高考数学专项夺标

GAOKAO
SHUXUE ZONGHETI
TOUXI

高考数学综合题透析

高考数学研究组 组编
本书编著 蔡小雄

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大學出版社

高考数学专项夺标

★ 高考数学新颖题解读
★ 高考数学解题法揭秘
★ 高考数学选择题突破
★ 高考数学填空题巧解
★ 高考数学中档题攻略
★ 高考数学综合题透析
★ 高考数学展望与对策

ISBN 7-308-04659-1
9 787308 046596 >

ISBN 7-308-04659-1/G · 1037
定价：10.00 元

高考数学综合题透析

高考数学研究组　组编

本书编著　　蔡小雄

浙江大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

高考数学综合题透析 / 高考数学研究组组编. —杭州：浙江大学出版社，2006.3
ISBN 7-308-04659-1

Ⅰ.高... Ⅱ.高... Ⅲ.数学课—高中—解题—升学参考资料 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 018461 号

出版发行	浙江大学出版社
	(杭州天目山路 148 号　邮政编码 310028)
	(E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn)
	(网址：http://www.zjupress.com)
责任编辑	伍秀芳
排　　版	浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷	浙江大学印刷厂
开　　本	787mm×960mm　1/16
印　　张	7.5
字　　数	150 千字
版 印 次	2006 年 3 月第 1 版　2006 年 4 月第 2 次印刷
书　　号	ISBN 7-308-04659-1/G・1037
定　　价	10.00 元

前　　言

高考复习是循序渐进、不断综合、不断深入、不断提高的过程，也是再学习、再研究、再认识、再质变的过程。数学作为高考三大工具学科之首，在高考中的地位是显而易见的。那么，怎样才能学好数学呢？特别提醒考生要注意以下几点：

1.要真正做到了解自己，要了解自己的知识薄弱环节，寻找相关题目，进行有选择性、有针对性的训练。

2.在做题过程中，要掌握解决问题的基本方法，注重通性通法，做题要有主动意识、要及时总结和反思，力争通过做一题，得到一类问题的解决方法。

3.在做题过程中，要注重解题的思考过程，注重研究解题的方向和策略，逐步提高自身的解题能力。

4.在做题过程中，要有一个阶段对选择题、填空题、中档题、综合题进行专门训练，要加强准确度的训练，提高解题速度，只有这样才能在高考中取得好成绩。

5.在做题过程中，应该学会数学思维与数学方法，数学思维方法都不是单独存在的，都有其对立面，并且两者能够在解决问题的过程中相互转换、补充，领悟数学思维中的哲学思想和在哲学思想的指导下进行数学思维，是提高学生数学素养、培养学生数学能力的重要方法。

6.加强自身解题规范性的训练，了解试卷批改中的给分点，严格按评分标准书写解答题，熟练、准确地用文字语言、符号语言、逻辑语言表达解题过程，字迹工整，力争会做的题目不丢步骤分，不完全会做的题目也能拿到部分分数。

“高考数学专项达标丛书”以其鲜活的素材，准确的信息，新

颖的体例，独特的风格呈现给读者。丛书包括《高考数学新颖题解读》、《高考数学解题法揭秘》、《高考数学选择题突破》、《高考数学填空题巧解》、《高考数学中档题攻略》、《高考数学综合题透析》、《高考数学展望与对策》共七个分册。丛书内容全面细致，容量大，既抓住主干知识的重点、难点、热点，又不留知识死角。题型全面，题量充分，体例设计科学，构思奇巧。丛书可以带领你进入数学的殿堂，领略殿堂的美丽和奥妙，掌握更熟练的方法和技巧。

丛书由高考数学研究组组织编写。尽管在成书过程中，我们本着近乎苛刻的态度，题题推敲，层层把关，力求能够帮助读者更好地把握丛书的脉络和精华，但书中也难免有疏忽和纰漏之处，诚挚地希望广大师生批评指正。

目　　录

第一招 高屋建瓴

——用数学思想指导解题

【锦囊妙计】

高屋建瓴，比喻居高临下，其势不可阻挡. 宋·周邦彦在《汴都赋》中写道："加兵诸侯，如高屋之建瓴，水神皋天邑，以先得者为上计."

在数学学习中，单纯靠题海战术盲目操练是很难获得理想成绩的，我们必须将自己置身于解题的更高境界. 古人云："会当凌绝顶，一览众山小". 笔者认为，高中数学学习的更高境界主要是指运用数学思想武装自己，并有效地指导解题. 数学思想是认识数学，解决数学问题的一般思维方式的理性概括，它较之于数学知识与常用的数学方法，具有更高的层次.《考试大纲》指出："数学思想和方法是数学知识在更高层次的抽象和概括，它蕴涵在数学知识的发生、发展和应用的过程中."如果说数学知识是数学内容，可用文字和符号来记录和描述，那么数学思想则是数学意识，只能领会、运用，属于思维的范畴.

中学数学中主要的数学思想有：函数与方程的思想，分类讨论思想，数形结合思想，化归与转化思想. 在解决问题的过程中把变量之间的联系用函数关系反映出来，便形成了函数思想；把一系列字母或待求的量通过列方程解方程求值，就是方程的思想，方程是从算术方法到代数方法中寻找等量关系的一种质的飞跃；对于不同性质的问题用不同的方法或不同的知识加以解决，便有了分类讨论的思想；把代数问题中的数与几何问题中的"形"结合起来，或借助于数的精确性来阐明"形"，或利用"形"的几何直观性来表示数，这就是数形结合的思想；把复杂的问题转化为简单的问题，把一般的问题转化为特殊的问题，把尚未解决的问题转化为已解决的问题，把抽象的问题转化为具体的问题等，便形成了转化的思想.

数学思想方法与数学基本方法通常是在学习数学知识的过程中同时获得的，与此同时，它们又直接对知识的形成起到指导作用. 因此，在高三复习阶段，应对数学思想方法进行认真的梳理与总结，逐个认识它们的本质特征，逐步做到自觉地、灵活地用于解决问题的实践中.

【典例精析】

例1 （2002年全国高考数学试题）设 a 为实数，函数 $f(x)=x^2+|x-a|+1,x\in\mathbf{R}$，

(1) 讨论 $f(x)$ 的奇偶性；

(2) 求 $f(x)$ 的最小值.

讲解 (1)① 当 $a=0$ 时，函数 $f(-x)=(-x)^2+|-x|+1=f(x)$，此时，$f(x)$ 为偶函数；

② 当 $a\neq 0$ 时，$f(a)=a^2+1,f(-a)=a^2+2|a|+1$，

$f(a)\neq f(-a),f(a)\neq -f(-a)$，

此时 $f(x)$ 既不是奇函数，也不是偶函数.

(2)① 当 $x<a$ 时，$f(x)=x^2-x+a+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+a+\frac{3}{4}$

(i) 若 $a\leqslant\frac{1}{2}$，则函数 $f(x)$ 在 $(+\infty,a]$ 上单调递减，从而函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,a]$ 上的最小值为 $f(a)=a^2+1$.

(ii) 若 $a>\frac{1}{2}$，则函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,a]$ 上的最小值为 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}+a$，且 $f\left(\frac{1}{2}\right)\leqslant f(a)$.

② 当 $x\geqslant a$ 时，函数 $f(x)=x^2+x-a+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-a+\frac{3}{4}$.

(i) 若 $a\leqslant-\frac{1}{2}$，则函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty]$ 上的最小值为 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}-a$，且 $f\left(-\frac{1}{2}\right)\leqslant f(a)$.

(ii) 若 $a>-\frac{1}{2}$，则函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调递增，从而函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的最小值为 $f(a)=a^2+1$.

综上，当 $a\leqslant-\frac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 的最小值为 $\frac{3}{4}-a$；当 $-\frac{1}{2}<a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 的最小值为 a^2+1；当 $a>\frac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 的最小值为 $\frac{3}{4}+a$.

评注 本题的完整解答经历了三次分类讨论的过程：

第一次为了讨论函数 $f(x)$ 的奇偶性，按 $a=0,a\neq 0$ 分类；

第二次为了去掉绝对值符号，按 $x\geqslant a$ 和 $x<a$ 分类；

第三次为了求函数 $f(x)$ 的最小值，按 $a\leqslant\frac{1}{2},a>\frac{1}{2}$ 和 $a\leqslant-\frac{1}{2},a>-\frac{1}{2}$ 分类.

例 2　已知 $f(x)=ax^2+bx+c$,其中 $a\in \mathbf{N}^*$,$b,c\in \mathbf{Z}$.

(1) 当 $b>2a$ 时,在$[-1,1]$上是否存在 x,使得 $|f(x)|>b$ 成立?

(2) 当方程 $f(x)-x=0$ 的根在$(0,1)$内时,试求 a 的最小值.

讲解　(1) 由 $b>2a$,$a\in \mathbf{N}^*$,得 $-\dfrac{b}{2a}<-1$,则 $f(x)$ 在$[-1,1]$上递增,且 $b>0$,因此,$f(x)\in(a-b+c,a+b+c)$.

① 当 $a+c>0$ 时,$a+b+c>b>0$,此时有 $|f(1)|>b$,即存在 $x=1$,使得 $|f(x)|>b$ 成立;

② 当 $a+c<0$ 时,$a-b+c<-b<0$,此时有 $|f(-1)|>b$,即存在 $x=-1$,使得 $|f(x)|>b$ 成立;

③ 当 $a+c=0$ 时,$f(x)\in(-b,b)$,不存在 x 使得 $|f(x)|>b$ 成立.

(2) 设 $g(x)=f(x)-x=0$ 的两根为 x_1,x_2,则 $g(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$,

由于 $g(0)g(1)=a^2x_1x_2(1-x_1)(1-x_2)$

$$\leqslant a^2\left(\frac{x_1+1-x_1}{2}\right)^2\left(\frac{x_2+1-x_2}{2}\right)^2=\frac{a^2}{16},$$

其中当 $x_1=x_2=\dfrac{1}{2}$ 时上述等号成立,所以 $g(0)g(1)\leqslant\dfrac{a^2}{16}$.

由于方程 $f(x)-x=0$ 的根在$(0,1)$内,所以 $g(0)>0$,$g(1)>0$,

又已知 a,b,c 为整数,则 $g(0)=c\geqslant 1$,$g(1)=a+b-1+c\geqslant 1$,

则 $\dfrac{a^2}{16}\geqslant g(0)\cdot g(1)\geqslant 1$,即 $a^2\geqslant 16$ $(a\in \mathbf{N}^*)$,则 $a\geqslant 4$.

经检验,a 的最小值为 4.

评注　第(1)小题在得到 $f(x)\in(a-b+c,a+b+c)$ 时,针对 $a+c$ 的符号进行分类讨论,从而使原问题明确化;第(2)小题利用二次函数与二次方程的关系,巧妙地设"两点式"$g(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$,并且对 $g(0)g(1)=a^2x_1x_2(1-x_1)(1-x_2)$ 进行合理搭配后,运用均值不等式,将"四元"问题转化为"二元"问题,从而顺利突破难点.

例 3　已知 $f(x)=\dfrac{2x-a}{x^2+2}$ $(x\in \mathbf{R})$ 在区间$[-1,1]$上是增函数.

(1) 求实数 a 的值组成的集合 A;

(2) 设关于 x 的方程 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的两个非零实根为 x_1,x_2,试问:是否存在实数 m,使得不等式 $m^2+tm+1\geqslant|x_1-x_2|$ 对任意 $a\in A$ 及 $t\in[-1,1]$ 恒成立?若存在,求 m 的取值范围;若不存在,请说明理由.

讲解　(1) 对 $f(x)$ 求导得 $f'(x)=\dfrac{4+2ax-2x^2}{(x^2+2)^2}=\dfrac{-2(x^2-ax-2)}{(x^2+2)^2}$,

由于 $f(x)$ 在$[-1,1]$上是增函数,因此,$f'(x)\geqslant 0$ 对 $x\in[-1,1]$ 恒成立,

即 $x^2-ax-2\leqslant 0$ 对 $x\in[-1,1]$ 恒成立. ①

设 $\varphi(x)=x^2-ax-2$,

解法一:

$$①\Leftrightarrow\begin{cases}\varphi(1)=1-a-2\leqslant 0,\\ \varphi(-1)=1+a-2\leqslant 0.\end{cases}\quad\Leftrightarrow-1\leqslant a\leqslant 1,$$

由于 $x\in[-1,1]$,$f(x)$ 是连续函数,且只有当 $a=1$ 时,$f'(-1)=0$ 以及当 $a=-1$ 时,$f'(1)=0$,得 $A=\{a\mid -1\leqslant a\leqslant 1\}$.

解法二:

$$①\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{a}{2}\geqslant 0,\\ \varphi(-1)=1+a-2\leqslant 0.\end{cases}\text{或}\begin{cases}\dfrac{a}{2}<0,\\ \varphi(1)=1-a-2\leqslant 0.\end{cases}$$

$\Leftrightarrow 0\leqslant a\leqslant 1$ 或 $-1\leqslant a<0\Leftrightarrow -1\leqslant a\leqslant 1$.

以下同解法一.

(2) 由 $\dfrac{2x-a}{x^2+2}=\dfrac{1}{x}$,得 $x^2-ax-2=0$,而 $\Delta=a^2+8>0$,

因此,x_1,x_2 是方程 $x^2-ax-2=0$ 的两非零实根,$\begin{cases}x_1+x_2=a\\ x_1x_2=-2\end{cases}$

从而 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{a^2+8}$.

又 $-1\leqslant a\leqslant 1$,所以 $|x_1-x_2|=\sqrt{a^2+8}\leqslant 3$.

要使不等式 $m^2+tm+1\geqslant|x_1-x_2|$ 对任意 $a\in A$ 及 $t\in[-1,1]$ 恒成立,当且仅当 $m^2+tm+1\geqslant 3$ 对任意 $t\in[-1,1]$ 恒成立,

即 $m^2+tm-2\geqslant 0$ 对任意 $t\in[-1,1]$ 恒成立. ②

设 $g(t)=m^2+tm-2=mt+(m^2-2)$,

解法一:$②\Leftrightarrow\begin{cases}g(-1)=m^2-m-2\geqslant 0\\ g(1)=m^2+m-2\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow m\geqslant 2$ 或 $m\leqslant -2$.

所以,存在实数 m,使不等式 $m^2+tm+1\geqslant|x_1-x_2|$ 对任意 $a\in A$ 及 $t\in[-1,1]$ 恒成立,其取值范围是 $\{m\mid m\geqslant 2$,或 $m\leqslant -2\}$.

解法二:当 $m=0$ 时,② 显然不成立;

当 $m\neq 0$ 时,

$$②\Leftrightarrow\begin{cases}m>0,\\ g(-1)=m^2-m-2\geqslant 0.\end{cases}\text{或}\begin{cases}m<0,\\ g(1)=m^2+m-2\geqslant 0.\end{cases}$$

$\Leftrightarrow m\geqslant 2$ 或 $m\leqslant -2$.

以下同解法一.

评注 本题主要考查函数的单调性、导数的应用和不等式等有关知识,转化与化

归、数形结合及分类讨论思想在解答中也得到了充分运用.

例 4 设椭圆方程为 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$，过点 $M(0,1)$ 的直线 l 交椭圆于点 A,B,O 是坐标原点，点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$，点 N 的坐标为 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，当 l 绕点 M 旋转时，求：

(1) 动点 P 的轨迹方程；

(2) $|\overrightarrow{NP}|$ 的最小值与最大值.

讲解 (1) 解法一：当直线 l 的斜率存在时，可设直线 l 的方程为 $y=kx+1$.

记 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，由题设可得点 A,B 的坐标 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ 是方程组

$$\begin{cases} y=kx+1 & ① \\ x^2+\frac{y^2}{4}=1 & ② \end{cases}$$ 的解，

将 ① 代入 ② 并化简得，$(4+k^2)x^2+2kx-3=0$，所以 $\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{2k}{4+k^2}, \\ y_1+y_2=\frac{8}{4+k^2}. \end{cases}$

于是 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(\frac{-k}{4+k^2},\frac{4}{4+k^2}\right)$.

设点 P 的坐标为 (x,y)，则 $\begin{cases} x=\frac{-k}{4+k^2}, \\ y=\frac{4}{4+k^2}. \end{cases}$ 消去参数 k 得 $4x^2+y^2-y=0$. ③

当 k 不存在时，A,B 中点为坐标原点 $(0,0)$，也满足方程 ③，所以动点 P 的轨迹方程为 $4x^2+y^2-y=0$.

解法二：设点 P 的坐标为 (x,y)，因 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 在椭圆上，所以

$$\begin{cases} x_1^2+\frac{y_1^2}{4}=1, & ④ \\ x_2^2+\frac{y_2^2}{4}=1. & ⑤ \end{cases}$$

④ − ⑤ 得 $x_1^2-x_2^2+\frac{1}{4}(y_1^2-y_2^2)=0$,

所以 $(x_1-x_2)(x_1+x_2)+\frac{1}{4}(y_1-y_2)(y_1+y_2)=0$.

当 $x_1\neq x_2$ 时，有 $x_1+x_2+\frac{1}{4}(y_1+y_2)\cdot\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=0$. ⑥

$$\text{并且}\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}, \\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}, \\ \dfrac{y-1}{x} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}. \end{cases} \quad ⑦$$

将 ⑦ 代入 ⑥ 并整理得 $4x^2 + y^2 - y = 0$. ⑧

当 $x_1 = x_2$ 时，点 A,B 的坐标为 $(0,2),(0,-2)$，这时点 P 的坐标为 $(0,0)$ 也满足⑧，所以动点 P 的轨迹方程为 $\dfrac{x^2}{\dfrac{1}{16}} + \dfrac{\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2}{\dfrac{1}{4}} = 1$.

(2) 由点 P 的轨迹方程知 $x^2 \leqslant \dfrac{1}{16}$，即 $-\dfrac{1}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{4}$.

$|\overrightarrow{NP}|^2 = \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2 = \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4} - 4x^2 = -3\left(x+\dfrac{1}{6}\right)^2 + \dfrac{7}{12}$，

所以，当 $x = \dfrac{1}{4}$，$|\overrightarrow{NP}|$ 取得最小值，最小值为 $\dfrac{1}{4}$；

当 $x = -\dfrac{1}{6}$ 时，$|\overrightarrow{NP}|$ 取得最大值，最大值为 $\dfrac{\sqrt{21}}{6}$.

评注 第(1)小题中的解法一主要是通过联立方程，运用韦达定理；解法二则是巧用“点差法”. 第(2)小题将求 $|\overrightarrow{NP}|$ 的最值问题转化为二次函数在限定区间上的最值问题. 有必要提醒的是，不要忽略直线斜率不存在的情形.

例 5 已知直线 l 过点 $A(1,-2)$ 和点 $B(4,1)$.

(1) 若直线 l 与双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2} - y^2 = 1\ (a > 0)$ 相交于 E,F 两点，且线段 EF 的中点坐标为 $(4,1)$，求 a 的值；

(2) 对于平面上任一点 P，当点 Q 在线段 AB 上运动时，称 $|PQ|$ 的最小值为 P 与线段 AB 的距离. 已知点 P 在 x 轴上运动，写出点 $P(t,0)$ 到线段 AB 的距离 h 关于 t 的函数关系式.

讲解 (1) 由 $\begin{cases} y = x - 3 \\ \dfrac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 \end{cases}$ 得 $\left(\dfrac{1}{a^2} - 1\right)x^2 + 6x - 10 = 0$，设 $E(x_1,y_1)$，$F(x_2,y_2)$，

则 $x_1 + x_2 = -\dfrac{6a^2}{1-a^2} = 8$，得 $a = 2$.

(2) 解法一：

设线段 AB 上任意一点 Q 坐标为 $Q(x,x-3)$，$|PQ| = \sqrt{(t-x)^2 + (x-3)^2}$，

记 $f(x)=\sqrt{(t-x)^2+(x-3)^2}=\sqrt{2\left(x-\frac{t+3}{2}\right)^2+\frac{(t-3)^2}{2}}\ (1\leqslant x\leqslant 4)$，

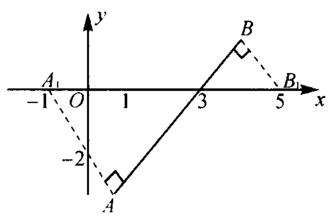
① 当 $1\leqslant\frac{t+3}{2}\leqslant 4$ 时，即 $-1\leqslant t\leqslant 5$ 时，$|PQ|_{\min}=f\left(\frac{t+3}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}\,|t-3|}{2}$；

② 当 $\frac{t+3}{2}>4$，即 $t>5$ 时，$f(x)$ 在 $[1,4]$ 上单调递减，

因此，$|PQ|_{\min}=f(4)=\sqrt{(t-4)^2+1}$；

③ 当 $\frac{t+3}{2}<1$，即 $t<-1$ 时，$f(x)$ 在 $[1,4]$ 上单调递增，$|PQ|_{\min}=f(1)=\sqrt{(t-1)^2+4}$.

综上所述，$h(t)=\begin{cases}\sqrt{(t-1)^2+4} & (t<-1);\\ \frac{\sqrt{2}\,|t-3|}{2} & (-1\leqslant t\leqslant 5);\\ \sqrt{(t-4)^2+1} & (t>5).\end{cases}$



解法二：过 A,B 两点分别作线段 AB 的垂线，交 x 轴于 $A_1(-1,0)$，$B_1(5,0)$，如右图所示.

① 当点 P 在线段 A_1B_1 上，即 $-1\leqslant t\leqslant 5$ 时，由点到直线的距离公式得：$|PQ|_{\min}=\frac{|t-3|}{\sqrt{2}}$；

② 当点 P 在点 A_1 的左边，$t<-1$ 时，$|PQ|_{\min}=|PA|=\sqrt{(t-1)^2+4}$；

③ 当点 P 在点 B_1 的右边，$t>5$ 时，$|PQ|_{\min}=|PB|=\sqrt{(t-4)^2+1}$.

综上所述，$h(t)=\begin{cases}\sqrt{(t-1)^2+4} & (t<-1);\\ \frac{\sqrt{2}\,|t-3|}{2} & (-1\leqslant t\leqslant 5);\\ \sqrt{(t-4)^2+1} & (t>5).\end{cases}$

评注　第(1)小题运用了方程的思想，解方程组即可，第(2)小题实质上是二次函数在限定区间上的最值问题，注意分类求解.

例 6　已知动圆过定点 $P(1,0)$，且与定直线 $l:x=-1$ 相切，点 C 在 l 上.

(1) 求动圆圆心的轨迹 M 的方程.

(2) 设过点 P，且斜率为 $-\sqrt{3}$ 的直线与曲线 M 相交于 A,B 两点.

(i) 问：$\triangle ABC$ 能否为正三角形？若能，求点 C 的坐标；若不能，说明理由；

(ii) 当 $\triangle ABC$ 为钝角三角形时，求点 C 的纵坐标的取值范围.

讲解　(1) 由曲线 M 是以点 P 为焦点、直线 l 为准线的抛物线，由抛物线的定义知

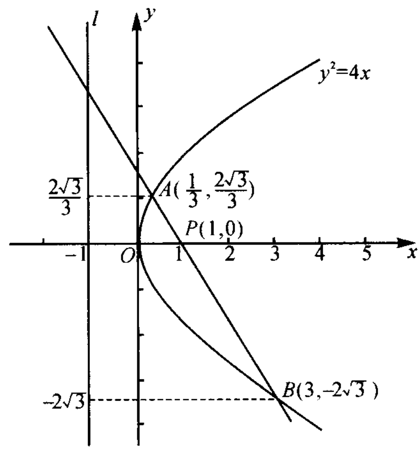
曲线 M 的方程为 $y^2 = 4x$.

(2)(i) 由题意得,直线 AB 的方程为 $y = -\sqrt{3}(x-1)$,由$\begin{cases} y = -\sqrt{3}(x-1), \\ y^2 = 4x, \end{cases}$消去 y 得 $3x^2 - 10x + 3 = 0$,解出 $x_1 = \dfrac{1}{3}, x_2 = 3$.

于是,A 点和 B 点的坐标分别为 $A\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right), B(3, -2\sqrt{3})$, $|AB| = x_1 + x_2 + 2 = \dfrac{16}{3}$.

假设存在点 $C(-1, y)$,使 $\triangle ABC$ 为正三角形,则 $|BC| = |AB|$ 且 $|AC| = |AB|$,即有

$$\begin{cases} (3+1)^2 + (y + 2\sqrt{3})^2 = \left(\dfrac{16}{3}\right)^2 & ① \\ \left(\dfrac{1}{3} + 1\right)^2 + \left(y - \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\dfrac{16}{3}\right)^2 & ② \end{cases}$$



由 ① − ② 得

$4^2 + (y + 2\sqrt{3})^2 = \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 + \left(y - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2$,解得 $y = -\dfrac{14\sqrt{3}}{9}$.

因为 $y = -\dfrac{14\sqrt{3}}{9}$ 不符合 ①,所以由 ①,② 组成的方程组无解.

所以,直线 l 上不存在点 C,使得 $\triangle ABC$ 是正三角形.

(ii) 设 $C(-1, y)$ 使 $\triangle ABC$ 成钝角三角形,

由$\begin{cases} y = -\sqrt{3}(x-1), \\ x = -1, \end{cases}$得 $y = 2\sqrt{3}$.

即当点 C 的坐标是$(-1, 2\sqrt{3})$ 时,三点 A, B, C 共线,故 $y \neq 2\sqrt{3}$.

$|AC|^2 = \left(-1 - \dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \dfrac{28}{9} - \dfrac{4\sqrt{3}y}{3} + y^2$,

$|BC|^2 = (3+1)^2 + (y + 2\sqrt{3})^2 = 28 + 4\sqrt{3}y + y^2$,

$|AB|^2 = \left(\dfrac{16}{3}\right)^2 = \dfrac{256}{9}$.

(i) 当 $|BC|^2 > |AC|^2 + |AB|^2$,即 $28 + 4\sqrt{3}y + y^2 > \dfrac{28}{9} - \dfrac{4\sqrt{3}}{3}y + y^2 + \dfrac{256}{9}$,

即 $y>\frac{2\sqrt{3}}{9}$ 时，$\angle CAB$ 为钝角.

(ii) 当 $|AC|^2>|BC|^2+|AB|^2$，即 $\frac{28}{9}-\frac{4\sqrt{3}}{3}y+y^2>28+4\sqrt{3}y+y^2+\frac{256}{9}$，

即 $y<-\frac{10\sqrt{3}}{3}$ 时，$\angle CBA$ 为钝角.

(iii) 当 $|AB|^2>|AC|^2+|BC|^2$，即 $\frac{256}{9}>\frac{28}{9}-\frac{4\sqrt{3}y}{3}+y^2+28+4\sqrt{3}y+y^2$，

即 $y^2+\frac{4}{3}\sqrt{3}y+\frac{4}{3}<0$，$\left(y+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2<0$. 该不等式无解，所以 $\angle ACB$ 不可能为钝角.

故当 $\triangle ABC$ 为钝角三角形时，点 C 的纵坐标 y 的取值范围是

$y<-\frac{10\sqrt{3}}{3}$ 或 $y>\frac{2\sqrt{3}}{9}$ $(y\neq 2\sqrt{3})$.

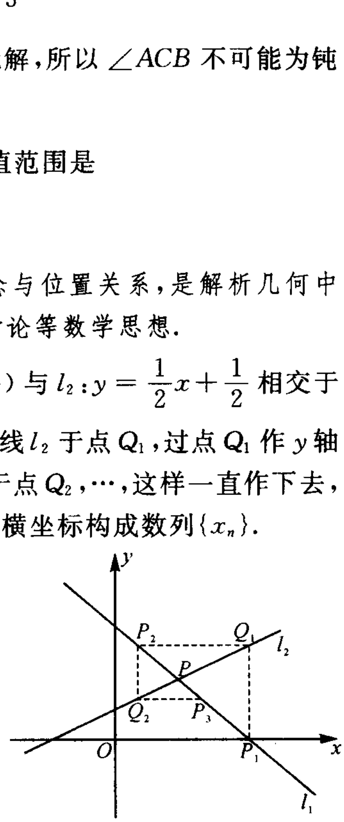
评注 本例主要考查直线、圆以及抛物线的基本概念与位置关系，是解析几何中的存在性问题. 在解答中充分运用了转化与化归、分类与讨论等数学思想.

例 7 如图，直线 $l_1: y=kx+1-k$ $(k\neq 0, k\neq\pm\frac{1}{2})$ 与 $l_2: y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ 相交于点 P. 直线 l_1 与 x 轴交于点 P_1，过点 P_1 作 x 轴的垂线交直线 l_2 于点 Q_1，过点 Q_1 作 y 轴的垂线交直线 l_1 于点 P_2，过点 P_2 作 x 轴的垂线交直线 l_2 于点 Q_2，…，这样一直作下去，可得到一系列点 $P_1, Q_1, P_2, Q_2, \cdots$，点 $P_n(n=1,2,\cdots)$ 的横坐标构成数列 $\{x_n\}$.

(1) 证明 $x_{n+1}-1=\frac{1}{2k}(x_n-1)$，$n\in\mathbf{N}^*$；

(2) 求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式；

(3) 比较 $2|PP_n|^2$ 与 $4k^2|PP_1|^2+5$ 的大小.



讲解 (1) 证明：设点 P_n 的坐标是 (x_n, y_n)，由已知条件得点 Q_n, P_{n+1} 的坐标分别是：

$\left(x_n, \frac{1}{2}x_n+\frac{1}{2}\right)$，$\left(x_{n+1}, \frac{1}{2}x_n+\frac{1}{2}\right)$.

由 P_{n+1} 在直线 l_1 上，得 $\frac{1}{2}x_n+\frac{1}{2}=kx_{n+1}+1-k$.

所以 $\frac{1}{2}(x_n-1)=k(x_{n+1}-1)$，即 $x_{n+1}-1=\frac{1}{2k}(x_n-1)$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(2) 由题设知 $x_1=1-\frac{1}{k}$，$x_1-1=-\frac{1}{k}\neq 0$，又由(1)知 $x_{n+1}-1=\frac{1}{2k}(x_n-1)$，

所以数列$\{x_n-1\}$是首项为x_1-1，公比为$\frac{1}{2k}$的等比数列.

从而$x_n-1=-\frac{1}{k}\times\left(\frac{1}{2k}\right)^{n-1}$，即$x_n=1-2\times\left(\frac{1}{2k}\right)^{n}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(3) 由$\begin{cases}y=kx+1-k,\\ y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2},\end{cases}$得点$P$的坐标为$(1,1)$.

所以$2|PP_n|^2=2(x_n-1)^2+2(kx_n+1-k-1)^2=8\times\left(\frac{1}{2k}\right)^{2n}+2\left(\frac{1}{2k}\right)^{2n-2}$，

$4k^2|PP_1|^2+5=4k^2\left[\left(1-\frac{1}{k}-1\right)^2+(0-1)^2\right]+5=4k^2+9$.

(i) 当$|k|>\frac{1}{2}$时，即$k<-\frac{1}{2}$或$k>\frac{1}{2}$时，$4k^2|PP_1|^2+5>1+9=10$.

而此时$0<\left|\frac{1}{2k}\right|<1$，所以$2|PP_n|^2<8\times1+2=10$.

故$2|PP_n|^2<4k^2|PP_1|^2+5$.

(ii) 当$0<|k|<\frac{1}{2}$，即$k\in\left(-\frac{1}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)$时，

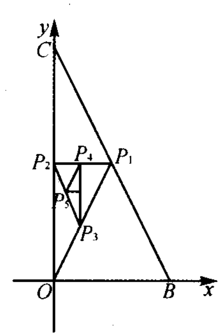
$4k^2|PP_1|^2+5<1+9=10$.

而此时$\left|\frac{1}{2k}\right|>1$，所以$2|PP_n|^2>8\times1+2=10$.

故$2|PP_n|^2>4k^2|PP_1|^2+5$.

评注　本题的文字较长，正确理解题意，并将其抽象成常见的数列问题是解决问题的关键．另外，要注意数形结合的思想，将“形”翻译成“数”．前两问是基础知识、基本方法掌握情况的考查，第三问是比较大小，利用换元简化原问题，再根据函数$y=x^n$，$n\in\mathbf{N}^*$在$(0,+\infty)$上的单调性，对$\frac{1}{2k}$的范围分两种情况讨论.

例 8　(2004年浙江高考数学试题) 如图，$\triangle OBC$的三个顶点坐标分别为$(0,0)$，$(1,0)$，$(0,2)$，设P_1为线段BC的中点，P_2为线段CO的中点，P_3为线段OP_1的中点，对于每一个正整数n，P_{n+3}为线段P_nP_{n+1}的中点，令P_n的坐标为(x_n,y_n)，$a_n=\frac{1}{2}y_n+y_{n+1}+y_{n+2}$.



(1) 求a_1,a_2,a_3及a_n；

(2) 证明$y_{n+4}=1-\frac{y_n}{4}$，$n\in\mathbf{N}^*$；