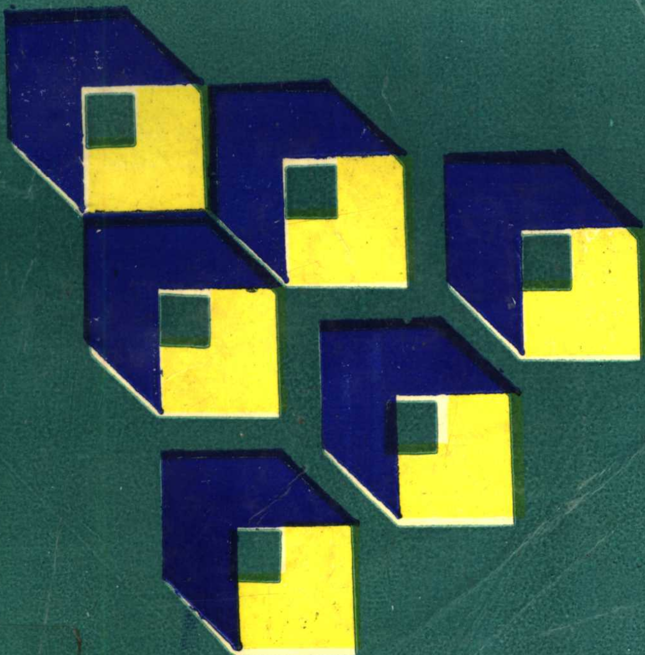
高中数学优化解析

GAO ZHONG SHU XUE
VOU HUA JIE XI

丁善勇　袁学坤　编著



教育出版社

高中数学优化解析

丁善勇
袁学坤
编著

安徽教育出版社

（皖）新登字03号

高中数学优化解析

丁善勇　袁学坤　编著

安徽教育出版社出版发行

（合肥市金寨路283号）

新华书店经销　　肥永青印刷厂印刷

开本：787×1092　1/32　印张：20.75　字数：450,000

1992年8月第1版　1992年8月第1次印刷

ISBN7—5336—1210—8/G·1653

定价：6.80元

前言

高中数学是数学体系中承上启下的重要内容。学好这一阶段的数学知识，不但在将来生产实践中有着重要的作用，而且也为继续学好高等数学打下坚实的基础。如何在有限的时间里，学完学好教学大纲规定的教学内容，并使学生把所学的知识系统化，进而提高分析、综合、解决问题的能力，这是当前高中数学教学的重要任务之一。然而，能较好地完成这个任务的一个重要方面，就是要在教学与复习中，对知识结构进行优化归纳整理，对选题和解题方法进行优化筛选。为此，我们总结多年来教学的经验，编写了这本《高中数学优化解析》，试图为减轻教与学两方面的负担，全面完成高中数学教学任务贡献一点力量。

本书始终坚持以教学大纲为准绳，把高中数学的必修内容优化成六十五个专题，其中前五十七个专题为“基础知识”部分，力求帮助读者把知识系统化；后八个专题为“解题方法与技巧”，主要针对近年来高考题型进行分类研究，帮助学生掌握解题的方法和技巧，提高综合解题能力。各专题在程序上分为：复习目标、例题解析、小结与思考、巩固训练、系列检测五个部分。复习目标的制定紧扣大纲，突出重点，明确要点；例题解析重在分析、评注；小结与思考，简炼准确，并富有启迪性，能促进读者综合能力的提高；巩固训练和系列检测都附有解答，方便读者参考检查。本书具有如下三个比较明显的特点：一、优化结构。在结构上，充分深化、浓缩全部高中数学内容，各专题着眼于一两个知识点，又注意对全章、全书乃至

全高中数学内容的辐射；既能前后联系，又能独立成篇。二、优化选题。各专题选编的例、习题典型精当，难易适度，针对性强，覆盖面宽。三、优化解法。解题方法新颖灵活，注重解题技巧、发散思维的训练。总之，本书各专题都经过精心设计，着眼教与学两个方面，梯度明显，训练目标明确。因此，既可以作为高中各年级学生和自学青年学习的辅导书，也可以直接作为高三复习课教学用书。

本书在编写过程中，得到了郭道炎，丁德荣等同志的鼓励和支持，合肥一中孙学昌，肥东一中朱勤明等同志提出很多宝贵建议，合肥六中刘为道同志审阅部分稿件，在此一并致谢。

由于我们的水平有限，书中的错误和缺点在所难免，敬请读者批评指正。如果这本书对提高教学质量和学生学习成绩有所帮助，将是我们的最大愿望。

编著者

1992年8月

目录

13799225995.

第一讲

集合及其运算

【复习目标】

1.理解集合的概念，掌握集合中元素的几个特征（元素的确定性、互异性、无序性）。

2.理解子集、交集、并集、补集的概念以及它们之间的区别和联系，掌握集合相等的概念。

3.应用集合这一现代数学工具去分析、解决问题。

4.通过集合在几何、代数上的广泛应用，弄清集合与它们之间的内在联系，从而提高学生运用知识解决问题的能力。

【例题解析】

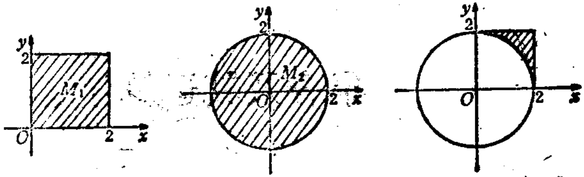
例 1　已知$M=\{x, xy, \lg(xy)\}$，$N=\{0, |x|, y\}$，且$M=N$，那么$(x+\frac{1}{y})+(x^2+\frac{1}{y^2})+\cdots+(x^{1994}+\frac{1}{y^{1994}})$的值是______。

分析： 本题是运用两个集合相同和集合中元素的确定性、互异性的知识。集合M中，$x\neq 0$，$xy\neq 0$，只有$\lg(xy)=0$，$\therefore xy=1$。集合N中必有$y=1$或$|x|=1$，若$y=1$则$x=1$，这样M中有两个1与元素的互异性矛盾。故$|x|=1$、$x=-1$、$y=-1$，$\therefore$原式$=0$。

例 2　在直角坐标平面内，(x,y)表示点集。设$M_1=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 2\}$，$M_2=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 4\}$，$I=R$，求$M_1\cap\overline{M}_2$在平面上表示的区域面积。

分析： 此题是集合交与补的运算，易知M_1是正方形内的点

集。M_2是圆内的点集，$\overline{M}_2$是圆外点集（包括边界），从下图可



知，区域面积为 $4-\pi$。

解：（略）

例 3 设$A=\{-1,\ 1\}$，$B=\{x\mid x^2-2ax+b=0,\ x\in R\}$，$B\neq\phi$，且$B\subseteq A$，求$a$、$b$之值。

分析： 要善于抓住题设中的隐含条件，进行合理的讨论。

解： $\because B\neq\phi$，$\therefore$方程$x^2-2ax+b=0$有实根，而$B\subseteq A$。$\therefore$集合B可能为$\{-1,\ 1\}$、$\{1\}$、$\{-1\}$。

(1) $B=\{1\}$时，$x^2-2ax+b=(x-1)^2=x^2-2x+1$，$\therefore a=1,\ b=1$。

(2) $B=\{-1\}$时，$x^2-2ax+b=(x+1)^2=x^2+2x+1$，$\therefore a=-1,\ b=1$。

(3) $B=\{-1,\ 1\}$时，$x^2-2ax+b=(x-1)(x+1)=x^2-1$ $\therefore a=0,\ b=1$。

例 4 如果$M=\{x\mid x=a^2+1,\ a\in N\}$，$P=\{y\mid y=b^2-4b+5,\ b\in N\}$。证明：$M\subset P$。

分析： 证明两个集合的包含关系，只要证M中任一个元素都是P中的元素。

证明： 设$x_0\in M$，则$x_0=a_0{}^2+1=(a_0+2)^2-4(a_0+2)+5$，$\because a_0\in N$，$\therefore a_0+2\in N$。令$a_0+2=b$，则$x_0=b^2-4b+5$，$\therefore x_0\in P$，$\therefore M\subseteq P$。

下面证明$M \neq P$。∵当$b=2$时，$y=1$，$1 \in P$，但$x=a^2+1>1$，∴$1 \notin M$，∴$M \neq P$，故$M \subset P$。

注 本例证法对证明两个集合相等也适用，要证$A=B$，可证(1)$A \subseteq B$，(2)$B \subseteq A$。

例5 集合A和集合B各含10个不同的元素，集合$A \cap B$含4个元素，集合C同时满足下列条件：(1)$C \subset A \cup B$且含3个元素；(2) $C \cap A \neq \phi$.求集合C的个数。

分析： 本题是集合与组合的横向综合题，要求理解集合运算，集合元素的无序性。

解： ∵ $n(A \cup B)=20-4=16$个元素。

∴ 满足条件的集合C有C_{16}^3个。

又$A \cap C \neq \phi$，故不符合条件的集合C有C_6^3个。因此集合C的个数是$C_{16}^3-C_6^3=540$。

例6 已知$A=\{x \mid 3-x \geqslant \sqrt{x-1},\ x \in R\}$，$B=\{x \mid x^2-(a+1)x+a \leqslant 0\}$.

(1) 当$A=B$时，求a的值；

(2) 当$A \subset B$时，求a的范围。

分析： 逆向思维，数形结合是数学的重要方法，复习中，加强这两方面的训练，可提高学生分析问题、解决问题的能力，本题就是运用逆向思维解决不等式问题。对第二个问题可运用二次函数的图象求解。

解：(1) 由$3-x \geqslant \sqrt{x-1} \Longrightarrow \begin{cases} x-1 \geqslant 0 \\ 3-x \geqslant 0 \\ x^2-7x+10 \geqslant 0 \end{cases}$

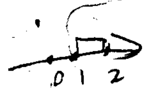
$$\Longrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1 \\ x \leqslant 3 \\ x \geqslant 5 \text{ 或 } x \leqslant 2 \end{cases} \Longrightarrow 1 \leqslant x \leqslant 2$$

即$A=\{x|1\leqslant x\leqslant 2\}$。

当$A=B$时，$B=\{x|(x-1)(x-2)\leqslant 0\}$

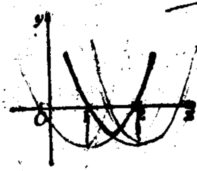
即$x^2-3x+2\leqslant 0$。根据多项式恒等条件，得$a=2$。

(2) 当$A\subset B$时，即不等式$x^2-(a+1)x+a\leqslant 0$解集中必含有$x\geqslant 2$或$x\leqslant 1$。



令$f(x)=x^2-(a+1)x+a$

则$\begin{cases} f(2)\leqslant 0 \\ f(1)\leqslant 0 \end{cases}$ 即$\begin{cases} 4-2(a+1)+a\leqslant 0 \\ 1-(a+1)+a\leqslant 0 \end{cases}$



解得$a\geqslant 2$。

例7 设自然数$A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$，$B=\{a_1^2,a_2^2,a_3^2,a_4^2,a_5^2\}$，且$a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$，若$A\cap B=\{a_1,a_4\}$，$a_1+a_4=10$，$A\cup B$中的元素之和为256，求集合$A$中元素之和。

分析：这类问题的解题思路是运用集合的性质，通过分析和推理，逐步渐少未知数的个数，从而求出A中所有元素。

解：∵$A\cap B=\{a_1,a_4\}$且$a_1<a_2<a_3<a_4<a_5\Longrightarrow a_1=a_1^2\Longrightarrow a_1=1$，由$a_1+a_4=10\Longrightarrow a_4=9$，设$a_4=9=a_i^2(2\leqslant i\leqslant 5)\Longrightarrow a_i=3$，∴$a_2=3$或$a_3=3$。

(1) 当$a_3=3$时，则$a_2=2$，此时$A=\{1,2,3,9,a_5\}$ $B=\{1,4,9,81,a_5^2\}$，∴$a_5\neq a_5^2$且$A\cap B=\{1,9\}$。故$A\cup B$中元素之和为$1+2+3+4+9+81+a_5+a_5^2=256$。∴$a_5=12$，故$A$中元素之和为$1+2+3+9+12=27$。

(2) 当$a_2=3$时，同(1)有$1+3+a_3+9+a_5+1+9+a_3^2+81+a_5^2-(1+9)=256$。即$a_5^2+a_5+a_3^2+a_3-162=0$而$3<a_3<9$，对于$a_3=4,5,6,7,8$分别代入验算知$a_3=5$时，$a_5$有大于9的整数解$a_5=11$。∴$A$中元素之和为$1+3+5+9+11=$

28。

总之集合A的元素之和为27或28。

【小结与思考】

一、集合的观点渗透于中学数学内容的各个方面，如方程、不等式、曲线、平面区域、排列组合等，因此正确地理解集合的有关概念，熟练地进行集合的有关运算是非常必要的。

二、本节以复习集合的概念和运算为目的，通过各种与集合有关命题的解析，强调解这类问题基本的数学方法，如形数法，象例2、例6都是用形数结合的方法来解，同时加强分类讨论的数学思想，如例3、例7。

三、由于集合是十分重要的基本概念，因此在集合的表示上力求准确，对集合中元素的三个特征应灵活运用，如例1中，根据元素的互异性，排除$x=1$，例7中也充分运用元素的确定性互异性而得出结论的。

$x\le\sqrt{y}$, $x^2\le y$　　$y\ge x^2$

巩固训练一

y　　$y\ge x^2$

1. 设集合$A=\{a, b, c\}$，满足$A\cup B=A$的集合B的个数是（　　）。

(A) 1　(B) 7　(C) 8　(D) 无法确定

2. $M=\{(x, y)|y\geqslant x^2\}$，$N=\{(x, y)|x^2+(y-a)^2=1\}$，那么使$M\cap N=N$成立的充要条件是________。

3. 已知$A=\{x|x^3-px^2+\pi x=0\}$，$B=\{x|x^3-(e+i)x^2+qx=0\}$，且$A\cup B=\{0,1, \pi,i, e\}$，求$p$、$q$、$A$、$B$。

4. 函数$f(x)=\lg(x^2-3x+2)$的定义域为F，函数$g(x)=\lg(x-1)+\lg(x-2)$的定义域为G，判定F、G的包含关系。

5. 已知$A=\{x|x^2-mx+m^2-19=0\}$，

$x^2-3x+2\ge0$　　$9-3m+m^2-19=0$

$\begin{cases}x-1>0\\x-2>0\end{cases}$　$x>2$　$F\supset G$　　$m^2-3m-10=0$

$x^2-5x+8=2$ 2   -2

$\{2,3\}$ -4   4

$B=\{x \mid \log_2(x^2-5x+8)=1\}$，$C=\{x \mid x^2+2x-8=0\}$，且$A\cap B\neq\phi$，$A\cap C=\phi$；求$m$的值。

6. 设$A=\{(x,\ y) \mid x^2+y^2=1,\ x,\ y\in R\}$，$B=\{(x,y) \mid \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1,\ a>0,\ b>0,\ y\in R\}$，若$A\cap B$为点元素集合，求(1)$a$、$b$的关系，(2) a、b的最小值。

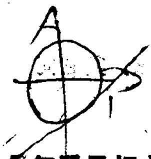
7. 已知两个正整数集合$A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4\}$，$B=\{a_1^2,\ a_2^2,\ a_3^2,\ a_4^2\}$，其中$a_1<a_2<a_3<a_4$，若$A\cap B=\{a_1,\ a_4\}$，$a_1+a_4=10$且$A\cup B$中的元素之和为124，求$a_1+a_4+a_2^2+a_3^2$。

$(\frac{b}{a^2}+1)x^2-\frac{2b}{a^2}x=0$

$x^2+\frac{b^2}{a^2}x^2-2\frac{b}{a}x=0$

第二讲

$\frac{b}{a}x-1=y$



映射与函数

【复习目标】

1.理解映射与函数的概念，掌握求函数解析式，定义域、值域的方法.

2.灵活运用集合与函数的观点、方法去处理代数、三角、几何问题.

3.通过复习，培养学生抽象思维能力以及综合解题能力.

【例题解析】

例1 作一个对应法则f，使f，M，N构成映射.

(1) $M=\{x\mid 0\leqslant x<1,\ x\in R\}$，$N=\{y\mid y\geqslant 0, y\in R\}$；

(2) $M=N=C$(复数集).

分析：理解映射概念，搞清对应法则f的实质，理解函数的定义域、值域与映射中原象与象的对应关系.

解：(1) 将M看成定义域，N为值域，使$y=f(x)$满足定义域为$0\leqslant x<1$，值域为$y\geqslant 0$的函数为 $y=\mathrm{tg}\frac{\pi}{2}x$，对应法则为$x\xrightarrow{f}y=\mathrm{tg}\frac{\pi}{2}x$.

(2) M、N都是复数集，因为复数与共轭复数都在复数集上，故所求的映射为$x\xrightarrow{f}y=\overline{x}$.

例2 有两个集合$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，$B=\{a, b, c\}$，从A到B的映射使B中每一个元素都有A中元素和它对应，这样的映射共有多少种?

分析：映射是一种对应，可以多对一，5个元素和3个元素对应可分成两类：

一类是：2—1，2—1，1—1

另一类是：3—1，1—1，1—1

说明 2—1表示A中两个元素对应B中1个相同元素，其它同。

由集合元素的无序性得，这样的映射共有：

$3\cdot C_5^2C_3^2C_1^1+3C_5^3C_2^1C_1^1=150$

例3 设$A=\{t|0<t<2\pi,\ t\in R\}$，$A$到坐标平面上点集的映射，$f:t\to(\sin t,\ 2\sin t\cos t)$，设$B=\{f(t),t\in A\}$，$C(r)=\{(x,\ y)|x^2+y^2\leqslant r^2,\ r>0\}$，求满足$B\subseteq C(r)$的最小值$r$。

分析：本题关键是搞清集合映射的符号内容，适当地进行一些转化。

$\because$ A到坐标平面的映射f满足$\begin{cases}x=\sin t\\ y=2\sin t\cdot\cos t\end{cases}$

由$B\subseteq C(r)$，故$f(t)$必在圆$x^2+y^2=r^2$内变化。从而有$\sin^2t+\sin^22t\leqslant r^2$，要求$r$最小，只要$\sin^2t+\sin^22t$最大，而$\sin^2t+\sin^22t=\frac{1-\cos2t}{2}+1-\cos^22t=-(\cos2t+\frac{1}{4})^2+\frac{25}{16}$，

$\cos2t=-\frac{1}{4}$时，r^2最小，$r^2=\frac{25}{16}$即$r=\frac{5}{4}$

解：（略）

例4 设$y=f(x)$是$R\to R$的一一映射，对于每一个$x\in R$，有$f(x^2)=f^2(x)$，试求(1)$f(0)$的值；(2)证明$f(x)$是奇函数。

分析：$f(x)$是$R\to R$的一一映射，即对任意x_1，x_2，$x_1\neq x_2$时，$f(x_1)\neq f(x_2)$，由$f(x^2)=f^2(x)$，令$x=0$，可得$f(0)=f^2(0)$，$\therefore f(0)=0$或$f(0)=1$，$f(x)$是一一映射，故$f(0)$