

## 第1章 追寻数学

数学使思维产生活力。并使思维不受偏见、轻信与迷信的影响与干扰。

——阿尔布斯纳特

社会学家也像其他人一样，惟有从数学才能获得真正科学证明的意识，形成合理和决定性推理的习惯……。为了克服社会科学中的重大困难而接受并运用这种训练，正是社会学家必须向数学寻求的东西。

——A·孔德

数学的目标和意义有三个方面：首先，数学提供了研究自然界的有力工具；其次，数学的研究有重要的哲学意义；再则，数学还有深刻的美学原则。数学的发展充分地激励着哲学家们去探索数量、空间和时间的概念。数学内容的展示能给人们带来种种喜悦，恰如绘画和音乐能够陶冶人们的心情一样。人们还不无惊叹地赞美着数与形的巧妙与和谐的结合，并为那些不断揭示未来世界的新发现而不胜愉快。

——亨利·庞加莱

许多艺术能够美化人们的心灵，但却没有哪一种艺术能比数学更有成效地去美化和修饰人们的心灵。

——毕林斯雷

我们将开始数学之旅。

我们每一个人都和数学相识，但它留给人们的印象是那样的不同。一些人视它如巍峨的高峰；一些人视它如难测的深谷。一些人对之如历春风秋月，感悟万端；一些人对之如临雪雨冰霜，避之千里。它默默地行进着，从不申辩。它已经行进了千年万年，一直在悄悄地护佑着每一个人，赐给人们千万种可触摸的奇花异草，也赐给人们无穷无尽无影无形的思想。它默默地行进着，从不声张从不浮躁更不会喧嚣。春天来了，百花争艳，人们欢喜雀跃，却常常忘了滋养这一切的土地。数学，正是文明的土壤，它默默地在我们的脚下，支撑着我们，无论我们是否看见它，忘了它。

我们忘了它吗？真的忘了它吗？让我们所有的人，都暂时从那吸引我们的五光十色的世界中，从那些浮华的转瞬即逝的诱惑中，停一停脚步，去聆听思想的声音，去感受土地的气息，去追寻那或许已被遗忘了的东西。

## 1.1 数学是什么

人们面对一种事物，总会情不自禁地问：它是什么？性急的人甚至想立刻得到完满的回答。但真正了解一种事物，是在一个过程的后期而不是它的开头。我们提出数学是什么的问题，是要一开始就带着好奇的追问，有耐心逐渐去感悟数学的含意。对“数学”这样的“大词”，想用几句话给它下定义是狂妄的，是不可能的。即便我们试着从不同的侧面去尽力描述，仍会力不从心。

这是面对有丰富内涵的事物时的必然处境。这是困惑、兴奋、探寻相交织的处境。

数学是什么？

有人说它是宇宙的本源（毕达哥拉斯“万物皆数”）；

有人说它是永恒（爱因斯坦“方程是永恒的”）；

有人说它是善（怀特海“数学与善”）。

但是，不少人对它：

望而生畏；

莫测高深；

敬而远之。

同时，又有人对它：

乐此不疲；

流连忘返；

痴迷陶醉。

让我们来听听这些评语：

毕达哥拉斯说：“万物皆数”，“数统治着宇宙。”

伽利略说：“宇宙是永远放在我们面前的一本大书，……这本书是用数学写的，它的符号是三角形、圆和其他图形，不借助于它们就一个字也看不懂，没有它们就只会在黑暗的迷宫中踟蹰。”

培根说：“数学是科学的大门和钥匙。”

德·摩根说：“数学发明创造的动力不是推理，而是想像力的发挥。”

马克思说：“一种科学只有成功地运用数学时，才算真正达到完善的程度。”

罗素说：“数学有一种冷峻而严肃的美，这种美不是投合我们天性的软弱的方面，这种美可以纯净到崇高的地步，能够达到严格的只有最伟大的艺术才能显示的那种完美的境地。”

约翰逊·格伦说：“数学为逻辑提供了一个理想的模型，它的表达是清晰的和准确的，它的结论是确定的，它有着新颖和多种多样的领域，它具有增进力量的抽象性，它具有预言事件的能力，它能间接地度量数量，它有着无限的创造机会……”

E·波莱尔说：“数学是我们确切知道我们在说什么，并肯定我们说的是否对的唯一的一门科学。”

爱因斯坦说：“政治是为当前，而方程是一种永恒的东西。”

康托尔说：“数学的本质就在于它的自由。”

M·克莱因说：“数学不仅是一种方法、一门艺术或一种语言，数学更主要的是一门有

着丰富内容的知识体系，其内容对自然科学家、社会科学家、哲学家、逻辑学家和艺术家十分有用，同时影响着政治家和神学家的学说；满足了人类探索宇宙的好奇心和对美妙音乐的冥想；有时甚至可能以难以察觉到的方式但无可置疑地影响着现代历史的进程。”

……

这些评语和感受同时汇集于数学之上，不能不让我们惊奇与深思。

数学究竟是什么？20世纪的一些智者曾力图给出回答：

罗素与怀特海说是逻辑（《数学原理》）；

布劳威说是直觉（《被直觉的自然数》）；

希尔伯特说是形式的符号与规则（“希尔伯特纲领”）。

但是，20世纪的另一个智者哥德尔证明了，这些理论都是不完备的。不过，我们还是能从各种论说中看到一些共同的东西。

不论哪种数学理论，它们都有一些先在的出发点。我们把它这种出发点称为预设或假设。然后，用该理论的规则和逻辑规则去推演新结论。另一个共同之处是，每一种理论的出发点都清晰简单，推演的过程都严密无误。这种清晰简单的出发点既便于验证又使任何人无所置疑，这种严密的逻辑推理使每一个人不能不信服。所以，数学一开始就建立在超越个人特殊情感的公共理性之上，又借助超越个人判断的客观的逻辑规律来演进。这样，只要符合了预定的前提与条件，经由数学确证了的结论就是有效的。这种结论，在相应的前提与条件下是必然的、必定的、永恒不变的。所以，数学是一门坚固的科学，一门为所有人认同的科学。同时，这种严密的推理，又是人类智慧持续不断的努力，是一种延续千年并将一直延伸的人类智慧的接力。一代人接着前一代人，一个数学家接着另一个数学家，一方面在同一种前提与条件下推出愈来愈多的结论；另一方面又不断地变换前提与条件，开拓新的探索的疆界。因而，数学既有悠长的历史渊源，又是极其广阔极其深邃的。它超越个人的观感与利益，负载人类的精神与理智，向真理的深处探寻。

于是，数学首先让人看到，它超越了任何个人的愿望和喜怒哀乐，它是让人必须遵循的真理。这个鲜明的客观性和永恒性的特点，使得数学不像文学艺术领域那样直接而鲜明地表现出创造者自身的个性；也不像各种自然科学中经常有后人由于新的事实或实验与以前的理论相矛盾，而推翻前人观点的情形。这一点，使一切科学工作者大为叹服，却使部分人文学者敬而远之。部分人甚至认为数学是远离人性的，并嫌物及人地认为数学家就是一种“冰冷的人”。这种误解源于不了解数学，不了解数学工作者，不了解数学研究的过程。事实上，数学既然是人类智力的成果，是人类创造出来的知识体系，是人类智慧的结晶，是绵延千万年的人类智慧的长征，它当然就是人类自身的一部分，是人的历史的一部分，而且是人类历史中最具有连续性和一致性的部分。同时，数学又是每一个数学家的极具个人风格的想像力、创造力和坚韧意志的悲欢离合的故事。无论是整个数学，还是数学家个人的成败都与人类文明的境况有深刻的关系。数学是人的活动，而不是天外之物。事实上，数学在它的客观与严峻的外表之内，有着活跃的人的魂灵。这尤其表现在一种新概念的获得和一种新的出发点与规则的制定上。所以，康托尔甚至说：“数学的本质是自由”。

就传统的说法，数学研究的是现实世界中的数量关系和空间形式，数学的产生和发展始终围绕着数和形这两个基本概念不断地深化和演变。通常，研究数和它的关系的部分，划为代数学的范畴；研究形和它的关系的部分，划为几何学的范畴。但同时数和形也是相互联系

的有机整体，因而又有研究它们相互关系的领域。

但是，这种对数学内容的传统说法，已远远不能概括今天的数学内容。在继续这一传统的数与形的研究的同时，近当代数学进一步增加了对于各种关系、变换、结构、系统、过程的研究。特别要指出的是，这些关系、变换、结构、系统、过程是针对任何一个领域的，即不只是对数和形，不只包括自然界和工程技术，也是包括人类社会生活的一切其他领域（经济、法律、政治、军事、历史，以至体育、艺术、文学、美学、语言学、心理学、社会学、哲学，等等）的关系、变换、结构、系统、过程。正因为这样，近当代数学极大地扩展了数学的研究范围与应用范围。哪里有质和量，哪里有数和形，哪里有关系、变换、结构、系统、过程，哪里就有数学的用武之地。人们认为数学就是研究“数”的这一传统认识，应该极大地加以改变。指出近当代数学对于一切领域中各种关系、变换、结构、系统、过程的研究，指出这一超出数量关系和空间形式的新内容，是格外重要的，它是使数学深入到每一种人类活动，特别是前所未及的人文领域的原因。

因此，要再次特别强调：今天的数学不是只研究“数”和“形”的，它深入到一切需要智慧与理性的领域，它本身就是智慧与理性的运用与构造。

作为智慧与理性的集中体现的数学，使它必然地具有了抽象性、客观性、真确性、严密性、应用的广泛性这些主要特征。正是数学的研究内容和它的特征使它成为任何科学领域的基础。它既广泛应用于技术工程中，又是研究许多理论科学必不可少的工具，并深刻地影响着人文学科的发展。数学一直是形成现代文化的主要力量，同时又是这种文化极其重要的因素。然而，由于数学具有高度的抽象性，以及深入了解它的困难性，加之通常数学教育只重演算与证明的技能，不重视数学的思想与精神的阐释，因而使一般人或者并不了解数学，或者对数学只有片面的了解。

受学校教育分科的影响，一般人认为数学仅仅是对科学家、工程师才有用的一系列技能。一上大学，文科学生的教学安排就几乎与数学绝缘。这样的教育布局，隐含了数学与高等文科人才无关的错误判断。不少文科学生就在这样的学习中不知不觉地被定格。他们随着岁月的增进，愈益远离了数学，并对这一状况自知但却无所谓，认为这与他们的领域毫无关系。当然，也有部分超越狭隘的学科眼界的文科教师与学生，但他们通常不是多数，还难免被同行视为异类。实质上，这是我国长期的重经学轻科学的封建科举制的社会环境，以及功利主义、工具主义的教育格局所形成的一种心理与文化的惯性。当然，对每个人而言，还有一个最直接的原因：深入了解数学的意义与精神并得到熏陶，是需要一种持久的努力而绝非数日数月可成的；而且它的难度，使作了一定努力的人，也还往往停留在一些计算与公式的使用上。这样，对数学的片面的了解，甚至误解，在很多人那里几乎是不可避免的。改变这一状况，是对教育工作者、数学工作者以及求知者个人的严峻挑战。尽管如此，我们必须面对这一挑战。我们必须尽力去发现、去认知、去说明、去使自己使他人感悟：数学并不只是一系列的公式、运算与证明，数学也并不只是数字与图形；数学的最有价值的部分是它的方法和思想，是对智慧的启迪，是对超越个体的客观真理的确认，是对这种客观真理的永不停息的、愈益深入的探寻。

数学提出的方法与思想是很丰富的，其中渊源甚早而长盛不衰的是公理方法的思想。这种方法包括明确地表述出将要讨论的概念的定义，以及准确地表述出作为推理基础的前提或假设（数学上把这种不加证明的前提或假设称为公理）。具有严密的逻辑思维能力的人从这些

定义和公理出发，按照逻辑规则推导出结论。由于起点的明确清晰，由于推理的合符逻辑，就能确证由前提必然能得到的结论，这种前提与结论之间的关系就一定在这个体系内是合理的。数学的这个特征曾由一位作家这样表述过：“承认一位数学家的最初的原理，那么他由此将会推导出你也必须承认的另一结论，从这一结论又推导出其他的结论，这些结论你也必须承认。”这一方法从数学开始，进一步影响到其他学科。达到如数学一般环环相扣又严密无误的论说，几乎是任何理论梦寐以求的。一个典型的例子是牛顿力学的建立，牛顿对他的奠基之作甚至就直接命名为《自然哲学的数学原理》，其写作形式也深受该方法的影响。今天的各种自然科学都在本学科内探寻一些基本原理，并力图将本学科的种种现象以这些基本原理去系统化，这种努力，明显地打上了公理演绎方法的印记。另一方面，在传统的人文学科中，如笛卡儿、维特根斯坦等的若干哲学著作亦深受此影响。今天，在一些新兴的经济学、语言学、法学、甚至社会学与历史学中，找出最有价值的基本概念与原则，再予以演绎与系统化的方法，已为这些学科增加了新的推动力。数学的思想方法之影响于学术，由此可见。

但是，不少人由于缺乏对数学的深入了解，仅从小学或中学的数学学习体验出发，认为数学不过是一种咬文嚼字写写算算的令人头痛的不得不学的技能，而很少注意或感受到数学在方法与智慧上给我们的启迪。这种狭隘的态度，长时间大范围地存在着。这是长期数学教育的简单片面的方式造成的，也是我们的文化传统轻于理性与逻辑的表现。这种文化环境使人们难于花力气去注意理性与逻辑的深层含义。毫无疑问，数学有它的技能的一面，正如任何学科都有技能的一面。但技能从何处来，什么指导着技能，需要技能来做什么，技能之外还有什么，等等，是更为重要的。这里要特别指出，学习数学的要点不是数学技能而是数学精神，不是学会算几道题，而是学会理性地思考问题，智慧地解决问题。要懂得，数学是一门最需要创造性、灵感和想像力的学科，同时，又要把所有这一切用理智的构造固定下来，而不仅是停留在想像与灵感的阶段。数学的创造力是双重的：既是生动的又是抽象的；既飞扬灵性，又尊崇理性。

是什么在推动数学的研究呢？追求它的动力是什么呢？历史研究表明，最初的数学同人的生存有关，服务于人的生产与生活的需要。这一出于人的生存与发展的现实需要的动力延续至今。看一看吧：工农业生产、商业、工程、科研、金融、通讯、交通、历法、天文、气象、军事，以及许多其他的人类需要，无一不与数学相关，数学能对这些问题的解决起重要的有时甚至是决定性的作用。这些紧迫的现实需要直接地推动着数学的研究。

数学之所以能解决人类社会生活中的各种现实问题，是因为数学能给出自然现象及社会现象的合理结构，并能找出其相互的关联，尤其是能进一步揭示出其中隐含着的规律。数学的概念、方法和结论能深入到自然科学和人文科学的里层，那些学科的成就大小取决于它们与数学结合的程度。数学在看似互不关联的事实中抽象出本质的关系，使其成为紧密联系着的有机体，将一系列彼此分离的观察研究纳入科学的首尾一贯的系统之中。这种对自然与社会的简明而深刻的陈述，使之能高效而准确地解决现实中的问题。

数学研究的另一个动力，来源于人自身的精神需求。面对困难问题的挑战，人的智力总是要不屈地迎战，并在这一过程中展示智慧的力量和感受思维的快乐。其实，每一个人都或多或少地经历过数学家的内心感受。你猜过谜吗？你下过棋吗？你碰到过一时没有答案却必须去寻找答案的问题吗？你凝思过吗？你沉思过吗？是吧，你想过，你总在某件事上运用过你的智慧，并且你还一定想出过结果。那个思考的过程，使你的精神集中，一种心智的张力

推动着你。当百思不得其解，尔后又豁然开朗之时，你感到了多么大的快乐！数学家是谁？那就是更自觉、更持久、更深入地面对种种挑战智慧的难题，千思万思甚至作十年思的人。如果你经历过想半天后才得出结果的惊喜，那你就应该懂得数学何以能使那些最富智力的人倾倒。因为其中有不是半天而是整月整年要人想下去的问题，有作长年之思才得其解的最漫长的快乐。这是智力的攀登，这是智力的长征，这是智力的升华。最富智力的勇者要选择这样的天地，才能表达他对纯思维的强烈兴趣。这种智力的好奇心和运用智力的强烈兴趣，或许是人的一种内在的精神，甚至是一种本能。它不是靠外在的利益来激励的，而是靠思考本身带来的愉悦体验来推动的。

与社会需要没有直接联系的推动数学研究的例子是古希腊的数学大师们，他们把数学转变成了抽象的、演绎的和公理化的纯理论的系统。数学学科中一些最动人的、超越我们感官所及的成就，比如超穷数理论、非欧几何（一种不同于欧几里得几何学的几何体系的简称，一般指罗巴切夫斯基的双曲几何和黎曼的椭圆几何）、哥德尔不完全性定理，等等，都是为了解决纯智力的挑战，而不是为了当前的现实需要。但令人惊异的是，纯智力的成果，会在某一天，以最基本而深刻的方式影响可见的可感的现实。一个突出的例子是，爱因斯坦的相对论，用以描述我们这个宇宙的数学，恰恰离不开非欧几何，并因而才得到了比牛顿更深刻的发现。这些发现进一步深入到应用物理（如原子弹、原子能），并进一步影响人类政治历史的进程。数学在爱因斯坦心中的价值，可由霍金在《时间简史》附录中叙述的爱因斯坦的一个故事作证：第二次世界大战后，以色列将建国，众多犹太人希望爱因斯坦作第一任总统候选人，有人去爱因斯坦处探爱因斯坦之意，爱因斯坦婉拒之，说：“政治是为当前，而方程是一种永恒的东西。”遂继续在他的研究中寻找统一场论的方程。应对霍金的简要叙述补充的是，爱因斯坦不是只思考数学与物理的人，他毕生都关注人的命运。他也以各种活动，用不少时间与精力，坚定地反对法西斯独裁专制、反对不义之战、反对一切侵害公民自由与权利的行为。他的这句话，是在纳粹被击败之后，他在荣誉地位与他所追寻的永恒方程之间作出的明彻的判断。

推动数学研究的另一个动力是对美的追求。这一点，大概是未深知数学的人最感不解的。他们会问：数学怎么会和美联系在一起？美还是一种推动力？但这一点，对有造诣的数学家不但是无疑的，而且是亲历的。事实上，在数学研究中自觉地遵循美的原则，达至美的境界，是数学家共同的追求。数学本身展示的智慧之美、精神之美，以及由它而催生的感性之美，以及数学家为实现这样的美而作出的努力，是应当单独写一整本书来详加阐述的。我们感受过风花雪月之美，可是，如下面罗素所说的这种美，人们感受过多少呢？

罗素，20世纪最重要的数学家之一、数理逻辑的奠基人、巨著《数学原理》的作者、分析哲学的创始人，同时还在不经意间（不是以小说诗歌或其他纯文学创作，而是因他的《西方哲学史》和思想散文等）获得诺贝尔文学奖的人，曾这样述说他的感受：

“数学，如果正确地看它，则具有至高无上的美——正像雕刻的美，是一种冷峻而严肃的美，这种美不是投合我们天性的软弱的方面，这种美没有绘画或音乐的那些华丽的装饰，它可以纯净到崇高的地步，能够达到严格的只有最伟大的艺术才能显示的那种完美的境地。一种真实的喜悦的精神，一种精神上的亢奋，一种高于个人的意识——这些是至善至美的标准，能够在诗里得到，也能够在数学里得到。”

冷峻而严肃，不投合我们天性中软弱的方面，没有华丽的装饰，而达到纯净与崇高。这

种美有如风云变换中屹立的山峰，在我们飘摇不定的情绪中注入坚定。有多少诗人咏叹朝露与落英，良辰之短暂；感官所及的美，常常随风而逝。而数学的美，来源于灵魂中的力。它用逻辑与理性去加工直觉与想像，达到揭示本质的简洁、和谐、深邃、永恒。它的美透入万事万物，千姿百态；它的美贯通古今，就是日月隐没了，也永远存在。它的美是那样威严，生死相争的敌对双方，在它的面前，也必然听从同一的判断。

实用的、智慧的、美学的和哲学的因素，共同促进数学的形成与发展。对这些因素不应作简单的排列，它们常常有机地结合在一起。把这些因素中的任何一个除去，或者抬高一个而去贬低另外一个都是不应该的，我们甚至不能断定这些因素中谁具有相对的重要性。一方面，智慧的、美学的和哲学的因素，以个人的纯思维的方式，塑造了数学；另一方面，数学家登上纯思维的顶峰不是只靠个人的攀登，他们是一个入站在另一个人的肩上，一个接一个，有时是几次接力，有时甚至是长达千年的数十代智者的接力。同时，他们还要借助数学家群体之外的社会力量的助力或推动。如果数学家的努力不能同这些力量结合在一起，那么他们就会身陷孤立的境地。这种孤立不只是指得不到人们的关心与支持，而且是指他们将失去许多数学问题的来源与新的思索方向。

事实上，数学一直是文明和文化的重要组成部分，数学的生命力正是根植于养育它的社会生活之中，它随着文明的兴衰而荣枯。它经历了史前的几个世纪和随后有文字记载历史的几个世纪的缓慢发展，在古巴比伦和埃及的一些经验的算术与几何成果之后，终于在古希腊的爱智慧的文化环境中迎来了它第一次重大的发展。那是一个学派林立，没有思想独断与专制，而任人自由思辨的时期。泰勒斯、毕达哥拉斯、芝诺、希帕索斯、苏格拉底、柏拉图、欧多克斯、亚里士多德、欧几里得、阿基米德这些永留人类思想史的大智者相继出场。古希腊的思想家和数学家们强调严密的推理以及由此得出的结论，他们所关心的并不是这些成果的实用性，而是进行抽象的严密推理的可能性，和在这种思想的过程中对理想与美的追求。数学也因而改变了它的经验论的形象。清晰严密的证明，从基本的公理出发推演整个体系的努力，都在这一时期出现了。这一时期好像一个少年突然自觉到了他的自我，告别了他的童年。这是数学茁壮成长的时期。逻辑、思辨、悖论、几何、三角、代数一一受到热切的关注与研究，数学之树绽开了许多美丽的花朵，结出了丰硕的成果，以至亚里士多德的逻辑和欧几里得的几何，至今仍是要遵循的经典。

但是，随着亚历山大里亚时期的过去，随着重武力而轻文化，重实用而轻思想的罗马人的到来，希腊文明的那些特点被中断了。希腊文明在文化专制、暴力、野蛮，或眼光短浅的实用主义的扼杀中衰落了。一个象征性的事件是，在公元前212年，阿基米德，这个伟大的古希腊数学家和科学家，被突然闯入的罗马士兵杀害了，当时他正在研究画在沙盘中的几何图形。他面对刽子手的剑，镇定地说“不要动我的圆！”，他以生命捍卫着学术的尊严。他被残忍地杀害了，他的沙盘也同时被粗暴地掀翻了。阿基米德死于一个罗马士兵之手，是希腊文明遭遇重要变化的标志。爱好抽象科学、擅长推理的古希腊在欧洲的理性形象，被重实用的使用暴力的罗马取代了，从那以后他们就开始停滞不前了。他们因而没有发展其祖先的知识，他们的进步局限于工程技术的细枝末节。他们不再是那种能够提出新观点的思想家和梦想家。古希腊的繁盛的数学之树也仿佛进入了冬眠，沉睡了千年之久，其间仅有缓慢的发展。直到文艺复兴时期，数学之树才有了能繁茂生长的沃土。从公元16世纪起，随着人类步入新的文明，而开始了它新一轮蓬勃发展的时期。它告别了初等数学的时期，步入了变量、函

数、微积分的新时期。从此，它再也没有停下脚步，愈益加速地发展着。

这些例子告诉我们，一个时代的总的特征在很大程度上与这个时代的数学活动密切相关。同时数学又受制于时代的总的取向，这种关系在我们这个时代尤为明显。在肯定各行各业的劳动者及他们中杰出的历史学家、经济学家、科学家、哲学家、文学家、艺术家和政治家功绩的前提下，我们可以这样说：数学是一种推动文明前进的巨大力量。这力量来源于一种精神，一种理性的精神。这种精神，使人类的思维运用到最完善的程度，使人类的行为有所依凭。这种精神，影响着人类的物质、道德和社会生活；这种精神，解释着人自身思维的奥秘，也解释着自然的奥秘；这种精神，探求和确立知识的内涵，并用于人的幸福的追求。今天，数学的影响力达到了历史上从未达到过的高度，数学已经广泛地影响着现代人类的生活和思想，今天的文明与以往历史上的文明有了明显的区别，以至我们不能不称今天为信息化时代或数字化时代。今天的文明，比以往任何时候，更深地打上了数学的烙印。

## 1.2 数学的特点

数学和一些有特定研究范围的学科不同，它几乎是任何学科所不可缺少的，没有任何一门学科能像数学那样渗透到每一种学科之中。它是现代科学技术的语言和工具，它是科学的典范。现代科学之所以成为现代科学，一个决定性的步骤是使自己数学化。同时，数学也愈来愈多愈来愈深地进入人文科学的领域。为什么会这样？因为数学比任何一门学科更直接地更集中地运用着人的智慧。其他学科常借助外在的对象与工具，因而也受制于那些对象与工具。惟有数学，它依靠的主要是人本身的智慧。同时，数学也强化了人的智慧。尤其是，数学研究的对象存在于任何一门学科中，而任何一门学科的深入研究都是智慧的运用，这就使数学在其他学科的研究中有了双重的意义。这样，人类理性思维活动中的一些特点，也因此而特别鲜明地表现在数学中。这些特点的形成离不开各个时代的总的文化背景，同时又是数学影响人类文化的明显标记。

第一个特点是它的抽象性。对于抽象性，人们往往把它与生动性与丰富性相对立，并造成了不少人对数学的疏离与敬畏。这是对数学抽象性的最大误解。事实上，抽象性是对无数事物中的共同的本质属性的把握，是数学的广泛的应用性的基础，它支配着各式各样的外在的生动性与丰富性。

抽象性在简单的计算中就已经表现出来，我们运用抽象的数字，却并不打算每次都把它们同具体的对象联系起来，我们在学校中学的是抽象的乘法表，是数字的乘法表，而不是孩子人数乘上每人得到的相同的糖果数的表。数学里的符号、公式、定理、规则以至整个理论，都是对一类一类的相关对象适用的，而不是只针对某个具体的个体的。连一个最简单的数字1，也是那种仅有一个元素的集合的类的共有性质的表示。

同样，在几何中研究的种种对象，也是抽象的对象。例如，是没有宽度的直线，而不是拉紧了绳子。在几何线的概念中，直线是舍弃了所有具体的物理性质，只留下在一定方向上的伸长的纯思维的对象。总之，关于几何图形的概念，是舍弃了现实对象的所有其他性质，只留下其空间形式和大小的结果，全部数学都具有这种抽象的特征。关于整数的概念和关于几何图形的概念只是一些最原始的数学概念，在这些基本概念上，一步步地建立了更加抽象



也更具有概括力的数学概念,比如复数、函数、积分、微分、泛函、 $n$  维甚至无限维空间,等等,这样抽象程度的概念。这些概念的抽象化一个高于一个,一直高到这样的抽象程度,以致看上去已经失去了同现实生活的一切可见的联系。

事实上情形当然不是这样。虽说  $n$  维空间的概念的确非常抽象,但它却有完全现实的内容,要了解这些内容并不那么困难。事实上,上面列举的那些抽象概念都会有现实意义,并且这些概念全都是既从它们自身的起源方面也从实际应用方面同生活联系着的。比如,我们要去建立识别与区分一个大城市的居民的数据库,我们常常不会只用 2 维或 3 维的数据,而会用更多维的数据,即我们必须在高维空间上处理这种问题。

不过,抽象并不是数学独有的属性,它是任何一门科学乃至全部人类思维都具有的特性。因此,单是数学概念的抽象性还不能说尽数学的特点。只是,数学的抽象性特点最为突出。

数学的抽象性的特点具体表现为:第一,在数学的抽象中首先保留量的关系和空间形式,或保留一种抽象的关系、变换、结构、系统、过程,而舍弃了其他的一切。第二,数学的抽象是经过一系列阶段而产生的,它们达到的抽象程度大大超过了自然科学中一般的抽象。第三,数学本身是一个只用抽象概念和它们的相互关系建构的体系,它不使用概念与逻辑之外的东西。其他自然科学家为了证明自己的论断常常求助于实验,而数学家证明定理只需用概念、推理和计算。

数学的抽象性的表达,还借助了它的特有的符号与语言。数学用符号表示数量和空间形式,也表示一切事物间的关系、变换、结构、系统、过程,等等。数学符号与日常语言不同。日常语言是习俗的产物,也是社会和历史变迁的产物,它既带有自然性和实用性又带有随意性和变动性,日常语言还常常打上地域与民族的烙印,在一个语言共同体中它是方便的,在这个界线之外则成为交流的障碍。而数学语言则是慎重的、有意的,而且是精心设计的。它精密、准确、世界通用,而且是高度凝练的。凭借数学语言的严密性和简洁性,数学家们就可以清晰地表达和深入地研究数学思想,这些思想如果用普通语言表达出来,就会显得既模糊混乱又冗长不堪。数学符号的确定性与简洁性有助于思维的效率。抽象的简洁的数学符号能使数学家们在进行复杂思考时应对自如,而这些符号对门外人而言,恰恰是望而生畏的,但这是跨进数学之门必须越过的门槛。

数学符号对数学研究及其表述是必不可少的,有了它才能避免日常语言中经常引起的含混。数学是精确的,它是如此精确,以致常常使那些不习惯于它特有形式的人觉得莫名其妙。对“没看见一个人”应该怎样理解呢?数学的理解是:“要么什么人也没看见,要么看见了两个或更多的人”,并有特定的符号来准确表示这一理解。但一般人则可能简单地认为“没看见一个人”这句话只表达了“什么人也没看见”这一种意思。类似地,在很多其他语句中用日常语言,可能得出模糊的、片面的或多种意义的理解是常有的事,这甚至成了误解与论辩的根源。数学里则不允许也不会出现这样的情况。数学语言靠它特有的符号与表达来保证了这一点。数学的这种精确性,在一个还没有认识到它对于精密思维的重要性的人看来,似乎显得过于呆板,过于拘泥于形式。然而,任何精密的思维是和精确的语言不可分割的。没有精确的语言就没有严密的思考,而没有严密的思考,深刻的思想是不可能建立起来的。用抽象的数学符号构建的数学语言,是人类迄今创造的最为精确的科学语言。

当然，数学家们在其研究与表述中，不只是利用数学符号，也不只用这些符号来思考。在研究中他们也常常利用模型、物理的类比、注意许多单个的十分具体的实例，等等。所有这些都是理论的现实来源，有助于发现新的理论（或定理）。每个定理，只在它已从逻辑的推演上严格地被证明了的时候，才能在数学中成立。如果一个数学家报告一条他所发现的新定理时，只限于在模型上把它表示出来，那么任何一个数学家都不会承认这条定理是成立的。对于证明一个定理的要求，从中学的几何课程中就可以很好地了解到了，这种要求贯穿在全部数学中。我们可以极精确地测量成千个等腰三角形的两底角，发现其数值是相等的，但这并不是关于等腰三角形两底角相等的定理的数学证明。数学要求从几何的基本概念推导出这个结果。即：要从这个定理有关的概念的含义和先前已知的原始性质及已证明了的性质出发，用一步步严密的逻辑推理来导出这个定理。由此可见，不仅数学的符号、语言、概念是抽象的、思辨的，而且数学论证的方法也是抽象的、思辨的。然而令人高兴之处在于，正是数学的这种抽象性，使它揭示出多种具体事物中共同的规律，及这些规律的深层结构，并保证了它不受周围世界变幻不定的影响。

数学的第二个特点是，数学表现为追求一种确定的、客观的、严密的、可靠的知识。产生这个特点的原因可以由其对象和方法两个方面来说明。从希腊的文化背景中形成的数学的对象并不只是具体问题，数学所探讨的不是转瞬即逝的知识，而是某种永恒不变的东西。数学的对象是明确无误的概念，而方法也由明确无误的命题开始，并服从明确无误的推理规则，借以达到正确的结论。通过纯粹的思维竟能在认识宇宙上达到如此确定无疑的地步，当然会给一切运用思维的人以极大的鼓舞，人们自然会要求在一切实领域中都这样去做。正因为这样，数学方法成为人类认识方法的一个典范，也成为人在认识宇宙和人类自己时必须持有的客观态度的一个标准。就数学本身而言，达到数学真理的途径既有逻辑的方面也有直觉的方面，但就其与其他科学比较而言，就其影响人类文化的其他方面而言，它的逻辑方法是最突出的。这个方法发展成为人们常说的公理方法。迄今为止，人类知识还没有哪一个学科应用公理方法得到如数学那样大的成功，这一成功深刻地影响了人们对知识体系的态度。今天，某个学科如果还是只有论断而没有论据，只是一堆相互没有逻辑联系的命题，前后又无一贯性，人们是不会认真对持它的，更不会有人接受它了。真正的科学论述，都深受数学的影响。这要求：每个论断都必须有确实的根据，并有严密的论证，这些论断与论证都必须经受逻辑与实践的检验。而其他的，诸如习俗、迷信、权力、风尚，等等，统统不是判定真理的标准。不论习俗、迷信、权力、风尚一时间表现得多么强大，它们却从来没有过一致性和永恒性，因而也没有真正持久而深刻的力量。权力在争斗中更替，习俗与风尚在流变，而迷信也是各宗其主，我们从未看到它们在所有人心永恒地巍然屹立。而数学，却给了我们这样的景象：它世代相传、首尾相接，全人类千万年来共知共享，通行于一切地域、民族、宗教、国家之中。它所确证了的，任何人都承认，任何人都遵循；它所确证了的，即使天崩地裂，甚至连人类都不复存在时，也仍然成立，仍然正确。数学的这种超越时空的确定性、一致性和永恒性，实在太令人惊讶了！

数学的第三个特点是，数学是以简单和谐的形式去表达事物最深层的规律。数学在极抽象的形式下进行研究，为的是化繁为简、层层深入、直达本源。在科学研究中，有一种探寻事物本源的信念驱使着我们。这个信念就是：世界是合理的，有规律的，因而是可以理解的。在古代，这个信念有些神秘色彩。而发展到现代，科学经过了多次巨大的重整与综合，一次

次地印证着这个信念。在这一过程中，数学贯通其中，起了无可替代的作用。我们看到如下一些人们创造的破解世界之谜的理论的序列：牛顿的、麦克斯韦的、爱因斯坦的、玻尔的、达尔文的、孟德尔的、沃森与克里克的、……他们各自的理论有所不同，也并非不可改进，甚至可以被“证伪”。但在他们的研究的背后都有一个信念在指引着，他们都深信他们研究的对象中一定有一种合理性存在并有起决定作用的规律。他们力求找到它并以最简洁的方式来表述它，而这种表述的最有价值的方式就是数学。因为，数学的表述不只简洁准确，更能据此作进一步的推论去获得愈益深入且极具概括力的认识。而且，数学是不会被“证伪”的，他们都需要依凭数学这最坚固的土地。这一信念激励人们破除迷信，指引人们按照深刻的内在规律来思考事物。每当得到一种进一步的认知，都会使我们的世界图景变得更动人。这种认识世界之本质的意愿和努力，是推进入类文明的强大力量。数学，正是这种意愿与努力的最持续的富于成果的表现。

数学的第四个特点是，数学是最具自省性的学科，它不仅研究外部世界，也研究它自己。它以最严格的逻辑标准来对待自己研究的对象，也以最严格的逻辑标准来对待自己。在发挥自己力量的同时又研究自己的局限性，不断反思、不断自我批判。它不断致力于分析自己的概念，分析自己的逻辑结构和自己的方法。数学家对自己思维过程的每一点都要反思，并且常常从立足点开始。比如，什么是符号？什么是数？什么叫计算？什么叫证明？什么叫精确性？什么叫严格性？数学家通通不会放过。数学越发展，数学家就越要问自己的基础是不是牢固。数学所经历过的三次足以动摇数学基础的危机，都是数学家们自己去挖掘出来的，并以面对这种挑战为乐。数学也因这种严格的自我要求，而有了新的发展和变化。自然科学诸如物理、化学、生物，等等，是在实际存在的事物、现象或实验的结果与其理论发生矛盾时才变。而惟有数学，时常是在理性思维感到有了问题时就要变。而且数学的反思，总是指向一些根本的问题。在一个个的反思与追问中，数学因此产生了对人类文明极为重要的一些概念，诸如公理、证明、多元、无限、极限、对应、同构、变换、线性、非线性、充分性、必要性、可证性、不可证性、独立性、不独立性、矛盾性、不矛盾性、可构造性、不可构造性、完备性、不完备性，等等。在这样的不断反思与自我超越中，数学大踏步地前进着。

最后，数学最根本的特点，是它表达了一种对精神世界的探索精神。虽然，数学与满足人类的物质生活需要息息相关，但数学主要是通过探寻精神世界的奥秘、探寻智慧的奥秘来实现这些的。这种探索，首先不是指向人的物质需要，而是展现人的自由创造的精神如何同世界的深层结构相联系。自然界和人类社会的秩序是可以数学表达的，人应该去探索这种深层的内在秩序。在这个探索过程中，数学把理性思维的力量发挥得淋漓尽致。它提供了一种思维的方法与模式，提供了一种最有力的工具，提供了一种思维合理性的标准，给人类的思想解放打开了道路。现在人人都知道实验方法的重要性，但是任何科学实验，离开了逻辑思维，是无法得出任何结论的。而逻辑思维的最重要的表现之一就是数学。数学在文化中的这一地位是不可移易的，并且日益加强。按今天的学科分类，数学既不划归纯人文的学科，也不划归自然科学（把数学划归自然科学是不少人的误划），它是自成一类又横跨两者的。它是人与世界的纽带，甚至有人认为数学是现代文化的核心或基石，始终处于中心地位，影响到人类知识的一切部门。数学的这种作用，如著名数学家克莱因所说，甚至可能以难以察觉到的方式但无可置疑地影响着现代历史的进程。

数学家、教育家齐民友在他的论文“数学与文化”中，对数学的上述特点作了全面的阐述，他总结为：数学是这样一株有着多样美妙特性的参天大树，它为越来越多的学科提供支持，也从越来越多的学科中汲取营养。数学是人类理性发展的最高成就之一，它大大地提升了人的认识水平，深刻地影响了人的精神生活。数学使人成为更深刻、更丰富、更有力量的人。

### 1.3 数学与人文精神

人文精神是可以会意却难于言尽的，它的内涵是如此丰富，它的边缘难以界定。毫无疑问，它深深地植根于人自身，它是人性的升华，它是人类文明的内核。人类精神生活中每一种有价值的事物，都有它的含义。人性中的真、善、美是它的主要体现。

人文精神，表达着每个个人和整个人类存在于世界的意义。它趋向真、善、美，它遵循理性与逻辑，它表达友爱与宽容，它向往自由与发展，它反对迷信和盲从。它谋求个性解放、自我实现，又尊重他人、与人共进。人文精神是一种指向人类未来的积极的人文关怀，是对个人的尊严、价值、命运的维护、追求、关切和捍卫；是对一种全面发展的理想人格的肯定和塑造；是对人类创造的文化与文明的认同、参与和高度珍视。

一般认为人文精神是由人文学科去研究与表达的。从狭义的观察而言，这或许不错。的确，人文学科一般直接以人为对象，人文精神必然是其关注的主题。无论哲学、历史学、人类学还是美学、文学、艺术，无不鲜明地表现了这种特点。

文明的进展表现在人们对愈来愈多的学科，诸如伦理学、教育学、社会学、心理学、法学、政治学、经济学、军事学、管理学等中的人文精神的关注日甚一日。

但是，我们却遗憾地看到，还有不少人，甚至是一些学者，认为那些不以人为对象的学科，是与人文精神无关或很少相关的。自然科学和数学常被他们作为与人文精神无关的例子。

一些人认为，自然科学和数学与人文精神是毫不相关的。他们认为人文学科和科学学科隶属于两类完全不同性质的学科范畴，人文知识和科学知识分别属于两类不同的学科，这两类学科各自具有特定的研究对象，人文精神和科学精神只能在这两类学科各自的领地去寻找。

这是一种片面而狭隘的认识。事实上，人文精神并不是孤立地在人文范畴内成长的。无数事实表明，人性也是随着科学发现而一步步地提升的。科学，作为一种认识真理的探究活动，是培养新观念、新精神的催化剂。科学精神是人类在追求真理过程中生长的，并反过来成为人们追求真理时的科学指导。科学精神就是客观思考的理性精神、调查探寻的求实精神、实践实验的求真精神、开拓创新的进取精神、竞争协作的团队精神、挑战权威的勇敢精神和执著勤奋的献身精神。这种精神崇尚客观的真实性，把主体对认识过程的干扰减到最少的程度，竭力去感知和认识事物的本来面貌。这种精神有既广阔又深邃的眼界，把丰富多样的感性经验抽象为具有普遍性、本质性的概念、原理和规律。这种精神是无处不在的永不停息的探索，它不断拓展科学研究的范围，不断开拓科学研究的新领域，不断打破原有知识及理论的疆界。所有这些，不断为人的精神生活添进新的材料，并不断重组人的知识和判断，从而丰富、深化或改变着人们的思想观念、文化传统以及文明的状态。如哥白尼的日心说、达尔文的进化论，就对人们的观念更新以及社会的发展变革起了重要的作用，诸如此类的例子不胜枚举。科学的发展，同时带来了新的概念、新的观念、新的价值，并因而提供给人类更大的生存空间与发展空间，为个

人的自由发展和自我实现提供条件，为人类文明的前行提供了动力。

科学研究是人类认识客观世界的行动，也是人的社会文化活动。科学家的任何科研活动都和社会其他成员的活动一样，体现和反映了参与者的伦理观、人生观、世界观和价值观。许多科学家无论在从事科研活动的过程中，还是在应用科研成果，甚至对自己生死存亡的态度上，都表现出对人的价值和人的理想的极大重视，对人文精神的执著追求。许多科学家的一生，在致力于科研活动的同时，处处重视人的价值，孜孜不倦地追求社会的和谐发展，是科学精神和人文精神结合的典范。如爱因斯坦在第二次世界大战期间，为抵御法西斯的侵略，劝说美国总统罗斯福抢在纳粹德国以前研制原子弹，以备不测；当研制成功以后，他又从人类的良知和社会责任感出发，反对不必要的使用原子弹。又如天才的数学家维纳，在完成控制论的奠基之作时，同时分析了它对社会的作用，尤其是对社会下层的劳动者命运的影响，并因而提出了改善社会的忠告。这样的例子还可以举出很多。在科学发展过程中，深深地蕴涵着科学家的人文主义的态度和精神。它们和科学知识密不可分，共同构成了人文精神的深厚基础。

在现代学科研究和学科建设中，许多教育家和科学家都不再把人文知识和科学知识对立起来，不再把人文学科和科学学科截然割裂开来，不再把培养学生的人文精神和科学精神割开来。早在半个世纪以前，就有很多学者呼吁科技与人文，或理工与人文的结合。1947年秋，梁思成先生从美国归来后，在清华做了一个题为“理工与人文”的演讲，提出“半个人的世界”。意思是不懂得人文科学的人只能称之为“半个人”；反之，只懂人文，不懂科学的人也只能称之为“半个人”。

这里要特别指出的是，人文学科与科学学科所研究的具体的知识是不同的，但这恰恰不是它们应该分离的理由，而是更应该在一种新的角度上，在更高的人文精神中统一起来的理由。山和水当然有具体的区别，但倘若我们因此而把它们分离和隔绝，我们就再也看不到大自然的美景了。山上的绿阴将会枯死，江中的流水也将失去源头。对科学与人文，我们正应像造物主一样，高瞻远瞩，把它们熔于一炉。当我们致力于科学技术的时候，必须加进对个人命运与人类前途的价值判断；当我们关怀人的命运的时候，必须顾及自然与科学的作用。我们知道，任何科学理论及科技成果都具有客观性，因而是价值中立的。而应用它的人则有各不相同的意愿与目的。同一种科技成果，因人而异带来不同的后果。科学理论及科技成果对人类究竟产生何种影响，最终取决于人们的愿望、需求和价值观。就人类文明的整体来看，具有主动性和决定性的仍然是人自身。当人类自身因为经济、政治或宗教的原因而纷争不断时，最应该检讨的也是人自身。有的人看不到这点，把科学与如何应用科学混为一谈，由此误解科学，说它是一把双刃剑。这种“科学是双刃剑”的说法流传甚广，甚至成为一种“共识”。其实这种说法是不恰当的。科学是无辜的，根源是一些人的价值选择出了问题。是在把科技应用于何处的选择上出了问题。责怪科学，犹如不去责怪罪犯，却去责怪他手中拿的刀一样。正确的理解应如一些有远见卓识的人形象地表示的：在新世纪，科学技术是桨，人文精神是舵，两者应和谐地结合在人类的文明之舟上。人文精神和科学精神互相依存是最重要的。科学精神是独立思考，严谨规范，求真务实，开拓创新。人文精神是尊重人的情感与人格，注重人的精神生活，捍卫人的自由与尊严，追求人的发展与幸福。人文精神的核心是以人为本，以每一个活生生的具体的人为本。科学与人文是不能分割的，二者是人类文明飞升的双翼，是人类文明进步的孪生姐妹。我们应在科学的学习中，确立人文精神的目标，使每一个学生在学习阶段就学会对科技成果的

正确选择、舍取和使用。科学工作者应该懂得，人文精神不仅为科技创新提供良好的精神氛围和环境，同时也是约束、科学技术负面使用的重要力量。科技创新需要良好的人文精神作保障。而同时，只有自觉地把科学精神内蕴于宏大的人文精神之中，人文精神才更富于清晰性、准确性、深刻性，才能更好地指导人类实践。没有科学精神方面的目标，科学将失去最基本的意义，而人文精神也失去了存在和发展的基础；没有人文精神方面的目标，人的精神需求得不到满足，也不能很好地把握科学精神和科技应用的方向。两者的对立或缺乏，都将导致难以预料的灾难。科学精神应与人文精神结合得更为完善，层次更为提高，内容更为丰富，两者之间不能以削弱对方为前提，不能以牺牲对方为代价，而是双方都应该加强，并在一种新境界中统一起来。

但是，现实情况离这种希望还相去甚远，这是我们面临的最紧迫也最具挑战性的任务。以数学而言，它是科学的一个部分，其历史与科学的历史一样悠久。但严格意义上的数学和数学教育只是近现代的事。在此之前，古典的人文学科在大多数时间与地区仍是占主要地位的。大约 16 世纪开始，随着西欧生产力的发展与资本主义因素的萌芽以及科技革命的推动，数学在与古典人文学科的抗争中终于在教育领域中取得了胜利，不仅在大中小学课表中占据要津，而且也有力地撼动了原来古典文科的高贵地位与基础。进入 20 世纪后，由于科学在物质领域中的巨大成功与功利价值，数学在学校的地位不仅比以往更加稳固而且还在继续上升。然而，科学的这种空前的胜利却是付出了沉重代价的。其突出表现是，科学中的人文价值被严重忽视了，甚至出现了“只见物不见人”的极端偏向。数学教育的内容与目标也被实用主义所支配。在这种情况下，教育所培养出来的人，带上了明显的趋利性、工具性色彩。加上各专业具体知识的指数性增长，如果不是授之以渔而是授之以鱼的话，如果不是教给学生思想与方法而是重于灌输知识的话，就会使学生陷入一两门狭窄的专门知识与技能中，而难有广阔的心胸与眼界。这种情形，会导致不完整的人格，其后果是十分严重的。

在我国，通常把高等理科教育的培养目标定位于科学家，高等工科教育的培养目标定位于工程师。但是我们还应该认识到，高等教育所要培养的这些专家，除了要求掌握比较专门、比较高深的科学与技能，具有解决科学问题的能力外，还必须具有体现人文关怀的世界观与从事科技工作的职业道德。而且，更重要的是使他们成长为在精神上、情感上、人格上完整的人。因此，在教育中，就必须重视科学的整体价值，把它当作一种独特的精神文化来教授。既传授知识，更必须阐明科学的观念、思想、方法，更要沟通“科技”与“人文”，突出科学的人文内涵，关注人的命运和社会的景况。

实现科技教育的人文化，除了需要转变教育思想外，还需建立两者融合的“桥梁”。数学，作为科学的核心内容之一，又广泛应用于自然科学与人文科学，它应当也能够在这一任务中起到关键的作用。数学之所以有这样的功能，首先是因为数学一方面深刻地与万事万物的客观性相联系，同时又是思维的最自由的创造（在基本概念的提出和公理系的选择以及方法的运用上）和理智的最严格的自律（在推理与证明的逻辑步骤上）。它集主观与客观、灵性与思辨、人与自然于一身。其次，数学一方面最具有个体思考的特征，同时又是所有学科中最具有一致性、相互关联性和历史传承性的学科。它把个人和群体都高度地突出出来，又紧密地联系起来。再次，数学本身就深入到人文学科中，不只是应用，而且是那些学科深刻表述的方式。数学正在成为人文学科的新的推动力。在 21 世纪，我们将看到数学走出实用的和工具主义的围栏，成为社会进步的一个指标，成为文明的一个尺度，甚至成为人类高尚情感

的源泉。在《数学与善》这篇 20 世纪重要的数学文献里，大数学家、哲学家罗素的老师怀特海，已先知先觉地论述了这一点。

从人文意义上看，数学作为探索真理的事业，还造成一种鲜明的人格气质，一种积极承担责任的人文精神——不懈地探索真理、勇于坚持真理、为真理而献身。它包含尊重事实、实事求是的求实精神，勇于怀疑、自我否定的批判精神，勇于创新、超越现状的创造精神等。在数学的研究里，个人的金钱、地位、权力统统无济于事，数学的成功来自矢志不移的精神与智慧的努力。在数学的研究里，不是靠权威说话而是靠证明说话，无论是欧几里得、高斯还是陈省身，无论是名垂青史的大师还是科学院院士，在每一个问题的解决上，他们不能只给结论，而必须一步步给出证明，这证明必须接受所有数学工作者的评审与检验，若有任何不足或错误，他们必须公开给出改正（20 世纪里一个最重大的数学成果，费马大定理的证明历程就是一个很好的例子。威尔斯一波三折，接受审视，改正和弥补了他的证明，才获得了名垂青史的成功）。在数学研究里，人们完全平等地对话，都乐于听取他人的评议以便发现自己的疏忽与错误，并立即改正所有的错误。在数学研究里，人们不屈从任何权威与身分，只服从逻辑与真理。数学的这种精神，使人养成依据逻辑与客观规则去审视事物的习惯，使人具有不盲从权威，总要独立判断的态度。这样的习惯与态度会在默默中塑造一个人健全的人格。通过数学教育把这些精神内化为青少年一代的个性品格，成为他们今后的行为规范与价值取向，数学教育才算真正达到了它的目的。

对于数学教育的人文价值问题，我们可以从乔治·萨顿与贝尔纳的科学观与教育观中得到启示与借鉴。萨顿是给科学教育赋予人的意义的先驱者之一。早在 20 世纪 30 年代，萨顿批判了科学教育只注重功利意识的灌输与只教“技术业务”而缺少真正教育的偏向，呼吁要使科学及教育“人性化”，要“赞美科学所含有的人性意义”。紧随其后，科学学创始人之一贝尔纳首次提出了科学教育人文化的命题。他说，必须打破把科学与人文学科截然区别开来，甚至互相对立的传统，并代之以科学的人文主义。同时，科学教学内容本身也必须人文化。科学教育人文化，绝不是指科学与人文的简单相加，其内涵是指在新的教育思想指导下，促使它们相互整合，构成一个完整的有机整体。对这些先驱者的意见，我们怎么去做呢？最根本的是要转变工具主义的教育观，要把教育定位于培养有健全的人格与精神的人。要使人有丰富的感情、明彻的智慧、全面的素养，有体魄有知识有才能，有自信有自爱有自尊，有对他人对社会对自然的关爱，有欣赏美感悟美的心灵，有开拓新生活的勇气与能力，等等。这样的目标应当贯穿教育的始终，贯穿每门具体学科的始终，当然也应贯穿数学教育的始终。

数学教育的以人为本，除了需要转变教育思想外，还应当有可操作的方式。要提高数学教学内容的社会针对性，拓展数学教学内容的人文成分。要在传统课程的讲授中有意识地说明它的广阔的背景和文化含义，还要增加数学的新进展的介绍，以说明它对社会的关系；数学工作者本身要采取跨学科的方式进行研究，用新的成果展示数学与人文学科的结合及其价值；要开设数学史课程、数学人文应用性课程、数学哲学课程等直接融通数学与人文的课程。而在这些具体做法中，教学重心的转变，教育思想的转变是具有根本意义的，应当贯穿于每一步骤每一环节。

当我们不再只从技术与工具的角度看数学，就处处可以发现它的人文思想与意义。数学与人文科学都会同时改变它们的形象，使我们看到一个更完整更美妙的世界。

无论是数学还是人文科学，都是人性的全面提升所需的。

让我们记住哲学家休谟所说：“一切学科对于人类或多或少地有着联系。任何学科，不论它似乎与人性离得多远，但它们总是通过这样或者那样的途径回到人性。”

## 1.4 数学之美

在一些不了解数学的人那里，会认为数学与美是相距遥远的两种事物，一个纯属理智与精神，一个诉诸体会与感受，有什么关系呢？

我们知道，虽然在美学家那里，对美的本质有各种各样的解释，至今也没有一个公认的结论，但他们无不同意这样一个判断：美是多种多样的，美是无处不在的。

较为深刻的美学理论，都不会仅仅只关注由感觉和感官带来的美，都一定会面对心灵之美、精神之美。

数学之美，就属于后一种。

在数学家这里，美甚至被作为数学研究的一种很高的境界。他们的研究不仅要是真的，而且要是美的。数学家魏尔甚至说：“我的工作总是试图把真和美统一起来，但当我不得不在两者中选择其一时，我总是选择美。”

中国古代著名哲学家庄子说过：“判天地之美，析万物之理。”这两句话也是我们学习与研究数学的指导思想和美学原则。数学追求的目标，是从混沌中找出秩序，使经验升华为规律，将复杂还原为基本，由表象进入到本质。所有这些都是美的标志。实际上，一切科学、哲学、数学和艺术的对象不外乎大自然和人，即从宇宙到地球到自然环境到人到微观粒子的全部世界。既然科学和艺术的对象是相同的，所以它们必然是相辅相成的两个领域。著名物理学家李政道说得好：“科学和艺术是不可分割的，正像一枚硬币的两面。它们共同的基础是人类的创造力，它们追求的目标都是真理的普遍性。”要补充的是，它们还都追求着美、表达着美、创造着美。

为什么把美看得这样重要？因为美是人类生存的一个目标，是人类存在的意义之一。发现美、认识美、欣赏美和创造美，这是人类心灵生活的要求。反过来，美又是人类进步的动力。追求美的实质就是追求人与他人、人与自然的和谐交融。人类一步一步地揭示自然界的数学规律，人类就越了解我们所在的宇宙的美。希腊箴言说，美是真理的光辉。因而追求美就是追求真。阿达玛说：“数学家的美感犹如一个筛子，没有它的人永远成不了数学家。”可见，数学美感和审美能力是进行一切数学研究和创造的基础。

那么，什么是美呢？这是至今没有定论的。它确切得我们人人能够体验它感悟它，甚至在遇到美的事物时，会无须思索地脱口而出“多美啊！”；它又神秘得像若隐若现的幽灵，你又无法确实地准确地抓住它，至今没有哪个美的定义或美学理论是所有美学家公认的，更不要说为所有人公认了。这并不是贬低了美，这恰恰说明了美有不可穷尽的内涵。不过，还有一个天地和它一样的无法界说无法穷尽，那就是数学。不论有多少种美学理论，似乎都能同数学找到相关性。数学用它的不同侧面同美的不同侧面相对应。它们是惊人的相似！比如，认为一切绝妙的美都显示出奇异的均衡关系，美是各部分之间以及各部分与整体之间固有的和谐。这样的对美的说明，要在数学里找印证可真太多了。数学里处处有对称、完备、统一与和谐。又比如，认为美在于完善，一种从感觉而达致心灵的完善。在此我想举出大数学家怀特海的名篇《数学与善》作答，在此篇中已深刻地论述了数学与善的本质关系，论述了



数学达致心灵之美的原由。又比如美的距离说，认为美存在于与实用的、功利的需要的距离之中。数学，也正是在与现实的距离中存在的。数学的许多开拓性的创造，基本上都是与功利保持着距离甚至是完全超越功利的，它追求精神世界中逻辑的一致性、深刻性和完备性。复数系、 $n$  维空间、非欧几何、无穷集论等都闪耀着这种美的光芒。又比如席勒与黑格尔认为，美是理性内容表现于感性形式。数学的公理推演体系，体系在现实世界中的应用，可以按此说法成为一件最辉煌的艺术品。再比如克罗齐认为，美是直觉。而现代数学的一个重要的派别就是直觉主义学派，它的代表人物是布劳威。又比如美学上争论不休的，美是主观的还是客观的？同样，在数学中也有数学是客观规律的反映，还是人的创造的争论。又比如，车尔尼雪夫斯基认为美就是生活。对此，数学以它的起源以它对各种现实生活的精妙的数学模型做出了回应；又比如，有的美学理论说，美是自由的象征。而我们知道，伟大的数学家康托尔早已这样说过：“数学的本质就在于它的自由。”他遵循这一箴言，创建了至今魅力无穷的集合论。

数学的美是多方面的，但它主要以理智与逻辑为依托，这种美更具有精神性，更具特色。其一，如罗素的话所表述的，它的重要性使我们愿意再引述如下：“数学，如果正确地看它，则具有至高无上的美——正像雕刻的美，是一种冷峻而严肃的美，这种美不是投合我们天性的软弱的方面，这种美没有绘画或音乐的那些华丽的装饰，它可以纯净到崇高的地步，能够达到严格的只有最伟大的艺术才能显示的那种完美的境地。一种真实的喜悦的精神，一种精神上的亢奋，一种高于个人的意识——这些是至善至美的标准，能够在诗里得到，也能够在数学里得到。”

数学的这种“冷峻而严肃的美”来源于它的简洁中的深刻、抽象中的广阔、统一中的和谐。数学有简洁美，内涵深刻的数学往往在形式上简单得出奇，比如运动定律、浮力定律、拉普拉斯方程、麦克斯韦方程、质能转换公式，等等，一个简明的数学形式就囊括了世间万事万物，并引出了千姿百态的应用，这真如陆机的《文赋》里歌唱的，“笼天地于形内，挫万物于笔端。”数学有抽象美，我们的世界是三维的，数学家则抽象出无穷维空间，既概括了真实空间的本质，又扩展到更广的领域。事实上，每一个数学概念都是现实世界中没有的，都是现实的抽象与升华。这时数学家又像“精鹫八极，心游万仞”驾鹤飞升的仙人。数学好像总是俯瞰着这个世界，任何表象与装饰都挡不住它看穿本质的锐眼。它冷峻、深邃、纯净、崇高。

其二，这种美的抽象性和深刻性使它能解释各种生动的感性的美，并创造生动的美。这应当说是数学的最惊人的力量之一。

音乐何以美？什么是节奏？什么是和音？何为共鸣？何为音色？何为音质？何为旋律？早在古希腊时期，毕达哥拉斯发现，在相同张力作用下的弦，当它们的长度成简单的整数比时，击弦发出的声音听起来是和谐的，并进而研究了弦的不同位置会发出何种不同的音。基于这些测量与数学分析，毕达哥拉斯学派定出了音律。这些数学分析在后来进一步深入，对歌唱家的发音、乐曲的创作、乐器的制造，都产生了深刻的影响。

虹霓之美、色彩之美也被数学解析，于是我们可以人造虹霓，我们有了电脑绘画。数学进而把声音、色彩与影像结合在一起，以能保存和复制的数码方式给人们提供无穷无尽的多媒体的美的享受。数学家打破了美与真的界限，把它们紧紧地结合在一起；数学家打破了情感与理智的界线，把它们紧紧地结合在一起。人类通过数学确立了可理解的东西与可感受的美之间的内在联系。罗素如果活到今天，定会在他那段对数学的著名的评语中，加进更多的