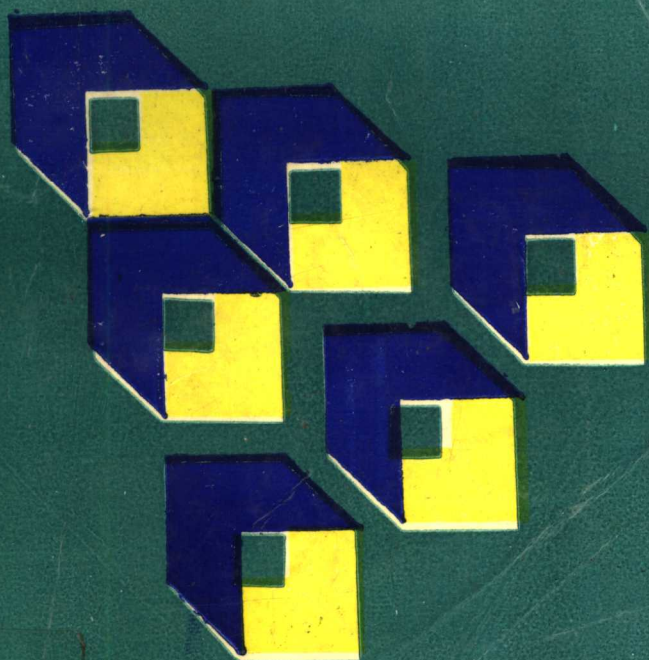


# 高中数学优化解析

GAO ZHONG SHU XUE  
YOU HUA JIE XI

丁善勇 袁学坤 编著



教育出版社

G633.6/D522  
62

# 高中数学

---

## 优化解析

丁善勇

袁学坤

编著

安徽教育出版社

(皖)新登字03号

**高中数学优化解析**

丁善勇 袁学坤 编著

安徽教育出版社出版发行

(合肥市金寨路283号)

新华书店经销 肥永青印刷厂印刷

\*

开本: 787×1092 1/32 印张: 20.75 字数: 450,000

1992年8月第1版 1992年8月第1次印刷

ISBN7-5336-1210-8/G·1653

---

定价: 6.80元

## 前 言

高中数学是数学体系中承上启下的重要内容。学好这一阶段的数学知识，不但在将来生产实践中有着重要的作用，而且也继续学好高等数学打下坚实的基础。如何在有限的时间内，学完学好教学大纲规定的教学内容，并使把所学的知识系统化，进而提高分析、综合、解决问题的能力，这是当前高中数学教学的重要任务之一。然而，能较好地完成这个任务的一个重要方面，就是要在教学与复习中，对知识结构进行优化归纳整理，对选题和解题方法进行优化筛选。为此，我们总结多年来教学的经验，编写了这本《高中数学优化解析》，试图为减轻教与学两方面的负担，全面完成高中数学教学任务贡献一点力量。

本书始终坚持以教学大纲为准绳，把高中数学的必修内容优化成六十五个专题，其中前五十七个专题为“基础知识”部分，力求帮助读者把知识系统化；后八个专题为“解题方法与技巧”，主要针对近年来高考题型进行分类研究，帮助学生掌握解题的方法和技巧，提高综合解题能力。各专题在程序上分为：复习目标、例题解析、小结与思考、巩固训练、系列检测五个部分。复习目标的制定紧扣大纲，突出重点，明确要点；例题解析重在分析、评注；小结与思考，简炼准确，并富有启发性，能促进读者综合能力的提高；巩固训练和系列检测都附有解答，方便读者参考检查。本书具有如下三个比较明显的特点：一、优化结构。在结构上，充分深化、浓缩全部高中数学内容，各专题着眼于一两个知识点，又注意对全章、全书乃至

全高中数学内容的辐射；既能前后联系，又能独立成篇。二、优化选题。各专题选编的例、习题典型精当，难易适度，针对性强，覆盖面宽。三、优化解法。解题方法新颖灵活，注重解题技巧、发散思维的训练。总之，本书各专题都经过精心设计，着眼教与学两个方面，梯度明显，训练目标明确。因此，既可以作为高中各年级学生和自学青年学习的辅导书，也可以直接作为高三复习课教学用书。

本书在编写过程中，得到了郭道炎，丁德荣等同志的鼓励和支持，合肥一中孙学昌，肥东一中朱勤明等同志提出很多宝贵建议，合肥六中刘为道同志审阅部分稿件，在此一并致谢。

由于我们的水平有限，书中的错误和缺点在所难免，敬请读者批评指正。如果这本书对提高教学质量和学生学习成绩有所帮助，将是我们的最大愿望。

编著者

1992年8月

# 目 录

13799225995

|        |               |     |
|--------|---------------|-----|
| 第一讲    | 集合及其运算        | 1   |
| 第二讲    | 映射与函数         | 7   |
| 第三讲    | 函数的性质         | 13  |
| 第四讲    | 反函数及其应用       | 18  |
| 第五讲    | 幂函数、指数函数、对数函数 | 24  |
| 第六讲    | 指数、对数方程       | 30  |
| 系列检测题一 | 集合与函数         | 36  |
| 第七讲    | 三角函数的基本公式     | 40  |
| 第八讲    | 三角函数的图象和性质    | 46  |
| 第九讲    | 两角和与差的三角函数    | 53  |
| 第十讲    | 三角函数的恒等变形     | 60  |
| 第十一讲   | 三角函数的条件恒等式    | 66  |
| 第十二讲   | 三角不等式与极值      | 73  |
| 第十三讲   | 三角函数的应用       | 80  |
| 系列检测题二 | 三角函数          | 88  |
| 第十四讲   | 三角形的边角关系      | 92  |
| 第十五讲   | 反三角函数         | 98  |
| 第十六讲   | 三角方程的解法       | 104 |
| 系列检测题三 | 反三角函数与三角方程    | 111 |
| 第十七讲   | 复数的概念         | 114 |
| 第十八讲   | 复数的三角形式及其应用   | 120 |
| 第十九讲   | 复数与几何         | 126 |
| 第二十讲   | 复数与三角         | 132 |

|        |             |     |
|--------|-------------|-----|
| 第二十一讲  | 复数与方程       | 137 |
| 系列检测题四 | 复数          | 142 |
| 第二十二讲  | 数列的概念与性质    | 146 |
| 第二十三讲  | 等差数列及其应用    | 151 |
| 第二十四讲  | 等比数列及其应用    | 157 |
| 第二十五讲  | 数学归纳法       | 165 |
| 第二十六讲  | 数列的极限       | 173 |
| 第二十七讲  | 数列的求和       | 180 |
| 系列检测题五 | 数列与极限       | 188 |
| 第二十八讲  | 不等式的解法      | 192 |
| 第二十九讲  | 不等式的应用      | 197 |
| 第三十讲   | 不等式的证明方法    | 204 |
| 第三十一讲  | 不等式的证明技巧    | 210 |
| 系列检测题六 | 不等式         | 218 |
| 第三十二讲  | 排列问题        | 222 |
| 第三十三讲  | 组合问题        | 227 |
| 第三十四讲  | 排列、组合数的性质   | 233 |
| 第三十五讲  | 二项式定理       | 238 |
| 第三十六讲  | 二项式定理的应用    | 244 |
| 系列检测题七 | 排列、组合、二项式定理 | 249 |
| 第三十七讲  | 平面与空间直线     | 252 |
| 第三十八讲  | 直线与平面       | 259 |
| 第三十九讲  | 平面与平面       | 266 |
| 第四十讲   | 立体几何中角的计算   | 274 |
| 第四十一讲  | 立体几何中距离的计算  | 281 |
| 系列检测题八 | 直线和平面       | 288 |
| 第四十二讲  | 柱体          | 292 |

|         |               |     |
|---------|---------------|-----|
| 第四十三讲   | 锥体            | 299 |
| 第四十四讲   | 台体            | 305 |
| 第四十五讲   | 球与组合体         | 311 |
| 系列检测题九  | 多面体和旋转体       | 317 |
| 第四十六讲   | 解析法           | 322 |
| 第四十七讲   | 直线方程          | 330 |
| 第四十八讲   | 圆的方程          | 336 |
| 第四十九讲   | 直线和圆的位置关系     | 342 |
| 系列检测题十  | 直线与圆          | 348 |
| 第五十讲    | 椭圆            | 352 |
| 第五十一讲   | 双曲线           | 359 |
| 第五十二讲   | 抛物线           | 367 |
| 第五十三讲   | 坐标变换下的圆锥曲线    | 375 |
| 系列检测题十一 | 圆锥曲线          | 380 |
| 第五十四讲   | 参数方程与普通方程     | 385 |
| 第五十五讲   | 圆锥曲线的参数方程及其应用 | 390 |
| 第五十六讲   | 极坐标系          | 397 |
| 第五十七讲   | 圆锥曲线的极坐标方程    | 403 |
| 系列检测题十二 | 参数方程和极坐标      | 411 |
| 第五十八讲   | 求曲线的轨迹方程      | 416 |
| 第五十九讲   | 分类与讨论         | 423 |
| 第六十讲    | 最值问题          | 430 |
| 第六十一讲   | 选择题解析         | 436 |
| 第六十二讲   | 简答填空题的分析处理    | 447 |
| 第六十三讲   | 证题思路          | 454 |
| 第六十四讲   | 综合题解析         | 464 |
| 第六十五讲   | 探究性命题的解题途径    | 474 |

|             |     |
|-------------|-----|
| 综合检测题一..... | 481 |
| 综合检测题二..... | 485 |
| 综合检测题三..... | 489 |
| 解答与提示.....  | 493 |

## 第一讲

# 集合及其运算

### 【复习目标】

1. 理解集合的概念, 掌握集合中元素的几个特征 (元素的确定性、互异性、无序性)。
2. 理解子集、交集、并集、补集的概念以及它们之间的区别和联系, 掌握集合相等的概念。
3. 应用集合这一现代数学工具去分析、解决问题。
4. 通过集合在几何、代数上的广泛应用, 弄清集合与它们之间的内在联系, 从而提高学生运用知识解决问题的能力。

### 【例题解析】

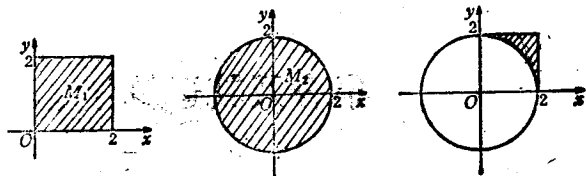
**例 1** 已知  $M = \{x | x, xy, \lg(xy)\}$ ,  $N = \{x | 0, |x|, y\}$ , 且  $M = N$ , 那么  $(x + \frac{1}{y}) + (x^2 + \frac{1}{y^2}) + \dots + (x^{1994} + \frac{1}{y^{1994}})$  的值是\_\_\_\_\_。

**分析:** 本题是运用两个集合相同和集合中元素的确定性、互异性的知识。集合  $M$  中,  $x \neq 0$ ,  $xy \neq 0$ , 只有  $\lg(xy) = 0$ ,  $\therefore xy = 1$ 。集合  $N$  中必有  $y = 1$  或  $|x| = 1$ , 若  $y = 1$  则  $x = 1$ , 这样  $M$  中有两个 1 与元素的互异性矛盾。故  $|x| = 1$ 、 $x = -1$ 、 $y = -1$ ,  $\therefore$  原式  $= 0$ 。

**例 2** 在直角坐标平面内,  $(x, y)$  表示点集。设  $M_1 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$ ,  $M_2 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$ ,  $I = R$ , 求  $M_1 \cap \overline{M_2}$  在平面上表示的区域面积。

**分析:** 此题是集合交与补的运算, 易知  $M_1$  是正方形内的点

集.  $M_2$  是圆内的点集,  $\overline{M_2}$  是圆外点集 (包括边界), 从下图可



知, 区域面积为  $4 - \pi$ .

解: (略)

例 3 设  $A = \{-1, 1\}$ ,  $B = \{x | x^2 - 2ax + b = 0, x \in \mathbb{R}\}$ ,  $B \neq \emptyset$ , 且  $B \subseteq A$ , 求  $a, b$  之值.

分析: 要善于抓住题设中的隐含条件, 进行合理的讨论.

解:  $\because B \neq \emptyset, \therefore$  方程  $x^2 - 2ax + b = 0$  有实根, 而  $B \subseteq A$ .

$\therefore$  集合  $B$  可能为  $\{-1, 1\}, \{1\}, \{-1\}$ .

(1)  $B = \{1\}$  时,  $x^2 - 2ax + b = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$ ,

$\therefore a = 1, b = 1$ .

(2)  $B = \{-1\}$  时,  $x^2 - 2ax + b = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ ,

$\therefore a = -1, b = 1$ .

(3)  $B = \{-1, 1\}$  时,  $x^2 - 2ax + b = (x-1)(x+1) = x^2 - 1$   $\therefore a = 0, b = 1$ .

例 4 如果  $M = \{x | x = a^2 + 1, a \in \mathbb{N}\}$ ,  $P = \{y | y = b^2 - 4b + 5, b \in \mathbb{N}\}$ . 证明:  $M \subseteq P$ .

分析: 证明两个集合的包含关系, 只要证  $M$  中任一元素都是  $P$  中的元素.

证明: 设  $x_0 \in M$ , 则  $x_0 = a_0^2 + 1 = (a_0 + 2)^2 - 4(a_0 + 2) + 5$ ,  $\because a_0 \in \mathbb{N}, \therefore a_0 + 2 \in \mathbb{N}$ . 令  $a_0 + 2 = b$ , 则  $x_0 = b^2 - 4b + 5$ ,  $\therefore x_0 \in P, \therefore M \subseteq P$ .

下面证明  $M \neq P$ .  $\because$  当  $b=2$  时,  $y=1$ ,  $1 \in P$ , 但  $x=a^2+1 > 1$ ,  $\therefore 1 \notin M$ ,  $\therefore M \neq P$ , 故  $M \subset P$ .

**注** 本例证法对证明两个集合相等也适用, 要证  $A=B$ , 可证 (1)  $A \subseteq B$ , (2)  $B \subseteq A$ .

**例 5** 集合  $A$  和集合  $B$  各含 10 个不同的元素, 集合  $A \cap B$  含 4 个元素, 集合  $C$  同时满足下列条件: (1)  $C \subset A \cup B$  且含 3 个元素; (2)  $C \cap A \neq \emptyset$ . 求集合  $C$  的个数.

**分析:** 本题是集合与组合的横向综合题, 要求理解集合运算, 集合元素的无序性.

**解:**  $\because n(A \cup B) = 20 - 4 = 16$  个元素.

$\therefore$  满足条件的集合  $C$  有  $C_{16}^3$  个.

又  $A \cap C \neq \emptyset$ , 故不符合条件的集合  $C$  有  $C_{16}^3$  个. 因此集合  $C$  的个数是  $C_{16}^3 - C_{16}^3 = 540$ .

**例 6** 已知  $A = \{x \mid 3 - x \geq \sqrt{x-1}, [x \in R]\}$ ,  $B = \{x \mid x^2 - (a+1)x + a \leq 0\}$ .

(1) 当  $A=B$  时, 求  $a$  的值;

(2) 当  $A \subset B$  时, 求  $a$  的范围.

**分析:** 逆向思维, 数形结合是数学的重要方法, 复习中, 加强这两方面的训练, 可提高学生分析问题、解决问题的能力, 本题就是运用逆向思维解决不等式问题. 对第二个问题可运用二次函数的图象求解.

**解:** (1) 由  $3 - x \geq \sqrt{x-1} \Rightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \\ x^2-7x+10 \geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 3 \\ x \geq 5 \text{ 或 } x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow 1 \leq x \leq 2$

即  $A = \{x \mid 1 \leq x \leq 2\}$ .

当  $A=B$  时,  $B = \{x \mid (x-1)(x-2) \leq 0\}$

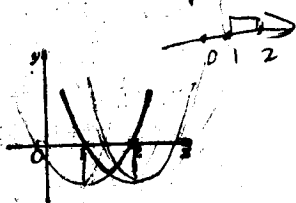
即  $x^2 - 3x + 2 \leq 0$ . 根据多项式恒等条件, 得  $a=2$ .

(2) 当  $A \subset B$  时, 即不等式  $x^2 - (a+1)x + a \leq 0$  解集中必含有  $x \geq 2$  或  $x \leq 1$ .

令  $f(x) = x^2 - (a+1)x + a$

$$\text{则} \begin{cases} f(2) \leq 0 \\ f(1) \leq 0 \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} 4 - 2(a+1) + a \leq 0 \\ 1 - (a+1) + a \leq 0 \end{cases}$$

解得  $a \geq 2$ .



**例 7** 设自然数  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ ,  $B = \{a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2, a_5^2\}$ , 且  $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ , 若  $A \cap B = \{a_1, a_4\}$ ,  $a_1 + a_4 = 10$ ,  $A \cup B$  中的元素之和为 256, 求集合  $A$  中元素之和.

**分析:** 这类问题的解题思路是运用集合的性质, 通过分析和推理, 逐步渐少未知数的个数, 从而求出  $A$  中所有元素.

**解:**  $\because A \cap B = \{a_1, a_4\}$  且  $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 \Rightarrow a_1 = a_1^2 \Rightarrow a_1 = 1$ , 由  $a_1 + a_4 = 10 \Rightarrow a_4 = 9$ , 设  $a_4 = 9 = a_i^2 (2 \leq i \leq 5) \Rightarrow a_i = 3, \therefore a_2 = 3$  或  $a_3 = 3$ .

(1) 当  $a_3 = 3$  时, 则  $a_2 = 2$ , 此时  $A = \{1, 2, 3, 9, a_5\}$   
 $B = \{1, 4, 9, 81, a_5^2\}$ ,  $\therefore a_5 \neq a_i^2$  且  $A \cap B = \{1, 9\}$ . 故  $A \cup B$  中元素之和为  $1+2+3+4+9+81+a_5+a_5^2=256$ .  $\therefore a_5=12$ , 故  $A$  中元素之和为  $1+2+3+9+12=27$ .

(2) 当  $a_2 = 3$  时, 同(1) 有  $1+3+a_3+9+a_5+1+9+a_5^2+81+a_5^2-(1+9)=256$ . 即  $a_5^2+a_5+a_5^2+a_5-162=0$  而  $3 < a_5 < 9$ , 对于  $a_3=4, 5, 6, 7, 8$  分别代入验算知  $a_3=5$  时,  $a_5$  有大于 9 的整数解  $a_5=11$ .  $\therefore A$  中元素之和为  $1+3+5+9+11=$

总之集合  $A$  的元素之和为 27 或 28.

### 【小结与思考】

一、集合的观点渗透于中学数学内容的各个方面,如方程、不等式、曲线、平面区域、排列组合等,因此正确地理解集合的有关概念,熟练地进行集合的有关运算是非常必要的.

二、本节以复习集合的概念和运算为目的,通过各种与集合有关命题的解析,强调解这类问题基本的数学方法,如形数法,象例 2、例 6 都是用形数结合的方法来解决,同时加强分类讨论的数学思想,如例 3、例 7.

三、由于集合是十分重要的基本概念,因此在集合的表示上力求准确,对集合中元素的三个特征应灵活运用,如例 1 中,根据元素的互异性,排除  $x=1$ ,例 7 中也充分运用元素的确定性互异性而得出结论的.

### 巩固训练一

1. 设集合  $A = \{a, b, c\}$ , 满足  $A \cup B = A$  的集合  $B$  的个数是 ( ).

(A) 1 (B) 7 (C) 8 (D) 无法确定

2.  $M = \{(x, y) | y \geq x^2\}$ ,  $N = \{(x, y) | x^2 + (y - a)^2 = 1\}$ , 那么使  $M \cap N = N$  成立的充要条件是 \_\_\_\_\_.

3. 已知  $A = \{x | x^3 - px^2 + \pi x = 0\}$ ,  $B = \{x | x^3 - (e + i)x^2 + qx = 0\}$ , 且  $A \cup B = \{0, 1, \pi, i, e\}$ , 求  $p, q, A, B$ .

4. 函数  $f(x) = \lg(x^2 - 3x + 2)$  的定义域为  $F$ , 函数  $g(x) = \lg(x - 1) + \lg(x - 2)$  的定义域为  $G$ , 判定  $F, G$  的包含关系.

5. 已知  $A = \{x | x^2 - mx + m^2 - 19 = 0\}$ ,

$$x^2 - 3x + 2 \geq 0 \quad x^2 - 3x + 2 < 0 \quad x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x_1 = 1, x_2 = 2 \quad x_1 = 1, x_2 = 2 \quad x_1 = 1, x_2 = 2$$

$$F = \{x | x^2 - 3x + 2 \geq 0\} = \{x | x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 2\}$$

$$G = \{x | x^2 - 3x + 2 > 0\} = \{x | x < 1 \text{ 或 } x > 2\}$$

$$F \supset G$$

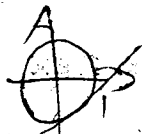
$x^2 - 5x + 8 = 2$   
 $x^2 - 5x + 6 = 0$   
 $(x-2)(x-3) = 0$   
 $x = 2, 3$

$B = \{x | \log_2(x^2 - 5x + 8) = 1\}$ ,  $C = \{x | x^2 + 2x - 3 = 0\}$ ,  
 且  $A \cap B \neq \emptyset$ ,  $A \cap C = \emptyset$ , 求  $m$  的值.

6. 设  $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1, x, y \in R\}$ ,  
 $B = \{(x, y) | \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, a > 0, b > 0, y \in R\}$ , 若  $A \cap B$  为  
 点元素集合, 求 (1)  $a, b$  的关系, (2)  $a, b$  的最小值.

7. 已知两个正整数集合  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ,  $B =$   
 $\{a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2\}$ , 其中  $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ , 若  $A \cap B = \{a_1,$   
 $a_4\}$ ,  $a_1 + a_4 = 10$  且  $A \cup B$  中的元素之和为 124, 求  $a_1 + a_4 + a_2^2$   
 $+ a_3^2$ .

## 第二讲



## 映射与函数

### 【复习目标】

1. 理解映射与函数的概念，掌握求函数解析式，定义域、值域的方法。
2. 灵活运用集合与函数的观点、方法去处理代数、三角、几何问题。
3. 通过复习，培养学生抽象思维能力以及综合解题能力。

### 【例题解析】

例 1 作一个对应法则  $f$ ，使  $f, M, N$  构成映射。

(1)  $M = \{x | 0 \leq x < 1, x \in \mathbb{R}\}, N = \{y | y \geq 0, y \in \mathbb{R}\}$ ;

(2)  $M = N = \mathbb{C}$  (复数集)。

分析：理解映射概念，搞清对应法则  $f$  的实质，理解函数的定义域、值域与映射中原象与象的对应关系。

解：(1) 将  $M$  看成定义域， $N$  为值域，使  $y = f(x)$  满足定义域为  $0 \leq x < 1$ ，值域为  $y \geq 0$  的函数为  $y = \tan \frac{\pi}{2} x$ ，对应法则为  $x \xrightarrow{f} y = \tan \frac{\pi}{2} x$ 。

(2)  $M, N$  都是复数集，因为复数与共轭复数都在复数集上，故所求的映射为  $x \xrightarrow{f} y = \overline{x}$ 。

例 2 有两个集合  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{a, b, c\}$ ，从  $A$  到  $B$  的映射使  $B$  中每一个元素都有  $A$  中元素和它对应，这样的映射共有多少种？

分析：映射是一种对应，可以多对一，5个元素和3个元素对应可分成两类：

一类是：2—1, 2—1, 1—1

另一类是：3—1, 1—1, 1—1

说明 2—1表示A中两个元素对应B中1个相同元素，其它同。

由集合元素无序性得，这样的映射共有：

$$3 \cdot C_3^1 C_2^1 C_1^1 + 3 C_3^2 C_1^1 C_1^1 = 150$$

例3 设  $A = \{t \mid 0 < t < 2\pi, t \in \mathbb{R}\}$ ,  $A$  到坐标平面上点集的映射,  $f: t \rightarrow (\sin t, 2\sin t \cos t)$ , 设  $B = \{f(t), t \in A\}$ ,  $C(r) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq r^2, r > 0\}$ , 求满足  $B \subseteq C(r)$  的最小值  $r$ .

分析：本题关键是搞清集合映射的符号内容，适当地进行一些转化。

$\because A$  到坐标平面的映射  $f$  满足  $\begin{cases} x = \sin t \\ y = 2\sin t \cdot \cos t \end{cases}$

由  $B \subseteq C(r)$ , 故  $f(t)$  必在圆  $x^2 + y^2 = r^2$  内变化. 从而有  $\sin^2 t + \sin^2 2t \leq r^2$ , 要求  $r$  最小, 只要  $\sin^2 t + \sin^2 2t$  最大, 而  $\sin^2 t + \sin^2 2t = \frac{1 - \cos 2t}{2} + 1 - \cos^2 2t = -(\cos 2t + \frac{1}{4})^2 + \frac{25}{16}$ ,

$\cos 2t = -\frac{1}{4}$  时,  $r^2$  最小,  $r^2 = \frac{25}{16}$  即  $r = \frac{5}{4}$

解：(略)

例4 设  $y = f(x)$  是  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  的一一映射, 对于每一个  $x \in \mathbb{R}$ , 有  $f(x^2) = f^2(x)$ , 试求 (1)  $f(0)$  的值, (2) 证明  $f(x)$  是奇函数.

分析：  $f(x)$  是  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  的一一映射, 即对任意  $x_1, x_2, x_1 \neq x_2$  时,  $f(x_1) \neq f(x_2)$ , 由  $f(x^2) = f^2(x)$ , 令  $x = 0$ , 可得  $f(0) = f^2(0)$ ,  $\therefore f(0) = 0$  或  $f(0) = 1$ ,  $f(x)$  是一一映射, 故  $f(0)$