随机过程

杜雪樵　惠　军　编著

SUIJI
GUOCHENG

合肥工业大学出版社

随机过程

杜雪樵　惠　军　编著

合肥工业大学出版社

内容简介

本书介绍了随机过程的基本知识和现代随机过程的部分知识，内容包括随机过程的基本概念、泊松过程、马尔可夫链、平稳过程、离散鞅、布朗运动和伊藤积分等。每章还配有适量的习题，并给出答案或提示。

本书为高等院校理工类研究生和有关专业的本科生教材。经济类、管理类、农林类、医学类等高等院校有关专业的研究生和本科生也可将其选为教材或作为参考用书使用。

图书在版编目(CIP)数据

随机过程/杜雪樵，惠军编著. —合肥:合肥工业大学出版社，2006.1

ISBN 7-81093-386-8

Ⅰ.随… Ⅱ.①杜…②惠… Ⅲ.随机过程-高等学校-教材 Ⅳ.O211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 031608 号

随机过程

编著　杜雪樵　惠军　　　　责任编辑　汤礼广

出　版	合肥工业大学出版社	版　次	2006 年 5 月第 1 版
地　址	合肥市屯溪路 193 号	印　次	2006 年 5 月第 1 次印刷
邮　编	230009	开　本	850×1168　1/32
电　话	总编室:0551-2903038	印　张	7.625
	发行部:0551-2903198	字　数	180 千字
网　址	www.hfutpress.com.cn	发　行	全国新华书店
E-mail	press@hfutpress.com.cn	印　刷	合肥现代印务有限公司

ISBN 7-81093-386-8/O·26　　　　定价:15.00 元

前　言

随机过程是一门应用性很强的数学基础课程。随着科学技术的发展和管理水平的提高,随机过程的基本知识和方法在工程技术、生物医学和金融管理等各个领域的应用越来越广泛。作为当代的大学生和研究生,更需要学习和掌握随机过程的知识。编写本书的目的是为理工类研究生和有关专业的本科生提供一本实用的随机过程教材。

本书是在杜雪樵教授《随机过程》的讲义基础上编写的。该讲义作为研究生教材已在合肥工业大学使用多年。此次出版,我们综合了多年的教学经验和各方面反馈的意见,修改、整理并充实了许多内容,使教材更适合教学需要。

本书可分为两大部分:第一部分为预备知识和随机过程的基本内容(预备知识、第一章至第四章),第二部分为鞅和随机分析的内容(第五章至第六章)。学生学习第一部分内容大约需要 40 个学时,学完全部内容大约需要 60 个学时。

在本书的编写中,我们本着厚基础、重实用的原则,在内容安排和编写上,着重体现以下几个特点:(1)突出教材的工程特色。在选材时,既考虑数学体系本身完整性的要求,更注重实际应用的需要,因此选择了大量与工程相关的例题,突出应用背景和使用方

法。(2)适应金融保险和风险管理的需求。随着经济发展,金融保险对随机过程知识的要求越来越多,本书对与之相关的泊松过程、鞅及伊藤积分均进行了介绍,还将泊松过程专门列为一章。(3)深入浅出。对原来用测度论描述的数学期望、鞅等概念用较"通俗"的数学语言将其表达出来,读者只要掌握了工科大学的高等数学知识和概率论知识就可学习和理解本书的内容。本书每章均配有适量的习题,为方便读者自学,每道习题均附有答案或提示,部分习题还给出了详细解答。

我们在编写本书的过程中得到了合肥工业大学研究生院、理学院的有关领导和教师以及合肥工业大学出版社的领导和编辑的大力支持和无私帮助,在此对他们一并表示感谢。

由于编写时间仓促,书中难免还存有错误之处,敬请读者批评指正。

编著者

2006 年 4 月

目　录

预备知识

随机过程可以视为概率论的动态部分．为了使初等概率和随机过程更好地衔接，本章将对概率论的有关基本概念进行扼要地复习和必要地严格化处理，同时补充了特征函数、条件数学期望和随机变量的收敛性等在工科数学中一般不讲授的内容，为在后面章节学习随机过程做必要的准备．

第一节　概率空间、随机变量和分布

一、概率空间和概率

随机试验是概率论的一个基本概念，试验如果具有如下三个特征：

(1) 在相同条件下可以重复进行，

(2) 每次试验的所有可能结果事先预知，

(3) 每次试验的具体结果不能预先确定，

则称此试验为随机试验，简称为**试验**．

随机试验的所有的不可细分的结果构成的集合称为这个随机试验的**样本空间**，用 Ω 表示．Ω 中的元素 ω 称为**基本事件**或**样本点**．样本空间 Ω 的任何子集 $A,B,C\cdots$ 称为随机**事件**，在不引起误会的条件下简称为事件．通常样本空间 Ω 称为**必然事件**，空集 $\varnothing$ 称为**不可能事件**．

从数学的角度来说，并不是在 Ω 的所有子集上都可以方便地

定义概率；在实际问题中，人们也不是对 Ω 的所有子集都感兴趣，而只关心其中的一部分事件发生的可能性．一般我们仅在满足一定条件的集合所构成的集类上研究概率，为此我们引人 σ-代数的概念．

定义 1　设 Ω 为样本空间，$\mathscr{F}$ 是由 Ω 的某些子集构成的集类，若满足：

(1) $\Omega \in \mathscr{F}$,

(2) 若 $A \in \mathscr{F}$,则 $A^C \in \mathscr{F}$,

(3) 若 $A_n \in \mathscr{F}, n = 1,2,3\cdots$,则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$,

则称 $\mathscr{F}$ 为 σ-代数或 σ 域．由 Ω 和 $\mathscr{F}$ 组成的二元组 $(\Omega,\mathscr{F})$ 称为可测空间，$\mathscr{F}$ 中的元素称为事件．

容易验证，σ-代数对可列次交、并、差等运算封闭；任意个 σ-代数的交依然是 σ-代数．设 $\mathscr{F}_1$ 和 $\mathscr{F}_2$ 均为样本空间 Ω 上的 σ-代数，若 $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2$，则称 $\mathscr{F}_1$ 为 $\mathscr{F}_2$ 的子 σ-代数，亦称 $\mathscr{F}_2$ 较 $\mathscr{F}_1$ 更细（或 $\mathscr{F}_1$ 较 $\mathscr{F}_2$ 更粗）．

例 1　设 Ω 为样本空间，A 为 Ω 的子集，则 $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing,\Omega\}$，$\mathscr{F}_1 = \{\varnothing, A, A^c, \Omega\}$，$\mathscr{F}_2 = \{A: \forall A \in \Omega\}$ 均为样本空间 Ω 上的 σ-代数．且 $\mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2$，事实上 $\mathscr{F}_0$ 为 Ω 上最粗的 σ-代数，而 $\mathscr{F}_2$ 为 Ω 上最细的 σ-代数．

在一般讨论中，通常我们最关心的是包含要研究的对象的最小 σ-代数．若 $\mathscr{A}$ 为样本空间 Ω 的某些子集构成的集类，一切包含 $\mathscr{A}$ 的 σ-代数的交，记为 $\sigma(\mathscr{A})$，称 $\sigma(\mathscr{A})$ 为由 **A 生成的 σ-代数**，显然 **$\sigma(\mathscr{A})$ 是包含 $\mathscr{A}$ 的最小 σ-代数**．

例 2　设 $\Omega = R = (-\infty, +\infty)$，$\mathscr{A} = \{(-\infty, a): -\infty < a < +\infty\}$，则称由 $\mathscr{A}$ 生成的 σ-代数为 R 上的波莱尔(Rorel)σ-代数或波莱尔域，记为 $\mathscr{B}(R)$．类似地可以定义 n 维欧氏空间 R^n 上的波

莱尔 σ-代数 $\mathscr{B}(R^n)$.

定义 2 设$(\Omega,\mathscr{F})$ 为可测空间,$P(\cdot)$ 为一个定义在 $\mathscr{F}$ 上的集函数,若其满足:

(1) $P(A) \geqslant 0, \forall A \in \mathscr{F}$ (非负性),

(2) $P(\Omega) = 1$ (规范性),

(3) 若 $A_i \in \mathscr{F}, i = 1,2,3\cdots$,且 $A_iA_j = \varnothing, \forall i \neq j$,有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \text{ (可列可加性)},$$

则称 P 为可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$ 上的一个**概率测度**,简称为**概率**. 称由 $\Omega,\mathscr{F},P$ 构成的三元组$(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为**概率空间**. 对 $\forall A \in \mathscr{F}$, $P(A)$ 为事件 A 的概率. 如概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$ 的零概集(即概率为零的事件)的每个子集均属于 $\mathscr{F}$,则称此概率空间为**完备的概率空间**.

事件的概率刻画了事件发生的可能性的大小.

由定义,事件的概率有如下基本性质:

(1) $P(\varnothing) = 0$, $P(A^c) = 1 - P(A)$;

(2) 若 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ 互不相容,则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \text{ (有限可加性)};$$

(3) 对 $\forall A \in \mathscr{F}, B \in \mathscr{F}$,成立

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB),$$

$$P(A - B) = P(A) - P(AB);$$

(4) 若 $A \subset B$,则 $P(A) \leqslant P(B)$;

(5) 对 $\forall A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$,有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} P(A_iA_j)$$

$$+ \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} P(A_iA_jA_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\cdots A_n)$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i);$$

(6) 若 $A_n \in \mathscr{F}$ 且 $A_n \uparrow$，即 $A_{n+1} \supset A_n, n \geqslant 1$，设 $A = \bigcup_{n\geqslant 1} A_n$，则

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) \text{（下连续）;}$$

(7) 若 $A_n \in \mathscr{F}$ 且 $A_n \downarrow$，即 $A_n \supset A_{n+1}, n \geqslant 1$，设 $A = \bigcap_{n\geqslant 1} A_n$，则

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) \text{（上连续）.}$$

二、随机变量和分布函数

随机变量是以数量形式来描述随机现象，它将对一般的概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 的讨论转化为对概率空间 $(R,\mathscr{B}(R),\bar{P})$ 的讨论．

定义 3　设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是概率空间，$X(\omega)$ 是定义在 Ω 上的实函数，若对 $\forall a \in R$，有 $\{\omega: X(\omega) \leqslant a\} \in \mathscr{F}$，则称 $X(\omega)$ 为概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的一个**随机变量**，简称为随机变量；称

$$F(x) = P\{\omega: X(\omega) \leqslant x\}, -\infty < x < \infty$$

为随机变量 $X(\omega)$ 的**分布函数**．

注：(i) $\{\omega: X(\omega) \leqslant a\}$ 一般简记为 $\{X \leqslant a\}$，将随机变量 $X(\omega)$ 简记为 X；

(ii) 随机变量 X 为可以取值 ∞ 的实值函数，但必须满足条件：X 几乎处处有限，即 $P\{\omega: X(\omega) = \infty\} = 0$；

(iii) 两个随机变量 X 和 Y，若满足 $P\{\omega: X(\omega) \neq Y(\omega)\} = 0$，

则称随机变量 X、Y 是等价的，某种意义上将它们视为同一个随机变量；

分布函数有如下性质：

(1) 单调不减性：即若 $x < y$，则 $F(x) \leqslant F(y)$；

(2) 右连续性：即对任意 $-\infty < x < +\infty$，$F(x+0) = F(x)$；

(3) 记 $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x)$，$F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$，则 $F(-\infty) = 0$，$F(+\infty) = 1$.

可以证明，满足上述三个性质的函数，必定是某个随机变量的分布函数.

第二节　数学期望和特征函数

一、随机变量的数学期望

定义 1　设 $F(x)$ 为随机变量 X 的分布函数，若

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \mathrm{d}F(x) < +\infty,$$

则称 $\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{d}F(x)$ 为随机变量 X 的数学期望，记为 $E(X)$，即

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{d}F(x). \tag{2.1}$$

注：定义 1 中的积分为 Riemann－Stieltjes 积分（R－S 积分），相关概念可参阅附录 A.

数学期望，简称为期望或均值.

数学期望有如下常用性质：

(1) 若 a、b 为常数，X、Y 的数学期望存在，则

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y); \tag{2.2}$$

(2) 若 $y = g(x)$ 为可测函数，且 $Y = g(X)$ 也是随机变量（随机变量的函数），则

$$E(Y) = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}F(x). \tag{2.3}$$

将性质(2)中 $g(x)$ 特殊化可以得到随机变量的其他几个数字特征：

令 k 为非负整数，

(1) 设 $g(x) = x^k$，　若$\int_{-\infty}^{+\infty} | x^k | \mathrm{d}F(x) < +\infty$，则 EX^k 为 X 的 k 阶矩；

(2) 设 $g(x) = x^k$，　若$\int_{-\infty}^{+\infty} | x |^k \mathrm{d}F(x) < +\infty$，则 $E | X |^k$ 为 X 的 k 阶绝对矩；

(3) 设 $g(x) = (x - E(X))^k$，　若$\int_{-\infty}^{+\infty} | x - E(X) |^k \mathrm{d}F(x) < +\infty$，则 $E(X - E(X))^K$ 为 X 的 k 阶中心矩．

特别地，$k = 2$ 时，X 的二阶中心矩称为 X 的方差，记为 $D(X)$ 或 $Var(X)$，即

$$D(X) = E(X - E(X))^2. \tag{2.4}$$

对随机向量的情况：$X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 联合分布为 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，同样可以定义相应的概念

$$E(X) = (E(X_1), E(X_2), \cdots, E(X_n)), \tag{2.5}$$

其中 $E(X_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} x_i dF(x_1, x_2 \cdots, x_n)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$.

X 函数的数学期望

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, x_2, \cdots, x_n)\mathrm{d}F(x_1, x_2, \cdots, x_n). \tag{2.6}$$

二、特征函数、矩母函数

随机变量的分布函数完全描述了随机变量的统计规律，但用分布函数处理问题并不容易，因而需要引入更有效的数学工具．其中最常用的是特征函数和矩母函数．

1. 特征函数

定义 2　设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，则称 $f(t)=E(e^{itX})$ 为 X 的**特征函数**，也称为分布函数 $F(x)$ 的特征函数，即

$$f(t)=E(e^{itX})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\,dF(x). \tag{2.7}$$

注：(i) 对 $\forall t\in(-\infty,+\infty)$，$|e^{itx}|=1$，故 $E(e^{itX})$ 总是存在的，即任一随机变量特征函数总是存在的；

(ii) 特征函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为复数，即为定义在实轴上的复值函数．

特征函数有如下性质：

(1) $f(0)=1,\quad |f(t)|\leqslant 1,\quad f(-t)=\overline{f(t)}$；　(2.8)

(2) $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续；

(3) $f(t)$ 是非负定的，即对$\forall$自然数 $n>0$，任给实数 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 及复数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$，一定成立

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f(t_k-t_j)c_k\bar{c}_j\geqslant 0; \tag{2.9}$$

(4) 线性性：对任给常数 a,b，$Y=aX+b$，设 $f_X(t)$，$f_Y(t)$ 为 X、Y 的特征函数，则

$$f_Y(t)=e^{ibt}f_X(at); \tag{2.10}$$

(5) X,Y 为相互独立的随机变量，则 $X+Y$ 的特征函数

$f_{X+Y}(t)$ 和 X,Y 的特征函数 $f_X(t),f_Y(t)$ 满足

$$f_{X+Y}(t) = f_X(t) \cdot f_Y(t); \qquad (2.11)$$

(6) 若随机变量 X 的 n 阶矩存在，则它的特征函数 n 次可微，且对 $\forall 0 \leqslant k \leqslant n$， 有

$$f^{(k)}(0) = i^k E(X^k). \qquad (2.12)$$

下面的定理说明了随机变量的分布函数 $F(x)$ 和特征函数是一一对应的，它保证了我们对分布函数的讨论可以转化为对它的特征函数的讨论．

定理 1 （反演公式）设 X 的分布函数为 $F(x)$，其特征函数为 $f(t)$，则对任意实数 $x_1 < x_2$ 成立

$$\frac{F(x_2+0)+F(x_2-0)}{2} - \frac{F(x_1+0)+F(x_1-0)}{2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-itx_1}-e^{-itx_2}}{it}f(t)\mathrm{d}t \qquad (2.13)$$

由定理 1 我们可以得到下面常用的结论.

定理 2 设特征函数 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积，则它对应的分布函数 $F(x)$ 处处有连续的导数 $p(x)=F'(x)$，且对任意 $x \in (-\infty,+\infty)$，

$$p(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} f(t)\mathrm{d}t. \qquad (2.14)$$

定理 1、定理 2 的证明可参见参考文献[1].

2. 矩母函数

定义 3 随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，称 $E(e^{tX})$ 为 X 的矩母函数，记为 $g(t)$，即

$$g(t)=E(e^{tX})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{tx}\,dF(x). \qquad (2.15)$$

矩母函数刻画了随机变量的许多特征，是研究随机变量分布的主要工具，当随机变量的矩母函数存在时，它唯一地确定了 X 的分布．最直接地可以通过矩母函数 $g(t)$ 很方便地求 X 的各阶矩

$$E(X^k)=g^{(k)}(0) \qquad k\geqslant 1. \qquad (2.16)$$

若 X、Y 相互独立，则 $X+Y$ 的矩母函数满足

$$g_{X+Y}(t)=g_X(t)\cdot g_Y(t). \qquad (2.17)$$

第三节　条件数学期望

条件数学期望是现代概率的重要概念和基础，是建立其他相关概念的出发点和工具．本节将对条件数学期望的概念和符号的记法作一个简单的介绍．

先看离散随机变量 X 和 Y，(X,Y) 的联合分布律为 $P(X=x_i,Y=y_j)=P_{ij}\geqslant 0\ (i,j=1,2,\cdots)$．若

$$P\{Y=y_j\}=\sum_i p_{ij}>0=P_{\cdot j}>0,$$

则给定 $Y=y_j$ 时 X 的条件概率为

$$P\{X=x_i\mid Y=y_j\}=P(X=x_i,Y=y_j)/P(Y=y_j)$$

$$=\frac{P_{ij}}{P_{\cdot j}};$$

则 $Y=y_j$ 时，X 的条件数学期望为

$$E[X\mid Y=y_j]\xlongequal{\Delta}\sum_i x_iP(X=x_i\mid Y=y_j).$$