解、掌握和巩固知识。
4. 在中国职业技术教育学会教育工作委员会高职高专数学研究会的指导下,确立本教材编写的指导思想是:一个突破——突破传统的大学数学教材的编写方法和体系,考虑技能型人才培养的要求。两个衔接——和机电类专业技能型人才培养的需要相衔接、和我国目前高职高专学生的实际数学水平相衔接,突出应用。

全书内容包括函数、极限与连续、导数与微分及其应用,不定积分、定积分及其应用,常微分方程、向量与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、数学软件包等。书后附习题答案、参考书目等内容。

本书可作为高等职业学校、高等专科学校、职业技术学院、成人高等学校等工科类院校的机

电一体化、机械设计与制造、自动化、数控技术等工科专业的高等数学教材。

本书建议基本教学时数为 72 ~ 120 学时,标有 * 号的内容为选学内容。

参加本书编写的有无锡工艺职业技术学院邵汉强(第 1、2 章)、陈震(第 3 章),山东工业职业学院俎冠兴(第 4、5 章),河北农业大学水产学院罗湖英(第 8、9 章),吉林交通职业技术学院赵堃(第 6 章)、张振山(第 7 章),济南铁道职业技术学院郑琦(第 10、11 章)、严树国(第 12、13 章),承德石油高等专科学校李仁芮(第 14 章)。全书的框架结构由承德石油高等专科学校侯风波教授制定,全书统稿、定稿由邵汉强承担。

中国职业技术教育学会教学工作委员会数学教学研究会(高职)主任侯风波教授和高等教育出版社罗德春、周先海同志,在此书的编写过程中都做了大量的工作,编者对他们表示衷心的感谢。

由于编者水平有限,时间也比较仓促,书中不当之处在所难免,恳请同仁和读者指正。

编 者

2006 年 2 月

目 录

第一章 绪论	1	第二节 无穷小量与无穷大量	33
第一节 高等数学的作用和意义	1	一、无穷小量	33
一、高等数学的发展过程	1	二、无穷大量	35
二、微积分研究的几类科学问题及方法	3	三、无穷小量与无穷大量的关系	35
第二节 如何学好高等数学	5	思考题 3.2	36
思考题	6	练习题 3.2	36
第二章 函数	7	第三节 两个重要极限	36
第一节 函数的概念	7	一、极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	36
一、函数的概念	7	二、极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	38
二、函数的几种特性	11	思考题 3.3	39
三、分段函数	12	练习题 3.3	39
思考题 2.1	13	第四节 极限的四则运算法则	39
练习题 2.1	13	一、极限的四则运算法则	39
第二节 初等函数	14	二、无穷小的比较	41
一、基本初等函数	14	思考题 3.4	43
二、初等函数	15	练习题 3.4	43
思考题 2.2	16	第五节 函数的连续性	43
练习题 2.2	16	一、函数的连续	43
第三节 函数模型	16	二、函数的间断	45
一、数学模型的概念	17	思考题 3.5	47
二、建立数学模型的过程	18	练习题 3.5	47
三、函数模型及其建立	19	第六节 闭区间上连续函数的性质	47
思考题 2.3	23	一、初等函数的连续性	48
练习题 2.3	23	二、闭区间上连续函数的性质	49
习题二	24	思考题 3.6	50
第三章 极限与连续	27	练习题 3.6	50
第一节 极限的概念	27	习题三	50
一、函数的极限	27	第四章 导数与微分	52
二、极限的性质	32	第一节 导数的概念	52
思考题 3.1	33	一、两个实例	52
练习题 3.1	33		

二、导数与高阶导数的概念	54	举例	79
三、可导与连续	55	思考题 4.7	80
思考题 4.1	56	练习题 4.7	81
练习题 4.1	56	习题四	81
第二节 求导举例与变化率举例	57	第五章 导数的应用	83
一、求导举例	57	第一节 拉格朗日 (Lagrange) 中值	
二、变化率举例	59	定理及函数的单调性	83
思考题 4.2	61	一、拉格朗日中值定理	83
练习题 4.2	61	二、函数的单调性	84
第三节 函数四则运算求导法则	61	思考题 5.1	87
一、函数和、差、积、商的		练习题 5.1	87
求导法则	61	第二节 洛必达 (L'Hospital)	
二、导数的基本公式	64	法则	87
三、高阶导数的运算	64	一、洛必达法则	88
思考题 4.3	65	二、求未定式 $\frac{0}{0}$ 和 $\frac{\infty}{\infty}$ 的极	
练习题 4.3	65	限举例	88
第四节 复合函数的求导法则	65	三、其他类型的未定式	91
一、复合函数的求导法则	65	思考题 5.2	93
二、反函数的求导法则	67	练习题 5.2	93
三、参数方程求导法	68	第三节 函数的极值	94
思考题 4.4	70	一、极值的定义	94
练习题 4.4	70	二、极值的判定	94
第五节 隐函数求导法	71	思考题 5.3	96
一、隐函数求导法	71	练习题 5.3	96
二、对数求导法	73	第四节 函数的最值	97
思考题 4.5	74	一、闭区间上连续函数的最大	
练习题 4.5	74	最小值	97
第六节 微分及其几何意义	75	二、实际问题的最大最小值	97
一、微分的概念	75	思考题 5.4	98
二、微分的几何意义	76	练习题 5.4	98
三、基本初等函数的微分公式		第五节 函数图形的凹向与拐点	99
与微分运算法则	77	一、曲线的凹向及其判别法	99
思考题 4.6	78	二、曲线的拐点	100
练习题 4.6	78	思考题 5.5	101
第七节 微分在近似计算中的		练习题 5.5	102
应用	79	第六节 函数图形的描绘	102
一、用微分做近似计算的理论		一、曲线的渐近线	102
依据	79	二、作函数图形的一般步骤	102
二、微分在近似计算中的应用			

三、函数图形举例	103	思考题 7.1	135
思考题 5.6	104	练习题 7.1	135
练习题 5.6	104	第二节 定积分的性质	135
第七节 曲率	105	一、定积分的性质	135
一、曲率的概念	105	二、利用定积分的几何意义	
二、曲率的计算	107	计算定积分	137
三、曲率圆与曲率半径	108	思考题 7.2	138
四、曲率在机械制造中的应用举		练习题 7.2	138
例	109	第三节 微积分基本公式	138
思考题 5.7	110	一、变上限定积分	139
练习题 5.7	110	二、牛顿(Newton) - 莱布尼茨	
习题五	110	(Leibniz)公式	140
第六章 不定积分	112	思考题 7.3	141
第一节 不定积分的概念及性质	112	练习题 7.3	141
一、原函数	112	第四节 定积分的分部积分公式	142
二、不定积分的概念	113	一、定积分的分部积分公式	142
三、不定积分的性质	114	二、分段函数的定积分	143
思考题 6.1	115	思考题 7.4	143
练习题 6.1	115	练习题 7.4	144
第二节 不定积分的基本积分		第五节 定积分的换元积分法	144
公式	116	一、定积分的换元积分法	144
一、不定积分基本公式	116	二、奇(偶)函数定积分	145
二、凑微分法	117	思考题 7.5	147
思考题 6.2	120	练习题 7.5	147
练习题 6.2	120	第六节 反常积分	147
第三节 不定积分的换元积分法	121	一、积分区间为无穷区间的	
一、换元积分法	121	反常积分	148
二、换元积分法的应用举例	121	二、无界函数的反常积分	149
思考题 6.3	124	思考题 7.6	150
练习题 6.3	124	练习题 7.6	150
第四节 不定积分的分部积分法	125	习题七	151
思考题 6.4	127	第八章 定积分的应用	153
练习题 6.4	128	第一节 用定积分求平面曲线的	
习题六	128	弧长和平面图形的面积	153
第七章 定积分	130	一、定积分应用的微元法	153
第一节 定积分概念	130	二、用定积分求平面曲线的	
一、两个实例	130	弧长	154
二、定积分的定义	132	三、用定积分求平面图形的	
三、定积分的几何意义	133	面积	155

思考题 8.1	158	思考题 9.4	179
练习题 8.1	158	练习题 9.4	179
第二节 平行截面面积为已知的		第五节 二阶常系数齐次线性	
立体的体积	158	微分方程	179
一、用定积分求平行截面面积		一、二阶常系数线性齐次微分	
为已知的立体的体积	158	方程解的性质	179
二、用定积分求旋转体的体积	159	二、二阶常系数线性齐次微分	
思考题 8.2	161	方程的求解方法	180
练习题 8.2	161	思考题 9.5	181
第三节 定积分的物理应用	161	练习题 9.5	181
一、变力做功	161	第六节 二阶常系数线性非齐次	
二、物体质量	162	微分方程的求解方法	181
三、液体压力	164	一、二阶常系数线性非齐次微分	
思考题 8.3	166	方程解的性质	181
练习题 8.3	166	二、二阶常系数线性非齐次微分	
习题八	166	方程的求解方法	182
第九章 常微分方程	168	思考题 9.6	185
第一节 常微分方程的基本概念	168	练习题 9.6	185
一、微分方程的基本概念	168	第七节 拉氏变换的概念	186
二、简单微分方程的建立	169	一、拉氏变换的定义	186
思考题 9.1	170	二、常见函数拉氏变换	186
练习题 9.1	171	思考题 9.7	189
第二节 常微分方程中的变量分		练习题 9.7	189
离法	171	第八节 拉氏变换的性质	189
一、可分离变量的常微分		一、主要性质	189
方程	171	二、其他性质	192
二、分离变量法	172	思考题 9.8	194
思考题 9.2	173	练习题 9.8	194
练习题 9.2	173	第九节 拉氏逆变换	194
第三节 一阶线性微分方程的解法	173	一、拉氏逆变换的定义	194
一、一阶线性微分方程的定义	174	二、拉氏逆变换的性质	194
二、一阶线性微分方程的求解		思考题 9.9	195
方法	174	练习题 9.9	195
思考题 9.3	176	第十节 用拉氏变换解常微分	
练习题 9.3	176	方程	195
第四节 一阶线性微分方程的		一、拉氏变换解常系数线性	
应用	176	微分方程	196
一、求曲线方程	177	二、线性系统传递函数	197
二、机械中的应用	177	思考题 9.10	200

练习题 9.10	200	三、椭圆抛物面	227
习题九	200	四、锥面	228
第十章 向量与空间解析几何	202	思考题 10.6	228
第一节 空间直角坐标系与向量		练习题 10.6	229
的概念	202	第七节 空间曲线	229
一、空间直角坐标系	202	一、空间曲线的一般式方程	229
二、向量的概念	203	二、空间曲线的参数方程	231
三、向量线性运算的几何表示	204	思考题 10.7	232
思考题 10.1	205	练习题 10.7	232
练习题 10.1	205	第八节 空间曲线在坐标面上的	
第二节 向量的坐标表示法及其		投影	233
线性运算	206	一、投影柱面	233
一、向径的坐标表示	206	二、空间曲线在坐标面上的	
二、向量 $\vec{AB}$ 的坐标表示	206	投影	233
三、两点间的距离公式	207	思考题 10.8	235
四、数量积	209	练习题 10.8	235
五、向量积	211	习题十	235
思考题 10.2	214	第十一章 多元函数微分学	238
练习题 10.2	214	第一节 多元函数的极限与连续	238
第三节 平面方程	214	一、平面区域	238
一、平面的点法式方程	214	二、多元函数	240
二、平面的一般式方程	216	三、二元函数的极限	242
思考题 10.3	217	四、二元函数的连续	243
练习题 10.3	217	思考题 11.1	244
第四节 直线方程	218	练习题 11.1	245
一、直线的一般式方程	218	第二节 偏导数	245
二、直线的点向式方程	218	一、二元函数偏导数的概念	246
思考题 10.4	220	二、求偏导举例	248
练习题 10.4	221	三、高阶偏导数	250
第五节 空间曲面的方程	221	思考题 11.2	250
一、空间曲面的一般概念	221	练习题 11.2	251
二、母线平行于坐标轴的柱面	223	第三节 全微分	251
三、以坐标轴为旋转轴的旋转		一、全微分的定义	252
曲面	224	二、全微分计算	254
思考题 10.5	225	三、微分在近似计算中的应用	254
练习题 10.5	226	四、全微分的几何意义	255
第六节 平面截痕法	226	思考题 11.3	255
一、球面	226	练习题 11.3	256
二、椭球面	226	第四节 复合函数的求导法则	256

一、复合函数的求偏导数方法	256	二、在极坐标系下计算二重	
二、隐函数的微分法	261	积分	295
思考题 11.4	262	思考题 12.2	296
练习题 11.4	262	练习题 12.2	297
第五节 多元函数微分法的几何		第三节 二重积分的应用	297
应用	263	一、平面薄板的质量	297
一、曲线的切线	263	二、平面薄板的重心	298
二、曲面的切平面	265	三、平面薄板的转动惯量	299
思考题 11.5	267	练习题 12.3	300
练习题 11.5	267	第四节 对坐标的曲线积分	300
第六节 多元函数极值	268	一、对坐标的曲线积分概念	
一、多元函数极值的概念	268	和性质	301
二、函数极值的求法	268	二、对坐标的曲线积分的计算	302
三、条件极值	270	思考题 12.4	304
思考题 11.6	273	练习题 12.4	304
练习题 11.6	274	第五节 格林公式	305
第七节 多元函数的最大值与		一、格林公式	305
最小值	274	二、对坐标的曲线积分与路径	
一、闭区域上连续的多元函		无关的条件	306
数的最值	274	思考题 12.5	307
二、实际问题中的多元函数		练习题 12.5	307
的最值	275	习题十二	308
思考题 11.7	276	第十三章 无穷级数	310
练习题 11.7	276	第一节 数项级数及其基本性质	310
第八节 最小二乘法	277	一、数项级数的概念	310
一、最小二乘法原理	277	二、数项级数的基本性质	312
二、线性拟合	279	思考题 13.1	313
思考题 11.8	282	练习题 13.1	313
练习题 11.8	282	第二节 正项级数及其敛散性	313
习题十一	283	一、正项级数的意义	313
第十二章 多元函数的积分	286	二、正项级数的比较判别法	314
第一节 二重积分的概念和性质	286	三、正项级数的比值判别法	
一、二重积分的概念	286	(达朗贝尔判别法)	315
二、二重积分的性质	289	思考题 13.2	316
思考题 12.1	290	练习题 13.2	316
练习题 12.1	290	第三节 任意项级数的收敛性	317
第二节 二重积分的计算	291	一、交错级数及其收敛性	317
一、在直角坐标系下计算二		二、绝对收敛与条件收敛	318
重积分	291	思考题 13.3	320

练习题 13.3	320	二、代数运算	339
第四节 幂级数的概念与性质	320	三、系统的帮助	340
一、幂级数的概念	320	四、Notebook 与 Cell	340
二、幂级数的性质	322	五、常用函数	342
思考题 13.4	323	六、变量	343
练习题 13.4	323	七、自定义函数	344
第五节 幂级数的收敛区间及其		八、表	344
收敛半径的求法	323	九、解方程	345
一、幂级数的收敛区间	323	十、Which 语句	346
二、幂级数收敛半径的求法	324	十一、Print 语句	346
思考题 13.5	326	思考题 14.1	346
练习题 13.5	326	练习题 14.1	347
第六节 直接法将函数展开成幂		第二节 用 Mathematica 做高等	
级数	326	数学	347
一、泰勒公式	326	一、用 Mathematica 求极限	347
二、泰勒级数	327	二、用 Mathematica 进行求导运算	348
三、直接法将函数展开成幂级数		三、用 Mathematica 做导数应用题	348
举例	328	四、用 Mathematica 做一元函数的	
思考题 13.6	329	积分	349
练习题 13.6	330	五、用 Mathematica 解常微分方程	349
第七节 间接法将函数展开成幂		六、用 Mathematica 做向量运算和三	
级数	330	维图形	350
一、间接法将函数展开成幂		七、用 Mathematica 求偏导数与多元	
级数	330	函数的极值	351
二、幂级数的应用	332	八、用 Mathematica 计算重积分	352
思考题 13.7	334	九、用 Mathematica 进行级数运算	353
练习题 13.7	334	十、用 Mathematica 做数值计算	354
习题十三	334	思考题 14.2	355
第十四章 数学软件包 Mathematica		练习题 14.2	356
及其应用	336	习题十四	357
第一节 初识数学软件包		附录	358
Mathematica	336	习题答案	358
一、用 Mathematica 做算术运算	336	参考书目	400

第一章 绪 论

高等数学是高职高专机电类专业必修的一门非常重要的基础课,主要包括一元函数微积分学、多元函数微积分学、微分方程、空间解析几何、级数、数学软件包 Matlab 等内容.其核心内容是微积分.

本章主要对微积分的产生与发展,微积分的研究对象与方法,如何学好高等数学等作简要的介绍.

第一节 高等数学的作用和意义

“紧接着函数概念的采用,产生了微积分,它是继 Euclid 几何之后,全部数学中的一个最伟大的创造.”(《古今数学思想》第二册 p17)

一、高等数学的发展过程

1. 古代微积分思想溯源

微积分的思想方法,可以追溯到古代.我国古代《庄子》第 33 篇“天下篇”中就包含很多数学道理,在学术上很有价值.例如:“至大无外,谓之大一;至小无内,谓之小一.”“大一”相当于我们的无穷大,“小一”就相当于无穷小.整句话的意思可以翻译为:至大就是没有边界的,这叫无穷大;至小是没有内部的,这叫无穷小.又如在讲数列时经常被引用的,人们所熟悉的“一尺之棰,日取其半,万世不竭”的数列极限思想.意思就是:一尺长的棍子,第一天取去一半,第二天取去剩下的一半,以后每天都取去剩下的一半,这样永远也取不尽.用数列的语言来描述,就是:对于数列

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时,尽管 $\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$,但总有 $\frac{1}{2^n} \neq 0$.

再如,刘徽的“割圆术”,用圆内接多边形的面积去逼近圆面积,也是极限思想的萌芽.这与古希腊诡辩学派的成员安提丰提出的“穷竭法”是一样的意思,他认为,对圆求积问题,先作圆内接正方形,然后边数成倍增加,得内接正八边形、正十六边形、正三十二边形…….他深信这样继续下去最后的正多边形必与圆周相合.也就是多边形与圆的“差”必会“穷竭”,于是便可以化圆为方了.安提丰的结论虽然是错误的,但提出了一种求圆面积的近似方法.

希腊诡辩学派哲学家芝诺提出的最著名的悖论“追兔说”.他说,阿基里斯(希腊神话中跑如飞的英雄)追乌龟,永远追不上.比方说,阿基里斯的速度是龟的 10 倍,龟在前面 100 米,当阿基

里斯跑了 100 米到达龟的出发点时,龟已经前进了 10 米;阿基里斯再追 10 米,龟又前进了 1 米;阿基里斯再追 1 米,龟又前进了 $1/10$ 米,这样永远相隔一小段距离,所以总也追不上. 芝诺并不是真的认为阿氏追不上龟,问题是他和当时的很多学者都不知道何时才能追上龟(作为思考题,请大家思考一下此问题,即兔子何时追上龟).

微积分问题至少被 17 世纪十几位最大的数学家和几十位小一些的数学家探索过. 位于他们全部贡献的顶峰是牛顿和莱布尼茨的成就.

2. 微积分的形成与发展

恩格斯曾讲过:“微积分是由牛顿和莱布尼茨大体上完成的,但不是由他们发明的.”

从距离(作为时间的函数)求瞬时速度的问题及其逆问题提出后,不久就被看出是计算一个变量对另一个变量的变化率的问题及其逆问题,较为典型的问题是求曲线的切线问题和求变速直线运动物体的瞬时速度等问题.

下面我们从两位大师的研究工作来体会一下微积分的产生与发展.

牛顿(Newton)的工作

数学和科学的巨大进展,几乎总是建立在几百年中作出一点一滴贡献的许多人的工作之上的. 需要有一个人来走那最高和最后一步,在微积分中,这个人就是牛顿.

1669 年,牛顿在《运用无穷多项方程的分析学》一书中利用“瞬”(用 0 表示),即现在的无穷小的思想,不仅给出了求一个变量对于另一个变量的瞬时变化率的普遍方法,而且证明了面积可以由求变化率的逆过程得到. 这就是我们后面要讲的微积分基本定理.

1671 年,他在《流数法和无穷级数》一书中更用“流”(即变量)与“流数”(即变化率)的概念清楚地陈述了微积分的基本问题,已知两个流之间的关系,求它们的流数之间的关系,以及它的逆问题.

1676 年,完成论文《求曲边形的面积》,之后完成了一本包括微积分在内的巨著《自然哲学的数学原理》.

莱布尼茨(Leibniz)的工作

在微积分建立中,和牛顿并列在一起的是莱布尼茨,虽然他们的贡献是完全不同的.

莱布尼茨从 1684 年起发表微积分论文,而他在 1673 年左右就看到,求曲线的正问题和反问题的重要性,他完全相信反问题等价于通过求和来求面积和体积.

1675 年,他的手稿中已经出现了现代微积分中完全一致的结论

$$\frac{y^2}{2} = \int \left\{ \int dy \right\} \frac{dy}{dx} = \int y \frac{dy}{dx}; \int x \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2}.$$

经过牛顿和莱布尼茨的工作,将微积分算术化,即在代数的概念上建立微积分,使微积分成为一门独立的科学,用来处理较前更为广泛的问题. 而另一个极端重要的贡献是把面积、体积及其他以前作和来处理的问题归并到反微分. 因此,四个主要问题——速率、切线、最大(小)值、求和——全部归结为微分和反微分.

而继牛顿、莱布尼茨之后的微积分,主要是完善、系统化一些概念和具体的积分方法,扩展微积分的主要内容. 如一元函数和多元函数的概念、微分和积分的技巧、微积分的逻辑基础等. 并由此产生了数学的一些主要分支,如微分方程、无穷级数、微分几何、复变函数等等.

二、微积分研究的几类科学问题及方法

微积分的创立是为了处理 17 世纪主要的四类科学问题.

第一类是:已知物体的移动的距离表为时间的函数公式,求物体在任意时刻的速度和加速度;反之,已知物体的加速度表为时间的函数的公式,求速度和距离.

例 1.1 设在自由落体运动中,不计空气阻力的作用,物体下落的距离与时间 t 的函数关系为:

$$s = \frac{1}{2}gt^2,$$

求物体的运动速度. 其中 g 为重力加速度.

本问题的难点是物体运动的速度是随着时间而变化的,而用公式:

$$\text{速度} = \frac{\text{路程}}{\text{时间}} = \frac{s}{t}$$

求出的是时间 t 内的平均速度,而不是瞬时速度. 为了解决此问题,我们作如下处理:

设时刻 t_0 的速度 v_0 , 然后在 t_0 处考察一很小时间间隔 Δt 内的平均速度(如图 1.1 所示),在 Δt 时间段内,速度近似看成不变,即近似看成是匀速的.

$$\Delta s = \frac{1}{2}g(t_0 + \Delta t)^2 - \frac{1}{2}gt_0^2 = gt_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2}g(\Delta t)^2,$$

$$v_0 \approx \bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{gt_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2}g(\Delta t)^2}{\Delta t} = gt_0 + \frac{1}{2}g\Delta t.$$

应当指出,用 $\bar{v}$ 代替 v_0 只是近似值,近似程度的好坏取决于 Δt 的大小, Δt 越小,近似程度就越好. 由此请同学们设想:当 Δt 越来越小时,精确程度肯定越来越高,那么当 $\Delta t \rightarrow 0$ (即 Δt 无限地趋近于 0) 时, $\bar{v}$ 将无限接近于一个确定的常数 gt_0 就应该是瞬时速度 v_0 , 即

$$v_0 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(gt_0 + \frac{1}{2}g\Delta t \right) = gt_0.$$

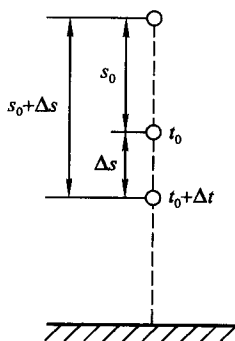


图 1.1

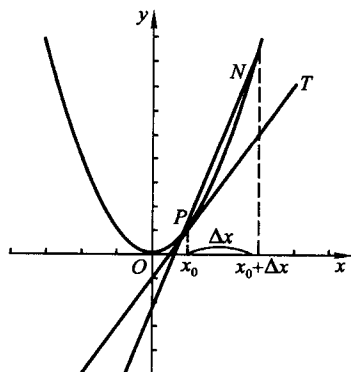


图 1.2

这就得出了物理中已知的一个公式:自由落体在任意时刻 t_0 的瞬时速度. $v_t = gt$.

第二类问题是:求曲线的切线.

例 1.2 求抛物线 $y = x^2$ 上 $x = x_0$ 处的切线.

解 要求切线 PT , 先作割线 PN , 设 N 点的横坐标为 $x_0 + \Delta x$, 当 N 点沿着曲线越来越接近 P 点时可以近似用割线 PN 代替切线 PT , 当 N 点无限接近 P 点时, 割线 PN 的极限位置, 应该就是切线 PT . 而 N 无限接近 P 的过程就是 $\Delta x \rightarrow 0$ 的过程(图 1.2).

割线 $PN: y = 2x_0x - x_0^2 + (x - x_0)\Delta x$.

当 $N \rightarrow P$, 即 $\Delta x \rightarrow 0$ 时,

切线 $PT: y = 2x_0x - x_0^2$.

例如 $x_0 = 1$ 时, 抛物线 $y = x^2$ 上点 $(1, 1)$ 处的切线为:

$$y = 2x - 1.$$

第三类问题是:求函数的最大值与最小值. 炮弹在炮筒里射出, 它的射程依赖于炮筒对地面的倾斜角, 即发射角. 一个“实际”的问题是求能获得最大射程的发射角. 17 世纪初期, 伽利略断定(在真空中)最大射程在发射角是 45° 时达到; 他还得到了炮弹从各个不同角度发射后所达到的不同最大高度.

第四类问题是:求曲线长(如行星在已知时期中移动的距离); 曲线围成的面积; 曲面围成的体积; 物体的重心; 一个体积相当大的物体(例如行星)作用于另一个物体上的引力.

例 1.3 求图 1.3 中由抛物线 $y = x^2$, $x = 1$ 及 ox 轴围成的平面图形的面积 S .

解 由于有一边是曲线, 面积不能用已知的公式来计算, 因为我们面临的是“曲与直”的矛盾. 为了解决这一矛盾, 我们把 x 轴上从 0 到 1 分成 n 等份, 然后再从所有分点作 x 轴的垂线, 将整个平面图形分成了很多窄的“曲边梯形”(有一边是曲线的“梯形”), 各分点横坐标为:

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} = 1,$$

各个小曲边梯形的底长为:

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2, \left(\frac{2}{n}\right)^2, \left(\frac{3}{n}\right)^2, \left(\frac{4}{n}\right)^2, \dots, \left(\frac{n-1}{n}\right)^2, \left(\frac{n}{n}\right)^2.$$

在各个小曲边梯形上, 以左边为长, 作小矩形(如图

1.3 所示). 各小矩形面积为:

$$0, \left(\frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{n}, \left(\frac{2}{n}\right)^2 \frac{1}{n}, \left(\frac{3}{n}\right)^2 \frac{1}{n}, \dots, \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n},$$

各小矩形面积之和为:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \frac{3^2}{n^2} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^2} \right) \\ &= \frac{1}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(2 - \frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

用 S_n 近似代替 S , 应当说近似程度的好坏完全取决于 n 的大小, 分得越细, 即 n 越大, 精确程度就越好, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 则 $S_n \rightarrow S$, 而

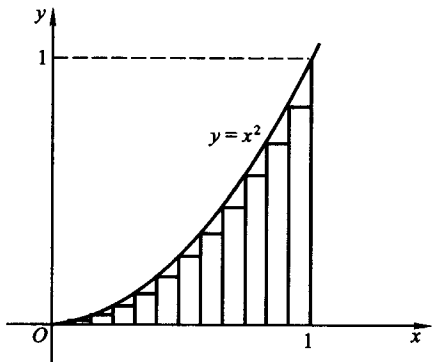


图 1.3