新世纪高等院校精品教材

浙江大学城市学院资助项目

微积分学教程（下册）

——面向独立学院理、工、经、管、医等专业

主 编 莫国良 唐志丰

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

新世纪高等院校精品教材
浙江大学城市学院资助项目

微积分学教程（下册）

——面向独立学院理、工、经、管、医等专业

主　编　莫国良　唐志丰

浙江大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分学教程．下册/莫国良，唐志丰主编．一杭州：浙江大学出版社，2005.12
ISBN 7-308-04574-9

Ⅰ.微...　Ⅱ.①莫...②唐...　Ⅲ.微积分一高等学校一教材　Ⅳ.O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第148810号

内容简介

本书是按照教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的基本精神，为独立学院高等数学课程而编写的教材。

全书分上下两册，主要内容包括：一元函数微积分、无穷级数、常微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微积分。按分平台教学需要，将内容编排成十七章。其中第一章到第十二章为第一教学平台，内容注重几何直观和应用计算，为独立学院学生学习微积分课程所必须掌握的知识；第十三章到第十七章为第二教学平台，内容注重逻辑性与思辨性，供数学爱好者或需进一步深造的学生选学。

本书可作为独立学院理、工、经、管、医类等专业高等数学课程教材，也可作为其他本科院校高等数学课程的选用教材。

出版发行　浙江大学出版社
(杭州浙大路38号　邮政编码310027)
(E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址：http://www.zjupress.com)
责任编辑　徐素君
排　　版　浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷　杭州出版学校印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16
印　　张　18.25
字　　数　368千字
版 印 次　2005年12月第1版　2006年6月第2次印刷
书　　号　ISBN 7-308-04574-9/O·339
定　　价　26.00元

序

浙江省独立学院的兴起，已有六年历史。然而在这六年之中，微积分的教学，始终沿袭非独立学院的旧例，未见有相应的变化，致使教学脱节，效果不著，已成为时下独立学院微积分教学普遍存在的一个问题。浙江大学城市学院莫国良、唐志丰等老师经过这几年的实践与探索，对此感触颇深，决心从教学内容和课程体系人手，进行大胆革新。作为改革的一部分，他们编写了适合于独立学院使用的《微积分学教程》，并在学院内作了全面试用，取得了颇为令人满意的效果。

《微积分学教程》（上、下册）将微积分课程设计成两个教学平台，第一平台的内容只涉及微积分课程中最基本、最重要、学生务必力求熟练掌握的内容和方法，概念以“直观”导入为主，强调运算和在初等连续模型上的应用。鉴于第一平台的内容，已能保证后续课程学习之必需，所以对一部分学生，微积分的学习可以到此为止。第二平台的内容，则是在第一平台的基础上，适当强调微积分的逻辑基础与推理过程，以此给学生以一定的“理”的训练，其选读对象则是数学基础较好，对微积分有兴趣并希望进一步提高的学生，但最后选读与否，完全由学生自主决定。

浙江大学城市学院微积分教学的改革，充分体现了以人为本的思想，他们针对独立学院学生数学水平参差不齐的特点，按照不同的层次、不同的要求，对他们进行个性化的培养，使绝大部分学生经过学习，都能在原有基础上有实实在在的进步与提高，真正起到因材施教的效果。这样的改革，既符合时代的精神，也符合社会的需要，是一件任重道远、意义深远的工作。

丁善瑞

2005 年 5 月于杭州

前　言

在全球经济一体化与科学技术快速发展的国际环境中，世界各国都竞相制定人才开发战略，大力发展高等教育，努力提高人力资本水平，中国独立学院的快速兴起就是新一轮高等教育发展的历史性选择。但独立学院的发展要求与之相关联的各方面也要协调配套地发展，其中教材建设就是相当重要的一环。

微积分是人类智力创造的最大成就之一。它有两方面巨大的功能。其一，它是解决数学物理世界、经济社会领域、工程领域与生物科学领域中各种复杂问题的强有力的方法论工具；其二，它是锻炼与培养人类严密精确思维、逻辑抽象思维与几何直观思维的卓有成效的手段。正因为这样，一般普通高校的各个系都在新生一年级开设微积分课程。

国内外微积分的教材相当多，但能适应独立学院学生特点的教材却相当少，许多独立学院目前使用的教材常常是综合性大学多年来一直沿用的教材，这样的教材在内容的取舍和编排上与独立学院学生的特点不太适应。它主要表现在：内容往往大而全，学生常常只会机械地套用公式，学完即忘，没有很好地掌握微积分思想；有些内容过分繁复，学生一听就头痛；有些作业过分繁难，技巧性过强，学生望而生畏，兴趣大减。

为满足独立学院教材建设的需要，浙江大学城市学院在 2003 年专门下拨经费支持《微积分》等课程的教材改革工作。本教材就是在这样的前提之下着手编写完成的，从着手编写、试用到正式出版，历时两年。

本教材的改革思路是将传统的微积分内容分成两个平台，第一平台的内容称为“直观微积分”，它强调应用与直观，是微积分的基本内容，必须为广大学生所掌握；第二平台的内容称为“理性微积分”，它是从传统的微积分内容中剥离出来的，这部分内容强调逻辑与思辨，相对来说较繁难。学生在学习完第一平台的内容后可以不选学第二平台的内容而不影响后继课程的学习。这样做，对数学基础较薄弱的学生或对数学兴趣不大的学生来说减轻了压力，而对数学基础较好或对数学兴趣较大的学生来说，仍有发展的余地。

第一平台讲授的内容为：(一)函数、极限、连续；(二)一元函数的微分学；(三)一元函数的积分学；(四)无穷级数；(五)常微分方程初步；(六)矢量代数与空间解析几何；(七)多元函数的微分学；(八)多元函数的积分学。

第二平台讲授的内容为：(一)极限的精确化；(二)无穷级数续论；(三)多元函数的

微积分学续论;(四)二阶常系数微分方程;(五)近似计算。

讲授第一平台内容的总课时数约为 170 个课时,讲授第二平台内容的总课时数约为 50 个课时。

本教材可作为理、工、经、管、医类等专业微积分课程的教材。适当删减,还可作为文科类对数学要求较高的专业的高等数学教材。

遵循课程改革的思路,为方便学生更好地掌握微积分的精神,我们在编写过程中,尽量做到语言通俗,习题与例题难度适中,对某些章节作了与常规教材不一样的处置(如极限与连续),对某些内容我们讲得较细致(如微元法)。为了使学生对微积分的发展历史有一定的了解,我们编写了“微积分发展大事记”。为了使学生对著名数学家对微积分的贡献有所了解,我们在每章之后增加了一些著名数学家的简介,作为阅读材料。此外,在每章的开头,我们选录了一些数学名言,这些名言,当有益于微积分的学习。

本教材编写人员有莫国良、唐志丰、陈仲慈与叶显驰。其中第一章、第二章、第六章、第七章与第十章由莫国良执笔;第三章、第四章、第五章、第八章与第九章由唐志丰执笔;第十二章、第十三章与第十四章由陈仲慈执笔;第十一章、第十六章与第十七章由叶显驰执笔;第十五章由陈仲慈与叶显驰共同执笔。书中名家名言、数学家小传及微积分发展大事记由莫国良编写。

真诚地感谢丁善瑞教授,是他提议进行此项微积分教材的改革工作,本教材的主体思路也是由他设计的,他还为本教材写了序。

真诚地感谢金蒙伟教授,是他奉献了宝贵的时间对全书进行了审阅,并提出了许多宝贵的建议。

真诚地感谢吴明华副教授,他在本教材的编写工作中给予了许多有益的建议,许多次的讨论工作都是在他的主持下召开的,出版工作的具体联系事项,也都是由他帮助完成的。

真诚地感谢在试用期中的各位任课教师,他们不仅在试用稿试用之前花费许多时间进行舛错甄别,还在使用过程中不断地将失误之处加以纠正,并提出了许多宝贵意见。

真诚地感谢徐素君女士,她作为本书的责任编辑,在成书的过程中,始终给予了我们热忱的支持与帮助。

我们还要感谢浙江大学城市学院的院领导与教务部的领导,没有他们的支持与关心,这项工作也是不可能完成的。

由于成书仓促,诚盼有关专家、各校同行与广大读者给予批评指正,编者在此谨预致谢意。

编　者

2005 年 4 月

目　　录

第八章　常微分方程初步

她出生时十分弱小，
但每个时刻都在长大。
她在大地上蔓延，
并震撼着周围的世界。
（这段话被公元3世纪一位主教用来形容数学的发展。）

引自荷马史诗《伊利亚特》

在前面的章节中，我们已经给出了导函数及原函数的概念. 在这些概念基础上，本章将简要介绍一些含有未知函数的导函数的方程及其解法，同时给出此类问题的一些应用.

第一节　微分方程的概念

我们已经知道，函数的导数即为函数的瞬时变化率. 在许多实际问题中，反映某一现象变化规律的未知函数及其变化率往往满足一定的约束条件. 先看下面两个例子.

【例1】 已知某一曲线上各点处的切线斜率与该点横坐标的平方之差为2，且曲线经过点 $(0,1)$，求此曲线方程.

解　设曲线方程为 $y=f(x)$，根据题意，未知函数 y 及其变化率 $\frac{dy}{dx}$ 满足约束条件

$$\frac{dy}{dx}-x^2=2,$$

对此式进行移项得

$$\frac{dy}{dx}=x^2+2,$$

由不定积分的定义可得

$$y=\int(x^2+2)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3+2x+c,$$

因曲线经过(0,1)点，所以 $y\big|_{x=0}=1$，代入 $y=\frac{1}{3}x^3+2x+c$ 即得 $c=1$，从而求得

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x+1.$$

【例 2】 实验表明，物体在自由下落过程中受到的空气阻力与物体下落的速度成正比. 假设物体开始下落时初速度为零，求物体在开始下落 t 秒后的瞬时速度 $v(t)$.

解 设空气阻力与物体下落的速度的比例系数为 k，则作用在此物体上的合力

$$F=mg-kv(t),$$

由牛顿第二定理得

$$mg-kv(t)=ma,$$

而瞬时加速度 a 就是 $v(t)$ 的瞬时变化率，即

$$a=\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t},$$

由此可得未知函数 $v(t)$ 及其变化率 $\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}$ 满足约束条件

$$mg-kv(t)=m\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t},$$

即

$$m\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}+kv(t)=mg,$$

且

$$v(0)=0.$$

此问题中 $v(t)$ 的求解方法，将在下一节中给出.

一般地，含有未知函数导数(或微分)的方程称为**微分方程**. 未知函数是一元函数的微分方程称为**常微分方程**，未知函数是多元函数的微分方程称为**偏微分方程**. 本章只讨论常微分方程(简称为微分方程)的情形.

微分方程中未知函数导数的最高阶数称为该微分方程的**阶**. 例如

$y'-xy=x^2$，$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y^2=3$ 是一阶微分方程；

$y''-3y'+4y=\mathrm{e}^x$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-xy=0$ 是二阶微分方程.

n 阶微分方程的一般形式可写成 $F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0$，此处 x 是自变量，y 是未知函数，$y',y'',\cdots,y^{(n)}$ 依次是未知函数的一阶，二阶，…，n 阶导数.

若微分方程是未知函数及其各阶导数的一次方程，则称此微分方程是**线性的**；否则称为**非线性的**. 例如

$y'-xy=x^2$，$y''-3y'+4y=e^x$ 都是线性的；而 $x\dfrac{dy}{dx}+y^2=3$ 及 $y'y=1$ 都是非线性的.

若函数 $y=f(x)$ 满足微分方程 $F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})$，即

$$F(x,f(x),f'(x),f''(x),\cdots,f^{(n)}(x))=0,$$

则称函数 $y=f(x)$ 是微分方程 $F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0$ 的**解**. 微分方程的解可以是显函数，也可以是隐函数.

【例 3】 验证 $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$ 是二阶微分方程 $y''-y'-2y=0$ 的解.

证

$$y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x},$$
$$y'=2c_1e^{2x}-c_2e^{-x},$$
$$y''=4c_1e^{2x}+c_2e^{-x}.$$

将以上三式代入微分方程左边，得

$$y''-y'-2y=4c_1e^{2x}+c_2e^{-x}-(2c_1e^{2x}-c_2e^{-x})-2(c_1e^{2x}+c_2e^{-x})=0,$$

即 $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$ 满足方程 $y''-y'-2y=0$，因此 $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$ 是微分方程 $y''-y'-2y=0$ 的解. □

例 3 中，微分方程 $y''-y'-2y=0$ 的解 $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$ 含有两个独立的（即不可合并的）任意常数 c_1 和 c_2，当它们分别取不同的值时，就得到不同的解.

如果微分方程的解包含任意常数，且独立的任意常数个数与微分方程的阶数相同，那么此解称为微分方程的**通解**. 在通解中，当任意常数取确定的值时，相应得到的解称为微分方程的**特解**. 因此，特解中不再包含任意常数.

例 1 中，$y=\dfrac{1}{3}x^3+2x+c$ 即是 $\dfrac{dy}{dx}-x^2=2$ 的通解；$y=\dfrac{1}{3}x^3+2x+1$ 则是 $\dfrac{dy}{dx}-x^2=2$ 的一个特解.

例 3 中，$y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$ 即是微分方程 $y''-y'-2y=0$ 的通解；而 $y=2e^{2x}-e^{-x}$ 则是一个特解.

如果给定一定的附加条件，则可由微分方程的通解得到相应的特解，称这样的附加条件为**初始条件**（也称**定解条件**）. 如例 1 中的 $y\big|_{x=0}=1$，例 2 中的 $v(0)=0$ 都是初始条件. 由于 n 阶微分方程的通解含有 n 个独立的任意常数，因此，n 阶微分方程的初始条件中往往需含有 n 个独立的条件，才能确定一个特解. 带有初始条件的常微分方程称为常微分方程的**初值问题**.

【例 4】 求微分方程初值问题 $\begin{cases} y''-y'-2y=0; \\ y\big|_{x=0}=0,\ y'\big|_{x=0}=3 \end{cases}$ 的解.

解 从例 3 知 $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$ 是微分方程 $y''-y'-2y=0$ 的通解，

$$y' = 2c_1 e^{2x} - c_2 e^{-x},$$

由初始条件 $y\big|_{x=0} = 0, y'\big|_{x=0} = 3$ 得

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ 2c_1 - c_2 = 3, \end{cases}$$

因此有 $$c_1 = 1, c_2 = -1,$$

即得满足初始条件的特解为

$$y = e^{2x} - e^{-x}.$$

微分方程特解的图形是一条曲线，称此曲线为该方程的**积分曲线**. 而通解的图形在几何上则表示**积分曲线族**.

第二节　一阶微分方程

一、可分离变量的微分方程

形如

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \tag{8.1}$$

的微分方程称为**可分离变量的微分方程**. 当 $g(y) \neq 0$ 时，此方程可化成：

$$\frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx. \tag{8.2}$$

(8.2) 式的左边只包含变量 y，而右边只包含变量 x，对变量进行了分离，两边同时积分，就可求出通解.

【例 1】 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = 3x^2 y$ 的通解.

解　当 $y \neq 0$ 时，分离变量得

$$\frac{1}{y}dy = 3x^2 dx,$$

两边积分 $$\int \frac{1}{y}dy = \int 3x^2 dx,$$

得 $$\ln|y| = x^3 + C_1,$$

即 $$y = \pm e^{x^3 + C_1} = \pm e^{C_1} \cdot e^{x^3},$$ 其中 C_1 是任意常数.

记 $C = \pm e^{C_1}$，则 C 是不等于零的任意常数，故当 $y \neq 0$ 时通解可写成

$$y = Ce^{x^3}.$$

当 $y = 0$ 时，常数函数 $y = 0$ 也满足微分方程 $\frac{dy}{dx} = 3x^2 y$，即常数函数 $y = 0$ 也是微

分方程$\dfrac{dy}{dx}=3x^2y$的解. 式$y=Ce^{x^3}$中,若取$C=0$,则包含了$y=0$这一特解.

综合$y\neq 0$与$y=0$两种情形,微分方程$\dfrac{dy}{dx}=3x^2y$的通解可写成

$$y=Ce^{x^3},$$

其中C是任意常数.

从本例可见,在解微分方程过程中,当两边同除某一式子时,需要注意除式不能等于零. 而当除式等于零时,常需单独分析求解,但此时求得的特解往往又包含在通解之中.

【例 2】　求$(1+x^2)y\mathrm{d}y-x\mathrm{d}x=0$满足初始条件$y\big|_{x=0}=1$的特解.

解　将微分方程移项分离变量得

$$y\mathrm{d}y=\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x,$$

两边积分

$$\int y\mathrm{d}y=\int\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x,$$

得通解

$$y^2=\ln(1+x^2)+C,$$

即

$$y=\pm\sqrt{\ln(1+x^2)+C}.$$

由初始条件$y\big|_{x=0}=1$,得上式只能取正号,且$1=\sqrt{\ln 1+C}$,即$C=1$. 因此,满足初始条件$y\big|_{x=0}=1$的特解为

$$y=\sqrt{\ln(1+x^2)+1}.$$

二、齐次型微分方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\tag{8.3}$$

的微分方程称为**齐次型微分方程**.

为了解齐次型方程(8.3),可令$\dfrac{y}{x}=u$,即$y=ux$,代入(8.3)得

$$\frac{\mathrm{d}(ux)}{\mathrm{d}x}=\varphi(u),$$

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u),$$

分离变量后得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

对上式两边积分后，再用 $u=\frac{y}{x}$ 回代即可得到原齐次型微分方程的通解.

【例 3】 求微分方程 $(x^2+xy)\mathrm{d}y-y^2\mathrm{d}x=0$ 的通解.

解 原方程即为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y^2}{xy+x^2},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\left(\frac{y}{x}\right)+1},$$

此方程为齐次型微分方程，令 $\frac{y}{x}=u$，即 $y=ux$ 代入化简可得

$$\left(1+\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u=-\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

两边积分得

$$u+\ln|u|=-\ln|x|+C_1,$$

即

$$\ln|ux|=-u+C_1,$$

从而有 $ux=\pm e^{C_1}e^{-u}$，记 $C=\pm e^{C_1}$，并用 $u=\frac{y}{x}$ 回代即得通解

$$y=Ce^{-\frac{y}{x}}.$$

除齐次型微分方程可化为可分离变量微分方程外，有许多其他类型的方程，经过适当的变量代换后也可化为可分离变量的微分方程. 代换的方法常常根据方程的不同而不同，而没有一定的规律可循.

【例 4】 解初值问题 $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(x+y)^2;\\ y\Big|_{x=0}=1.\end{cases}$

解 微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(y+x)^2$ 既不是齐次型微分方程，也不是可分离变量的微分方程. 作变换 $u=y+x$，即 $y=u-x$ 代入微分方程得

$$\frac{\mathrm{d}(u-x)}{\mathrm{d}x}=u^2,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u^2+1,$$

分离变量后再两边积分

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2+1}=\int\mathrm{d}x,$$

得
$$\arctan u = x + C,$$
用 $u = y + x$ 回代即得通解 $\quad \arctan(x+y) = x + C,$

由初条件 $y\big|_{x=0} = 1$，得 $C = \dfrac{\pi}{4}$，因此初值问题的解为
$$\arctan(x+y) = x + \frac{\pi}{4}.$$

三、一阶线性微分方程

形如
$$y' + p(x)y = q(x) \tag{8.4}$$
的微分方程称为一阶线性微分方程. $q(x)$ 称为**自由项**，当 $q(x) \equiv 0$ 时，方程(8.4) 称为是**齐次的**；相应地，若 $q(x)$ 不恒等于 0，则称方程(8.4) 是**非齐次的**. 有时，我们也称
$$y' + p(x)y = 0 \tag{8.5}$$
为非齐次线性方程(8.4) 对应的**齐次线性方程**. 注意，这里所说的齐次线性方程与以前所述的形如$\dfrac{dy}{dx} = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$的齐次型微分方程是两个完全不同的概念，读者需要加以区分.

1. 一阶齐次线性方程的通解

对于齐次线性方程(8.5)，可采用分离变量法求其通解. 方程(8.5) 分离变量得
$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx,$$
两边积分
$$\int \frac{dy}{y} = \int -p(x)dx,$$
得
$$\ln|y| = -\int p(x)dx + C_1,$$
即
$$y = Ce^{-\int p(x)dx}, \tag{8.6}$$
其中 C 为任意常数.

2. 一阶非齐次线性方程的通解

对于非齐次线性方程(8.4)，一般难以直接采用分离变量法求得通解. 将方程(8.4) 改写为
$$\frac{dy}{y} = \frac{q(x)}{y}dx - p(x)dx,$$
两边积分得
$$\ln|y| = \int \frac{q(x)}{y}dx - \int p(x)dx,$$
即
$$y = \pm e^{\int \frac{q(x)}{y}dx} \cdot e^{-\int p(x)dx},$$

记未知函数 $$\pm e^{\int \frac{q(x)}{y} dx} \equiv u(x),$$
上式变为
$$y = u(x)e^{-\int p(x)dx}. \tag{8.7}$$

由于 $u(x)$ 仍然是未知函数,因此(8.7)式并未给出(8.4)的通解.然而(8.7)式启发我们,方程(8.4)的通解结构可能为对应的齐次方程(7.5)的解 $e^{-\int p(x)dx}$ 乘以一个未知函数 $u(x)$.或者说,只要将对应齐次方程的通解(8.6)中的常数 C 替代成未知函数 $u(x)$,便得到非齐次线性方程(8.4)的通解结构.如果我们能设法求出未知函数 $u(x)$,由此也就求得了(8.4)的解.

为了求出 $u(x)$,现将(8.7)代入(8.4)式:
$$[u(x)e^{-\int p(x)dx}]' + p(x)u(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$
即
$$u'(x)e^{-\int p(x)dx} + u(x)[e^{-\int p(x)dx}]' + p(x)u(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$
$$u'(x)e^{-\int p(x)dx} + u(x)e^{-\int p(x)dx}[-p(x)] + p(x)u(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$
得
$$u'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$
于是有
$$u'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx},$$
两边积分得
$$u(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C,$$
从而得到非齐次线性方程(8.4)的通解为
$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right]. \tag{8.8}$$

在解非齐次微分方程过程中,往往先求出对应的齐次方程的通解,再把此通解中的任意常数 C 改变为待定函数 $u(x)$,代入相应的非齐次方程解得 $u(x)$,从而得到非齐次方程的通解.这种方法叫做**常数变易法**.此方法具有一定的普遍性,对高阶线性微分方程及线性微分方程组也适用.

【例 5】 利用常数变易法求微分方程 $y' - \frac{1}{x+1}y = e^x(1+x)$ 的通解.

解 相应的齐次方程为
$$y' - \frac{1}{x+1}y = 0,$$
分离变量后即为
$$\frac{dy}{y} = \frac{1}{x+1}dx,$$
两边积分得

$$\ln|y| = \ln|x+1| + C_1,$$

由此得到齐次方程的通解

$$y = C(x+1).$$

令 $C = u(x)$，即设原方程的通解为 $y = u(x)(x+1)$，代入原方程，有

$$[u(x)(x+1)]' - \frac{1}{x+1}[u(x)(x+1)] = e^x(1+x),$$

求导并整理后得

$$u'(x) = e^x,$$

两边积分得

$$u(x) = e^x + C,$$

于是原方程的通解为

$$y = (x+1)(e^x + C).$$

也可用公式(8.8)直接求一阶非齐次线性方程的通解.

【例 6】 解微分方程 $x\dfrac{dy}{dx} - 2y = x^3e^x$.

解　原方程可化为　$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = x^2e^x,$$

由公式(8.8)得　$$y = e^{\int\frac{2}{x}dx}\left[\int x^2e^xe^{-\int\frac{2}{x}dx}dx + C\right] = e^{\ln x^2}\left(\int x^2e^xe^{-\ln x^2}dx + C\right)$$

$$= x^2\left(\int e^xdx + C\right) = x^2(e^x + C).$$

【例 7】 求解上一节例 2 中的初值问题 $\begin{cases} m\dfrac{dv(t)}{dt} + kv(t) = mg, \\ v(0) = 0. \end{cases}$

解　方程即为　$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{k}{m}v(t) = g,$$

由公式(8.8)得

$$v(t) = e^{-\int\frac{k}{m}dt}\left[\int ge^{\int\frac{k}{m}dt}dt + C\right] = e^{-\frac{k}{m}t}\left[\int ge^{\frac{k}{m}t}dt + C\right] = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k},$$

将初始条件 $v(0) = 0$ 代入上式得　$C = -\dfrac{mg}{k}$,

因此物体在开始下落 t 秒后的即时速度 $v(t)$ 为

$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

【例 8】 解微分方程 $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{x}y = \dfrac{1}{2}\sqrt{x}y^2$.

解　此方程虽然是一阶的，却不是线性方程，但可通过变量代换化为线性方程求