吕世虎　徐兆亮
张定强　牟录贵　著

从高等数学看中学数学

科学出版社

从高等数学看中学数学

吕世虎　徐兆亮
张定强　牟录贵　著

科学出版社
1995

（京）新登字 092 号

内 容 简 介

本书属于近年来新兴的边缘学科——数学教育科学的范畴。其主要特征是以现代系统论为指导，从教育出发，深层次地从纵横两个方面揭示了有关高等数学与中学数学的内在联系。

本书共分五讲。第一讲，从数学分析看中学数学；第二讲，从高等几何看中学数学；第三讲，从高等代数看中学数学；第四讲，从组合数学看中学数学；第五讲，从集合论看中学数学。

本书可供高等师范院校数学系专业教师、学生，以及中学教师使用。

从高等数学看中学数学

吕世虎　徐兆亮　张定强　牟录贵　著

责任编辑　朴玉芬

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100[illegible]

新世纪印刷厂 印刷

北京市蓝地公司激光照排

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1995 年 5 月 5　第 一 版　　开本：850×1168 1/32

1995 年 5 月 5　第一次印刷　　印张：8

印数：1—2 500　　字数：205 000

ISBN 7-03-004496-7/O・775

定价：9.40 元

序

作为培养未来中学数学教师的高等师范院校数学系，自本世纪 30 年代开始设立了“初等数学研究”课，至今已有 60 年的历史了（50 年代更名为“初等数学复习及研究”）。其设课目的，主要是通过这门课的教学，使大学生——未来的中学数学教师对中学数学教学内容中某些理论的论述深度有进一步的了解；对其中某些知识的实质性的认识，得到进一步的深化；对其中某些选配得不够完整的知识，得到进一步的充实；以及进一步熟练地掌握用初等方法解数学问题的技能。从几十年来学生自高等师范院校数学系毕业后至中学任教数学课的实践经验、所取得的较高的教学质量可知，开设这门课的目的是达到了。设立这门课是必要的。

自不待言，在这门课的教学中，为了达到教学目的，必须以较严密的、较完备的初等数学理论知识，以及较为宽广的初等数学方法为基础；而另一方面，在教学中，更应以高等数学的有关知识、高等数学的观点为依据来分析、论述中学各项数学知识和方法，才能更加充分地达到设立这门课的目的。但是回顾几十年来的教学，讲授“初等数学研究”课的教学者，虽然在教学中不时地以高等数学的观点、有关的知识和方法来分析、论述中学数学的教学内容；高等数学课的教者，虽然在教学中也不时地以高等数学的观点、有关的知识和方法来分析、论述中学数学的教学内容，然而大多是没有系统、也没有什么计划，随机地分析和论述。因而，在高等师范院校数学系中，高等数学课与“初等数学研究”课究竟应如何地紧密联系，“初等数学研究”课中，究竟应怎样地以高等数学的观点、有关的知识和方法来分析、论述中学数学的教学内容，一直是个有待解决的问题。

随着社会发展的需要，近20年来，数学教育工作者不断地进行中学数学教学改革的研究与实验。其中首先是教材内容的改革。这就是本着需要与可能的精神，一方面由原有的中学数学教材中精选出当前仍需要的，另一方面则加入更新的、并为当前所需要的数学知识。而对保留下的原有的内容，还要求在可能的前提下，用近代的、现代的数学观点、思想、方法来阐述。这样，上述的有待解决的问题，就显得更重要了。它更加直接地关系着未来中学数学教师的培养。

前不久，我的老友、西北师范大学数学系的王仲春教授送来一份名为《从高等数学看中学数学》的书稿，这是王老师与吕世虎、徐兆亮、张定强和牟录贵等老师合撰的。是在系内几次开设这门课、进行教学实验时，所编讲义的基础上修改而成，准备出版的。我读后非常高兴，感到前述的有待解决的问题，已见端倪了。

这部书的内容，分为五大讲，即第一讲，从数学分析看中学数学，第二讲，从高等几何看中学数学，第三讲，从高等代数看中学数学，第四讲，从组合数学看中学数学，第五讲，从集合论看中学数学。纵观全书，主要有如下的特点：

(1)按高等数学的分支来论述中学数学中有关的知识和方法。这可使学生认清中学数学中各项知识和方法与高等数学中有关分支的密切关系。在中学任教处理教材时，可取得得心应手之高效。

(2) 每讲内，都是在确定了所要分析的中学数学中的具体内容之后，先较详地阐述需用的高等数学的有关知识和方法，而后立专节用以分析、论述中学数学中有关的具体内容。这可使学生得以较深刻、较具体地认清所论中学数学内容的实质，并且还能在独立认识其它的中学数学内容的实质上，取得举一反三之效。

(3) 每讲开始都先介绍各自数学分支的发生和发展的简单的历史。这可使学生明了各分支的理论是为用于何处而产生，于今又扩大到应用于哪些方面，以明其发展方向。另一方面，更可使

学生了解人们对理论认识的不断深化的过程，用以在将来任教中学数学课时，在理论深度的处理上，能针对中学生的特点，取得有的放矢之效。

尽人皆知“万事开头难”。本书的撰述可谓解决多年来有待解决的问题的开头之作，确实得来不易。正如作者自己所言“由于这类书目前还少见，因此，有待研究的问题还很多，…。”但是“一件事开头开好了，就等于事情成功了一半”，这也是尽人皆知的。本书的撰成，可谓“开了个好头”。相信作者必将在此基础上，继续地研究出更高水平成果来；也相信本书问世后，必将使广大的数学教育工作者得到很大的启发，也愿参与这项研究工作，以使高等师范院校数学系培养出水平更高的中学数学教师来。

值此本书即将付梓之际，略志数语如上，用以祝贺本书的出版。

钟善基

1994 年 8 月于北京师范大学

前　　言

用高等数学的观点、原理和方法，认识、理解和解决中学数学问题，是高等师范院校数学专业突出师范性的一个重要问题。近几年来，我们对这一关系到高师院校数学专业教育改革的重要课题进行了探索和研究，并作了大量的教学实验，摆在面前的这本《从高等数学看中学数学》就是在实验讲义的基础上修改而成的。

由于本书涉及的内容范围比较广，为了便于读者阅读和尽量突出本书的主要目标——“用高于下”，因此，没有强调全书的整体系统性和逻辑性，而每一讲都有其特点和独立性。

为了突出师范性、实用性和可读性，书中内容尽力做到少而精、针对性强，对“用高于下”尽力做到具体化。

本书可作高师院校数学专业选修课教材和教学参考书，也可供中学数学教师参考。

我们在写作过程中曾先后得到马忠林教授、钟善基教授、丁尔升教授、曹才翰教授的热情帮助和大力支持，在此表示衷心感谢。

这本书从构思、写作到定稿的整个过程始终得到王仲春教授的悉心指导，书中的一些章节是根据王仲春教授给研究生讲课用的提纲和讲稿充实形成的。在此谨向我们的导师王仲春教授表示崇高的敬意和衷心的感谢。

应该提到的是，本书第三讲的初稿是由天水师专的侯维民完成的。

由于这类书目前还少见，因此有待研究的问题还很多，兼之作者水平的有限，论述不周以至谬误之处必不可免，恳请读者指正。

作　　者

1994 年 4 月于西北师范大学

目　录

第一讲　从数学分析看中学数学

§1.1　由初等数学到数学分析

一、数学分析的形成是初等数学发展到一定阶段的必然产物

纵观数学史，数学发展的每一个新时期，不仅在内容上更加丰富，而且更重要的是在思想方法上发生了根本性的变化。这种质的变化不是破坏和取消原有理论，而是用深化和推广原有理论的方式进行的。数学分析的形成和发展也正是体现了这一点。数学分析的形成是深深扎根于初等数学基础上的，它的一些基本概念，如导数、积分、无穷级数的收敛等，都是在初等数学有关问题的基础上发展而来的。导数是在用代数运算求直线斜率这一问题的基础上，发展成为用极限方法求曲线上点的切线斜率而形成的；积分是在用代数运算求直线所围成的平面图形面积的基础上，发展成为用极限方法求曲线所围成的面积而形成的；无穷级数的求和则是在用代数运算求有限级数之和的基础上，发展成为用极限方法求无穷级数之和而形成的。从这些新概念的发展过程看，都是由于实践中需要解决的一些问题不能够用算术、初等代数或初等几何的简单方法来求解，从而寻求新的方法成为必然的发展需要。第一类问题最明显而简单的例子是：在非均匀运动中求某一瞬时的速度问题，与此相类似的关于量的变化率问题，以及在曲线上求作切线的问题。但是初等数学方法只能求出平均速度、平均变化率。对于切线，只能作出圆及另外少数特殊曲线上点的切线，并且没有一般方法。这样，要解决上述提出的问题，必须在已有的基础上作进一步的探索。人们经历了许多世代顽强的探究，结果产生了微分法，

使这类问题应用导数这一新概念得到普遍的解决。另一类问题最简单的例子是求曲线形的面积问题、非均匀运动中所经历的总路程问题，以及变力作功问题。而初等数学中只能计算直线所围的多边形面积、圆形（包括圆扇形和圆弓形）面积，此外，古希腊的数学家阿基米德（Archimedes，公元前287—前212）还提供了计算抛物线弓形面积的方法，但他是依据抛物线的特殊性质而得到的富有机智性的方法。若要求得其它曲线形的面积，则需要更加机智而困难的探索，这显然不是解决这类问题的可行途径。因此，如何利用已有的初等的求面积公式去求一般曲线形面积就成为解决这类问题的必然发展趋向，这导致了具有普遍性的积分方法的产生。这些新概念、新方法的产生，不仅解决了最初提出的问题，而且应用领域在不断扩大，从而便在初等数学的基础上形成了以微积分为中心的数学分析。

从以上数学分析产生的简单追溯可见，数学分析的形成是初等数学发展到一定阶段的必然结果。

二、数学分析的发展和完善是一系列数学概念、原理和方法不断发展和完善的结果

微积分又叫无穷小分析，它的产生革新了数学的观念、思想和方法，是人类思维的伟大成果。

由于近代天文学、力学的发展，也由于近代数学本身的发展，瞬时速度、切线问题、各类求积问题相继被提到了数学家们面前，寻求这些问题的解决，导致了微积分的创立。在创立微积分的道路上，许多数学家做出了重要的贡献：1635年意大利数学家卡瓦列里（Cavalieri，1598—1647）的不可分元法可以说为微积分铺下了第一个阶梯；1637年法国数学家笛卡尔（Descartes，1596—1650）、费马（Fermat，1608—1665）的解析几何为微积分铺下了第二个阶梯；费马在极值方面的工作，以及英国数学家巴罗（Barrow，1630—1677）的微分三角形等为之铺下了第三个阶梯；等等。更广泛地说，微积分是建立在几百年中许多人一点一滴的工作之上的，

而最突出的是英国数学家牛顿(Newton,1643—1727)和德国数学家莱布尼兹(Leibniz,1646—1716)。他们以超人的能力,从前人纷繁的成果中清理提炼出精粹的思想方法,迈出了空前的巨人的一步。在17世纪后半叶,他们各自独立地几乎同时建立了微积分的方法和理论。

在微积分创立中起核心作用的是无穷小方法。它的早期萌芽可以追溯到古希腊。当时最伟大的古希腊原子论者德谟克利特(Demokritos,约前460—约前370)就曾把原子论思想应用于数学,并提出了所谓的"数学原子论",认为几何形体是由特殊的"数学原子"组成的,而它们的面积或体积就分别等于由这些数学原子组成的行列或原子层的总和。毕达哥拉斯(Pythagoras,古希腊,约前580—约前500)学派曾提出过"单子说",按照他们的观点,单子是物质客体及整个自然界的终极元素。从它在数学中的应用来看,单子事实上就相当于无穷小量,如几何线段就被说成由无限多个单子构成的。"数学原子论"、"单子说"这些思想对后来数学的发展,尤其是无穷小思想方法的产生,有着深远的影响。例如15世纪的红衣主教尼古拉斯(Nicholas)利用无穷小方法求得了圆的面积。

首先,尼古拉斯通过无穷分割法得出了无穷小三角形OAB(如图1.1),其中$\overset{\frown}{AB}$是无穷小量,长为l,r是圆的半径。其次,尼古拉斯指出,由于$\overset{\frown}{AB}$是无穷小量,所以无穷小三角形既可看作是直边三角形,又可看作曲边三角形,由于三角形OAB是直边三角形,它的面积就等于$\frac{1}{2}l\cdot r$,又由于它是曲边三角形,它的无穷累积就是圆,因此圆的面积是

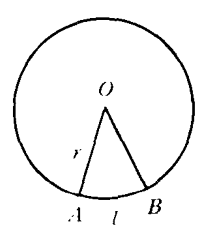

图 1.1

$\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{2}r\,dx=\frac{1}{2}r\cdot x\Big|_0^{2\pi}$

$$S=\sum_{l}\frac{1}{2}l\cdot r=\frac{1}{2}r\sum_{l}l=\frac{1}{2}r\cdot 2\pi r=\pi r^{2}。$$

欧洲文艺复兴时期以后,由于研究物体运动的需要,无穷小方

法得到了更加广泛的应用。例如费马就曾用如下方法得到了非均匀运动物体的瞬时速度。

首先，截取一个时间间隔 Δt，并求出运动物体在这一时间间隔内所通过的距离 Δs。其次，求取$\frac{\Delta s}{\Delta t}$，显然这就是运动物体在这一时间间隔内的平均速度，最后令 $\Delta t \to 0$，所截取的时间间隔就是一个无穷小量 dt，而相应的速度$\frac{ds}{dt}$就是运动物体在这一时刻的瞬时速度。

以上两个例子中，无穷小方法的应用十分自然，其中所采用的“化曲为直”、“以直代曲”的方法，正是微积分的基本思想。

当初尽管无穷小方法在逻辑上还不十分严格，但正如匈牙利数学家波耶(Bolyai，1802—1860)所说：“不管如何，这个方法想得非常好，使它立刻为数学家们所接受。”这样，无穷小概念就被引进了分析学，而且一直占有这门学科的基础地位，直到两个世纪以后，才让位于严格定义的极限概念。

纵观微积分的创立过程，首先是在思维方式上发生了质的变化。17 世纪数学的大发展，在很大程度上是由于对数学的严格性的忽略，而使得直观推断思想得到了大的发展。直观推断这种思维方式的发展，使数学家大胆地开辟新的道路，大大超过了前人做过的所有工作。尽管阿基米德的力学方法不为人知，但数学家已经开始象他那样进行论证，运用“无穷小量”这一概念来解决问题。例如一个平面图形被认为是由平行的线段组成的。并且这时出现了一种不够确切但很有用的观点，即平面图形的面积被看作是相应的无穷窄的长方形的面积之和。对于与微积分的产生有直接联系的切线问题和计算弧长问题，也用这种思想来讨论：先假定切线存在，曲线本身被看作由无穷小的线段所组成 这些线段有时被认为是切线的一部分，有时被认为是弦，于是弧长就被推想为这些无穷小线段的长度之和。这种讨论问题的方法尽管在数学中很不确切，甚至存在着许多矛盾，但在解决实际问题中却显示了极大的威力，正因为它在实践中的正确性，才使得数学家有信心沿着自己的道

路继续前进，并取得了辉煌的成就。牛顿和莱布尼兹当时正是冲破了严格论证这种传统思想的束缚，他们论证微积分的合理性不是根据严格的逻辑推理，而是根据它的内容完整、前后一致，并且有多方面的应用。这样他们在建立微积分理论的道路上可以说迈出了真正有意义的一步。

然而，众所周知，数学科学的特点就是高度的抽象性、逻辑的严谨性和应用的广泛性。无穷小方法虽然在微积分创建初期发挥了巨大作用，但它在逻辑推导中不能自圆其说。下面我们以求自由落体的瞬时速度为例来说明牛顿、莱布尼兹微积分中存在的问题：

为求自由落体 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 在 $t=t_0$ 时的瞬时速度，先求出时间间隔 Δt 内的平均速度

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{\frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2-\frac{1}{2}gt^2}{\Delta t}=gt_0+g\Delta t,$$

然后让 $\Delta t=0$，可得在 $t=t_0$ 时的瞬时速度 $v(t_0)=gt_0$，但 $\Delta t=0$ 时，$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{0}{0}$，这是一个没有意义的式子；若 $\Delta t\neq 0$，则 $\bar{v}$ 就永远是平均速度，即求不出瞬时速度。这样就出现了下列矛盾

(i)要使$\frac{\Delta s}{\Delta t}$有意义，只有 $\Delta t\neq 0$；

(ii)要求出瞬时速度 $v(t_0)$，又必须 $\Delta t=0$。这就是说 Δt 在同一问题中要同时担任两个不同的互相矛盾的角色，这在逻辑上违反了同一律，因此在数学中是不能允许的。牛顿和莱布尼兹为了摆脱这个困境，提出了种种解释（如牛顿用“最初比”和“最后比”来解释），但都遇到了逻辑上的困难，难以使人理解和信服。

随着无穷小方法的确立以及这一方法在应用上越来越广泛和日益的深入，关于它的基本概念、逻辑困难等问题就更加尖锐地摆在人们面前。于是伴随着人们对微积分基础的研究，从 17 世纪末开始以及整个 18 世纪，在西欧各国的科学界、思想界展开了一场规模宏大的激烈的争论，这场争论的结果为微积分奠定了一个可靠的逻辑基础：这就是由法国数学家柯西(Cauchy，1789—1857)

建立的极限理论以及德国数学家魏尔斯特拉斯(Weierstrass，1815—1897)提出的极限 ε-δ 定义，随后由魏尔斯特拉斯、戴德金(Dedekind，1831—1916)和康托尔(Cantor，1845—1918)三人同时建立了实数理论。从此极限方法真正取代了无穷小方法，并在数学分析中占据了基础地位。由此可见，数学分析的发展和完善就是这一系列概念、原理和方法的发展和完善的结果。

数学分析是在初等数学的基础上，经过一系列数学概念、原理和方法的演变，最终成为一门高度抽象、逻辑严密的学科体系。然而，数学发展除了抽象程度不断提高的特点外，还有着从抽象到具体发展的一面。数学就是在抽象与具体的辩证运动中实现自己的无限发展。正如变量数学与初等数学的关系一样，一方面初等数学是变量数学形成的基础；另一方面，变量数学的发展，使得数学在研究对象上较初等数学更加广泛，在概念、原理和方法上更加丰富。因此，用变量数学的某些概念、原理和方法作为指导，对初等数学的研究从深度和广度上都会有更大的发展，这样就实现了数学发展的逆向。

§1.2　数学分析的特征概述

一、数学分析的方法特征概述

数学分析之所以能解决初等数学所不能解决的问题，其根本原因就是数学分析在初等数学的基础上，引进了一个新的思想方法，即极限方法。极限方法是数学分析的基础，也是数学分析解决问题贯彻始终的基本方法。极限方法与初等数学方法有本质的差异，这种本质的差异主要体现在极限方法充满了辩证思想。这是因为，极限概念的 ε-δ 与 ε-N 形式定义中，扮演主要角色的 ε 具有二重性，即 ε 既有确定性又有任意性。这种集确定性与任意性于一身的特点，深刻地反映了静与动、不变与变、有限与无限的对立统一

的辩证关系。具体地讲，就是用一系列静态去刻划和把握动态，这种静与动的辩证关系，正符合事物发展变化的一般规律。因此，建立在极限思想方法基础上的数学分析可以揭示和把握常量与变量、直线与曲线、匀速运动与变速运动等的对立统一及矛盾相互转化的关系，这恰恰是初等数学方法所无能为力的。为了更加具体地理解和认识上述特征，我们不妨就数学分析的核心内容中的两个基本概念——导数和定积分建立的全过程及其特点作一剖析。

首先，就导数概念建立的全过程及其特点进行剖析。

我们知道，为了求函数 $f(x)$ 在 x_0 点的变化率，要进行以下步骤：

第一步，从 x_0 出发，以 x_0 为中心“张开”一个小区间；

第二步，利用已有的代数知识和方法，求出 $f(x)$ 在该小区间上的平均变化率；

第三步，让此小区间向 x_0 点“收缩”，经过一个“无限”变小的飞跃过程，由函数 $f(x)$ 在 x_0 点邻近的平均变化率获得在 x_0 点的变化率，即函数 $f(x)$ 在 x_0 点的导数。

上述处理问题的思想方法，从所采用的手段和过程看，与初等代数和几何的方法根本不同，它不是“直接”和“直线”式进行的，而是采取了“欲进姑退”的迂回方式，即为了求精确值而先求近似值然后再由近似值过渡到精确值。从本质上讲，这种思想方法正是利用了点与点之间函数值的内在联系与制约的本质特征，从而利用函数 $f(x)$ 在 x_0 点邻近的变化状态去揭示和把握 $f(x)$ 在 x_0 点的变化状态。

其次，我们来剖析定积分概念的建立及其特征。

建立积分概念的基本思想和步骤与微分概念的建立大体相似，但由于积分是一个反映“整体”性质的概念，而微分却是描述“局部”特性的概念，这就导致了具体作法上的差异。具体地说，为了求函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上的定积分，一般分为如下四个步骤：

第一步，从要求的整体出发，将整体“化整为零”；

第二步，在被分割开的每一个局部范围内“以直代曲”，用初等

代数、几何方法求出各个局部的近似值；

第三步，“积零为整”求出整体的近似值；

第四步，“无限求和”达到最终目的，即求出整体的精确值。

从以上四个步骤可以清楚地看出：积分概念的建立和求积过程，也是采取由“精确到近似，再由近似到精确”的迂回曲折的手段和途径。通过这种曲折的道路，使得所求的整体由未知转化为已知，实现了“直”与“曲”、“有限”与“无限”、“近似”与“精确”的矛盾转化。利用这种矛盾转化的规律性，解决了用初等代数、几何方法无法解决的问题，创造了一种全新的数学方法。

在上述剖析的基础上，我们不难从更深的层次，即哲学的高度看出数学分析的基本方法——极限方法，正是对立统一规律、否定之否定规律、量变与质变矛盾转化等辩证法的基本哲学思想在数学领域中的具体体现和运用。因此我们可以说，数学分析是建立在辩证法思想基础上的，这也正是数学分析之所以在认识客观世界和改造客观世界方面，其理论价值和应用价值都有强大生命力的根本原因所在。

二、数学分析的结构特征概述

数学分析是建立在实数理论基础上的，而实数 R 是由代数结构、序结构和拓扑结构联合组成的一个混合结构。因此，从数学结构角度看，数学分析的结构比代数、几何结构复杂得多。这就给人们认识和掌握数学分析的基本思想和方法带来了很多困难。但另一方面，正因为结构比较复杂，又强化了它的功能。

§1.3 从数学分析的观点、原理与方法看中学数学

一、数学分析的辩证观点对加深理解中学数学问题的指导作用

数学分析不仅继承了初等数学的方法，而且又引进了新的思

想方法——极限方法。运用极限方法，常量与变量、直与曲、均匀与非均匀等可实现相互转化。所以，从方法论的角度来讲，数学分析的有关知识和方法对理解和解决一些中学数学问题会起到导向作用。如用导数工具求出三次函数的极值，便可诱导出求三次函数极值的一般初等方法。

设有三次函数

$$y=x^3+px+q \ (p,q\in R),$$

用数学分析的方法求出此函数的极值。

因为

$$y'=3x^2+p,$$

所以当 $p>0$ 时，无驻点，因而也无极值点；当 $p=0$ 时，驻点 $x=0$，但此时 $y'=3x^2$ 在 $x=0$ 两侧不变号，故 $x=0$ 不是极值点，即 $p=0$ 时无极值点；当 $p<0$ 时，有二驻点 $x=\pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$，又

$$y''=6x,\quad y''|_{x=\sqrt{-\frac{p}{3}}}>0\quad,\quad y''|_{x=-\sqrt{-\frac{p}{3}}}<0\quad,$$

所以函数在 $x=-\sqrt{-\frac{p}{3}}$ 处取得极大值 $q-\frac{2}{9}p\sqrt{-3p}$，在 $x=\sqrt{-\frac{p}{3}}$ 处取得极小值 $q+\frac{2}{9}p\sqrt{-3p}$。

根据上述过程及结果，我们可以探寻出该问题的一个初等解法：

当 $p\geqslant 0$ 时，若 $x_2>x_1$，则

$$\begin{aligned}y_2-y_1&=(x_2^3+px_2+q)-(x_1^3+px_1+q)\\&=(x_2-x_1)(x_2^2+x_2x_1+x_1^2+p)\\&=(x_2-x_1)\left[\left(x_2+\frac{1}{2}x_1\right)^2+\frac{3}{4}x_1^2+p\right]>0,\end{aligned}$$

故函数在整个定义域内为增函数，因而无极值。

当 $p<0$ 时，令 $x=z-\sqrt{-\frac{p}{3}}$，代入 $y=x^3+px+q$，消去一次项，得