

高等数学

学习与考研指导

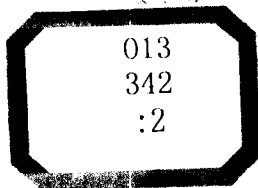
(下册)

侯云畅 主编

- 数学史料
- 释疑解惑
- 习题解难
- 教学要求
- 题型分析
- 考研真题



国防工业出版社
National Defense Industry Press



高等数学学习与考研指导

(下册)

编委会主任 朱林户 冯有前
主 编 侯云畅
编 者 (以姓氏笔画为序)
王国正 柏又青 董福安

国防工业出版社

·北京·

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学学习与考研指导(上,下)/侯云畅主编.
北京:国防工业出版社,2006.5
ISBN 7-118-04262-5

I. 高... II. 侯... III. 高等数学-自学参考资料
IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 153692 号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100044)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 710×960 1/16 印张 21 字数 378 千字
2006 年 5 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—5000 册 定价 20.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010) 68428422 发行邮购:(010) 68414474
发行传真:(010) 68411535 发行业务:(010) 68472764

目 录

第五章 多元函数的微分学及其应用	1
一、教学基本要求	1
二、释疑解惑	1
1. 如何正确理解多元函数的极限的定义?	1
2. 试问极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ 吗?	2
3. 求多元函数的极限有哪些方法?	3
4. 证明二重极限不存在有哪些方法?	6
5. 试述二重极限与累次极限的关系?	7
6. 函数在一点可微的另一充分条件	8
7. 如何判定函数的可微性?	9
8. 二元函数的偏导数与方向导数有何关系?	10
9. 二元函数在某点处沿任意方向的方向导数存在与 函数在该点处连续有何关系?	11
10. 用框图表示函数在一点有极限、连续、偏可导、 方向导数存在、可微与偏导数连续之间关系?	12
11. 将偏微分方程通过变量代换化为简单方程有哪些 方法?	13
12. 试证多元函数极值存在的充分条件.	15
13. 二元函数在某点处沿任一条直线均取得极小值, 则函数在该点一定取得极小值吗?	15
14. 求目标函数的条件极值, 其几何意义是什么?	16
15. 多元函数的条件极值是否总能转化为无条件极值 求解?	16
16. 试述多元函数的条件极值的判定法.	16
17. 多元函数在有界闭区域内有惟一的极值点, 是否 为其最值点?	19
三、典型题型分析	19
1. 求二元函数的定义域	19
2. 计算多元函数的偏导数	20
3. 求函数的全微分	21

4. 求多元复合函数的偏导数	22
5. 求方程或方程组确定的隐函数的偏导数 (全导数)	27
6. 求函数的方向导数	30
7. 求函数的梯度	32
8. 求曲线的切线方程和法平面方程	34
9. 求曲面的切平面方程及法线方程	36
10. 求多元函数的极值与最值	39
四、习题解难	41
5-1 多元函数的极限与连续性	41
5-2 偏导数	43
5-3 多元复合函数的求导法则	46
5-4 隐函数求导法则	49
5-5 多元向量值函数的导数及几何应用	51
5-6 多元函数的极值	53
五、考研题选解	59
六、综合测试题和测试题答案或提示	68
第六章 多元函数积分学及其应用	72
一、教学基本要求	72
二、释疑解惑	72
1. 计算多元函数积分时, 其积分区域的表达式能否 代入到被积函数中去?	72
2. 怎样计算被积函数带有绝对值、最值 (max, min) 等符号的积分?	73
3. 何谓三重积分的“先二后一”算法? 何时运用 为好?	77
4. 二次积分的积分次序总是可以交换的吗? 若不是, 则举例说明.	78
5. 如何利用区域的对称性计算多元数值函数的积分?	78
6. 积分区域关于坐标轴或坐标面的对称性在多元向 量值函数积分 (第二型线、面积分) 中如何运用?	81
7. 何谓轮换对称性? 如何运用轮换对称性计算多元 函数的各类积分?	83
8. 重积分有关于任意直线、任意平面的对称性吗?	85

9. 怎样计算积分区域为一些特殊几何形体的积分?	86
10. 第一型平面曲线积分的几何意义是什么?	88
11. 封闭平面曲线 L 在某点处的外法线向量的方向余弦 和切向量的方向余弦之间有何关系?	89
12. 曲面方向不同的第二型曲面积分转化成的第一型 曲面积分有何不同?	91
13. 记号 $dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy$ 表示何意?	91
14. 曲线积分的“牛顿—莱布尼茨公式”成立的条件 是什么?	92
15. 试述数值函数积分与向量值函数积分的关系.	93
16. 牛顿—莱布尼茨公式、格林公式、高斯公式和斯 托克斯公式之间有什么联系?	94
三、典型题型分析	96
1. 估计重积分的值	96
2. 重积分化为累次积分	97
3. 交换二次积分的积分次序	98
4. 关于二重积分或二次积分的证明题	99
5. 用极坐标换元法计算二重积分	102
6. 用柱面坐标、球面坐标换元法计算三重积分	104
7. 由多元数值函数积分所确定的函数及其运算	105
8. 用一般换元法计算重积分	107
9. 计算第一型曲线积分	109
10. 计算第一型曲面积分	110
11. 关于函数 $f(p)$ 在区域 Ω 上的平均值	112
12. 多元数值函数积分的应用	113
13. 计算第二型曲面积分	116
14. 利用高斯公式计算第二型曲面积分	117
15. 计算第二型曲线积分	119
16. 利用格林公式与斯托克斯公式计算第二型曲线积分	119
17. 用曲线积分与路径无关计算曲线积分	121
18. 求微分式的原函数	122
19. 梯度、散度和旋度的物理意义及其计算	124
四、习题解难	125
6-1 多元数值函数积分的概念和性质	125

6-2	重积分在直角坐标系下的算法	127
6-3	重积分的换元算法	128
6-4	第一型曲线积分和曲面积分的算法	134
6-5	多元数值函数积分的应用	136
6-6	含参变量积分	144
6-7	第二型曲面积分和高斯公式	149
6-8	第二型曲线积分和格林公式	153
五、	考研题选解	163
六、	综合测试题和测试题答案或提示	176
第七章	无穷级数	179
一、	数学史料	179
二、	教学基本要求	181
三、	释疑解惑	181
1.	无限项之和的级数是否与有限项之和一样满足结合律、交换律?	181
2.	用比较审敛法时, 如何选取比较级数?	183
3.	试述比值审敛法与根值审敛法的异同点	185
4.	交错级数不满足莱布尼茨准则的条件 $u_{n+1} \leq u_n$ 时, 一定发散吗?	186
5.	绝对收敛级数和条件收敛级数的本质区别是什么?	186
6.	求幂级数收敛半径有哪些方法?	187
7.	求幂级数的和函数其解题思想是什么?	188
8.	何谓傅里叶级数和傅里叶展开式?	190
9.	傅里叶系数 a_n 、 b_n 有哪些重要性质?	191
四、	典型题型分析	193
1.	利用无穷级数的概念和性质判断级数的敛散性	193
2.	正项级数的审敛法	194
3.	非正项级数的审敛法	198
4.	利用已知级数, 证明其相关级数的敛散性	200
5.	利用级数概念求数列极限	201
6.	一般项为定积分的级数的审敛方法	202
7.	求函数项级数收敛域	202
8.	求幂级数的收敛半径、收敛区间和收敛域	203

9. 求幂级数的和函数	204
10. 函数展开为幂级数	205
11. 求函数的近似值	207
12. 周期函数展开为傅里叶级数	208
13. 非周期函数展开为傅里叶级数	209
14. 求常数项级数的和	211
15. 由函数性质导出其傅里叶系数之间的关系	214
五、习题解难	216
7-1 常数项级数	216
7-2 常数项级数的审敛法	217
7-3 幂级数	223
7-4 函数展开成幂级数	228
7-5 傅里叶级数	232
六、考研题选解	235
七、综合测试题和测试题答案或提示	247
第八章 微分方程	251
一、数学史料	251
二、教学基本要求	252
三、释疑解惑	253
1. 一个微分方程是否都存在通解? 通解是否包含其所有解? ..	253
2. 解微分方程过程中, 会丢解和增解吗?	253
3. 求微分方程的通解时, 记其任意常数时, 应注意些什么? ..	254
4. 常数变易法在解微分方程中有何重要意义?	255
5. 如何正确使用解的结构定理?	258
6. 简述建立微分方程数学模型的要点是什么?	259
四、典型题型分析	264
1. 可化为可分离变量方程的一阶方程	264
2. 可化为一阶线性方程的方程	268
3. 全微分方程	270
4. 用降阶法求解的微分方程	271
5. 用升阶法求解的微分方程	274
6. 解常系数线性微分方程	276
7. 可化为常系数线性方程的方程	278

8. 导出微分方程的几类问题	279
9. 微分方程的幂级数解法	285
10. 常系数线性微分方程组的解法	286
11. 对称型微分方程组的解法	288
12. 综述	289
五、习题解难	289
8-1 一阶微分方程	289
8-2 可降阶的高阶方程	295
8-3 高阶线性微分方程	298
8-4 微分方程的幂级数解法	304
六、考研题选解	305
七、综合测试题和测试题答案或提示	313
下册期中测试题、期末测试题	317
下册期中测试题、期末测试题答案或提示	325

第五章 多元函数的微分学及其应用

一、教学基本要求

1. 理解多元函数的概念, 了解二元函数的极限与连续的概念, 了解有界闭区域上连续函数的性质.

2. 理解偏导数、全微分的概念, 了解全微分存在的必要条件和充分条件, 会计算全微分.

3. 了解高阶偏导数的概念, 会求二阶偏导数.

4. 理解方向导数与梯度的概念, 会求方向导数.

5. 掌握多元复合函数一、二阶偏导数的求法.

6. 会求隐函数(含由两个方程组成的方程组确定的隐函数)的偏导数.

7. 了解向量值函数($f: R^1 \rightarrow R^3$)的概念及其导数的概念, 会求曲线的切线方程和法平面方程以及曲面的切平面方程和法线方程.

8. 理解多元函数极值和条件极值的概念, 会求二元以上函数的极值, 了解求条件极值的拉格朗日乘数法, 会建立、求解一些简单的最值问题模型.

二、释疑解惑

1. 如何正确理解多元函数的极限的定义?

答 多元函数的极限的定义: 设 $z = f(p)$, $p \in \Omega$, p_0 是 Ω 的聚点, A 是常数, 若 $\forall U_\epsilon(A), \exists U_\delta^0(p_0), \forall p \in U_\delta^0(p_0) \cap \Omega, f(p) \in U_\epsilon(A)$, 则称函数 $f(p)$, 当 $p \rightarrow p_0$ 以 A 为极限, 记为 $\lim_{p \rightarrow p_0} f(p) = A$.

这里 ϵ, δ 的意义同一元函数极限. 注意点: ① p_0 是 Ω 的聚点, 意即对孤立点是无极限可言的; ② $\forall p \in U_\delta^0(p_0) \cap \Omega$, 意即只对 $U_\delta^0(p_0)$ 中函数 $f(p)$ 有定义的点, 有 $f(p) \in U_\epsilon(A)$; 对 $U_\delta^0(p_0)$ 中函数 $f(p)$ 无定义的点, 不予考虑. 所以这个定义要比定义为 $\forall p \in U_\delta^0(p_0)$ 的条件要宽, 使极限概念更便于应用; ③ $p \rightarrow p_0$ 的方式是任意的, 这是多元函数极限与一元函数极限的

最大区别,也是求多元函数极限的困难之点.

例1 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin xy}{x}$.

解 因为函数 $\frac{\sin xy}{x}$, 除 $x=0$ (即 y 轴) 外有定义, 所以 $\forall \varepsilon > 0$, 要

$$\left| \frac{\sin xy}{x} - 0 \right| \leq \frac{|xy|}{|x|} = |y| < \sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon, \text{ 只要取 } \delta = \varepsilon \text{ 即可, 故 } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin xy}{x} = 0.$$

该结果是对 $\forall p \in U_\delta^0(p_0) \cap \Omega$ 的定义而言的.

若从 $\forall P \in U_\delta^0(p_0)$ 考虑, 则在 $U_\delta^0(p_0)$ 内, $\left| \frac{\sin xy}{x} - 0 \right|$ 对 y 轴上的点 p 是

无意义的, 故 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin xy}{x}$ 不存在.

2. 试问极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ 吗?

答 一般来说是不等的. 因为, 对每个确定的 θ , 在点 (x,y) 沿射线方向, $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ 趋于原点时, 若函数 $f(x,y)$ 的极限存在, 此极限称为方向极限. 即 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon, \theta) > 0$, 当 $0 < \rho < \delta(\varepsilon, \theta)$ 时, 有 $|f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) - A| < \varepsilon$. 但方向极限存在, 二重极限并不一定存在. 何时方向极限与二重极限相等呢? 只要对 θ 一致地有 $\delta(\varepsilon) > 0$, 当 $0 < \rho < \delta(\varepsilon)$ 时, 有 $|f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) - A| < \varepsilon$ (此极限称为一致性极限), 则必有

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta).$$

简言之, 若 $|f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) - A|$ 能放大为仅与 ρ 有关, 与 θ 无关, 当 $\rho \rightarrow 0^+$, 其极限存在且为零时, 则等式成立.

例2 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$.

解 由 $\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} - 0 \right| = \left| \frac{\rho^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{\rho^2} \right| \leq \rho \rightarrow 0, (\rho \rightarrow 0^+)$,

故 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$.

例3 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x+y) \ln(x^2 + y^2)$.

解 由 $|(x+y) \ln(x^2 + y^2) - 0| = |\rho(\sin \theta + \cos \theta) \ln \rho^2| < 4\rho \ln \rho \rightarrow 0, (\rho \rightarrow 0^+)$,

故 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x+y) \ln(x^2 + y^2) = 0$.

例4 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$.

$$\text{解 由 } \left| \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \right| = \frac{\rho |\sin^2 \theta \cos \theta|}{\cos^2 \theta + \rho^2 \sin^4 \theta} < \frac{\rho}{\cos^2 \theta + \rho^2 \sin^4 \theta},$$

仅当 $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, $\rho \rightarrow 0^+$ 时, $\frac{\rho}{\cos^2 \theta + \rho^2 \sin^4 \theta} \rightarrow 0$,

当 $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\rho \rightarrow 0^+$ 时, 极限为 ∞ , 故极限不存在. 实际上, 可由 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y^2 = kx}} \frac{kx^2}{x^2 + k^2 x^2}$

$= \frac{k}{1+k^2}$ 与 k 值有关知, 极限不存在.

3. 求多元函数的极限有哪些方法?

答 归纳有如下几种方法:

(1) 连续函数的极限.

例 5 求极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

解 函数 $\frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 在 $U_\delta((1, 0))$ 连续, 故 $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \ln 2$.

(2) 用重极限定义.

关键是选特殊路径求出 A , 然后将 $|f(x, y) - A|$ 放大为 $\alpha \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, 其中 α 是常数.

例 6 求极限 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$.

解 $\forall \epsilon > 0$, 要 $\left| \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leq \frac{x^2}{x^2 + y^2} |x| + \frac{y^2}{x^2 + y^2} |y|$
 $\leq |x| + |y| \leq 2 \sqrt{x^2 + y^2} = 2\rho < \epsilon$,

只要取 $\delta = \frac{\epsilon}{2}$, 故 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 0$.

(3) 转化为一元函数, 利用一元函数求极限的方法.

① 将分式有理化, 化不定式为定式.

例 7 求极限 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{\sqrt{xy+1} - 1}$.

解 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{\sqrt{xy+1} - 1} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy(\sqrt{xy+1} + 1)}{xy} = 2$.

② 变量代换.

例8 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \sin \sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.

解 令 $\sqrt{x^2+y^2} = t$, 当 $(x,y) \rightarrow (0,0)$ 时, $t \rightarrow 0$.

故 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \sin \sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \sin t}{t^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{3t^2} = \frac{1}{6}$.

③ 用有界变量与无穷小之积仍是无穷小的结论.

例9 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$.

解 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} \cdot x = 0$. (因为 $\left| \frac{xy}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{1}{2}$)

④ 利用夹逼定理.

例10 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0^+, 0^+)} \frac{xy}{x+y}$.

解 因为 $0 \leq \left| \frac{xy}{x+y} \right| \leq \frac{\sqrt{xy}}{2} \rightarrow 0$, (当 $(x,y) \rightarrow (0^+, 0^+)$ 时)

故 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0^+, 0^+)} \frac{xy}{x+y} = 0$.

⑤ 利用等价无穷小量代换.

例11 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)x^2 y^2}$.

解 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)x^2 y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 + y^2)^2}{2(x^2 + y^2)x^2 y^2}$
 $= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2} \right) = +\infty$.

⑥ 利用重要极限等其他方法.

例12 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0^+, 0^+)} (1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$.

解 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0^+, 0^+)} (1+xy)^{\frac{1}{x+y}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0^+, 0^+)} (1+xy)^{\frac{1}{xy} \cdot \frac{xy}{x+y}}$
 $= e^{\lim_{(x,y) \rightarrow (0^+, 0^+)} \frac{xy}{x+y}} = e^0 = 1$.

(4) 用一致性极限求.

例13 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

$$\text{解 由 } \left| \frac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \frac{\rho^2 |(\sin\theta - \cos\theta)\cos\theta|}{\rho} \leq 2\rho \rightarrow 0 (\rho \rightarrow 0^+),$$

$$\text{故 } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

(5) 用洛必达法则.

多元函数的洛必达法则: 设函数 $f(p), g(p)$ 在区域 Ω 内有定义, $p_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ 为 Ω 的聚点; $f(p), g(p)$ 在 Ω 内有关于所有变元的连续偏导数; 且 $\sum_{i=1}^n \frac{\partial g(p)}{\partial x_i}(x_i - x_i^{(0)}) \neq 0$; 当 $p \rightarrow p_0$ 时, $f(p), g(p)$ 都趋于零 (或 ∞); 若

$$\lim_{p \rightarrow p_0} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial f(p)}{\partial x_i}(x_i - x_i^{(0)}) \right] / \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial g(p)}{\partial x_i}(x_i - x_i^{(0)}) \right] = k,$$

(有限数或无穷大) 则 $\lim_{p \rightarrow p_0} \frac{f(p)}{g(p)} = k$.

简言之, 将分子、分母分别求全微分, Δp 用 $p - p_0$ 表示, 然后再求极限.

注: 当 $x_i \rightarrow \infty$ 时, 令 $x_i = 1/t_i$, 则 $t_i \rightarrow 0$; 当全微分之比的极限摆动不存在时, 法则失效.

例 14 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2y^2}$.

$$\begin{aligned} \text{解 } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2y^2} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\cos(x^2+y^2)[2x(x-0)+2y(y-0)]}{2xy^2(x-0)+2x^2y(y-0)} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\cos(x^2+y^2)(x^2+y^2)}{2x^2y^2} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \cos(x^2+y^2) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) = +\infty. \end{aligned}$$

例 15 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

$$\begin{aligned} \text{解 } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2} &= \exp \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left[\ln(x^2+y^2) / \left(\frac{1}{x^2y^2} \right) \right] \\ &= \exp \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left[\frac{2x^2+2y^2}{x^2+y^2} / \left(-\frac{4x^2y^2}{x^4y^4} \right) \right] \\ &= \exp \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(-\frac{x^2y^2}{2} \right) = 1. \end{aligned}$$

4. 证明二重极限不存在有哪些方法?

答 其基本思想是找一特殊路径, 使 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ 不存在, 或找两个特殊路径, 使其极限值不相等. 关键是适当选取路径. 下面给出一些常见函数类型选取路径的方法.

(1) $f(x,y)$ 是不恒为常数的零次齐次函数, 即 $f \neq c$, $f(tx, ty) = t^0 f(x,y)$, 路径可选 $y = kx$ 或 $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$.

例 16 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$.

解 易见 $\frac{x}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$ 为零次齐次函数.

由 $\lim_{\substack{y=kx \\ x \rightarrow 0}} \frac{x}{x(1 + \sqrt{1+k^2})} = \frac{1}{1 + \sqrt{1+k^2}}$, 与 k 值有关, 故极限不存在. 或由

$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho \cos \theta}{\rho(\cos \theta + 1)} = \frac{\cos \theta}{\cos \theta + 1}$, 与 θ 值有关, 故极限不存在.

(2) $f(x,y)$ 是 $\lambda (\lambda \neq 0)$ 次齐次函数, 可选 $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$.

例 17 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$.

解 易见 $\frac{x^2 + y^2}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$ 是一次齐次函数.

由 $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2}{\rho(\cos \theta + 1)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho}{\cos \theta + 1} = \begin{cases} 0, \theta = 0, \\ 1, \rho = 1 + \cos \theta. \end{cases}$

因为沿不同路径其极限值不相等, 所以极限不存在.

(3) $f(x,y)$ 是不恒为常数的广义零次齐次函数, 即 $f \neq c$, $f(t^\alpha x, t^\beta y) = t^0 f(x,y)$, ($\alpha > 0$, $\beta > 0$), 可选 $y = kx^{\frac{\beta}{\alpha}}$.

例 18 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$.

解 因为 $f(t^{\frac{1}{2}}x, ty) = \frac{t^2 xy}{t^2 x^4 + t^2 y^2} = \frac{xy}{x^4 + y^2}$, 所以可选 $y = kx^2$.

由 $\lim_{\substack{y=kx^2 \\ x \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^4}{x^4 + k^2 x^4} = \frac{k}{1+k^2}$, 与 k 值有关, 所以极限不存在.

(4) 形如 $f(x,y) = \frac{x^m y}{y - \varphi(x)}$ 的函数, 可选 $y = \varphi(x) + kx^\alpha$, ($x > 0$, $\alpha > 0$, α

待定).

例 19 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{(x^2 + y)^2}$.

解 考虑选取 $y = -x^2 + kx^\alpha$,

$$\text{则 } \lim_{\substack{y = -x^2 + kx^\alpha \\ x \rightarrow 0}} \frac{x^2(-x^2 + kx^\alpha)}{k^2 x^{2\alpha}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^4 + kx^{\alpha+2}}{k^2 x^{2\alpha}},$$

可见取 $\alpha = 2$, 其极限为 $\frac{k-1}{k^2}$, 与 k 有关, 所以极限不存在.

$$(5) \text{ 形如 } f(x, y) = \frac{P_m(x, y)}{Q_n(x, y)} = \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} y + \cdots + a_{m-1} x y^{m-1} + a_m y^m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} y + \cdots + b_{n-1} x y^{n-1} + b_n y^n}.$$

$P_m(x, y)$ 与 $Q_n(x, y)$ 为互质的齐次有理函数, 当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时, 有如下结论:

① 当 $m \leq n$ 时, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ 不存在.

② 当 $m > n$ 时, 当 $Q(1, y) = 0$ 或 $Q(x, 1) = 0$ 有实根时, 则 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ 不存在. 当 $Q(1, y) = 0$ 和 $Q(x, 1) = 0$ 均无实根时, 则 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$.

注意: 该结论只适用 $f(x, y)$ 为齐次有理分式函数, 极限过程为 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, 否则不可用.

例 20 求下列函数的极限.

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3}{x(x+y)}; \quad (2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y};$$

$$(3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y + x y^3 + x^2 y^2}{x+y}; \quad (4) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}.$$

解 易知(1), (2), (3)极限不存在; (4)极限为零.

5. 试述二重极限与累次极限的关系?

答 二重极限与累次极限是两个不同的概念.

累次极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ (是先固定 x 对 y 取极限, 再对 x 取极限), 它本质上是一元函数极限. 而二重极限是考察在 $U_\delta^0(p_0) \cap \Omega$ 内, 点 p 以任意方式趋于 p_0 时, 函数 f 的变化趋势, 这是两者的本质差异.

二重极限存在, 累次极限未必存在; 累次极限存在且相等, 二重极限也未必存在, 但它们之间存有下面定理.

定理 若二重极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A$ 存在或 ∞ , 对任意异于 y_0 的 $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \varphi(y)$ 存在, 则累次极限 $\lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) =$

$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ 必存在, 且等于二重极限 A .

定理 若 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 二重极限存在, 且累次极限也存在, 则累次极限必相等.

推论 若累次极限存在但不等, 则二重极限必不存在. 若累次极限和二重极限都存在, 则两个累次极限和二重极限必相等.

例 21 讨论下列函数在点 $(0, 0)$ 的二重极限和累次极限.

$$(1) f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2};$$

$$(2) f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}, & xy \neq 0, \\ 0, & xy = 0. \end{cases}$$

解 (1) 由 $\lim_{\substack{y=kx \\ x \rightarrow 0}} \frac{k^2 x^4}{k^2 x^4 + (1-k)^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k^2 x^2}{k^2 x^2 + (1-k)^2} = \begin{cases} 1, & k=1, \\ 0, & k=0, \end{cases}$

故

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) \text{ 不存在.}$$

而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0.$$

(2) 由 $\left| x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| + |y| \rightarrow 0$, (当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$),

故

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0.$$

而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \text{ 与 } \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \text{ 都不存在.}$$

6. 函数在一点可微的另一充分条件.

目前多数教材给出的函数在一点可微的充分条件是, 在该点关于所有变元的偏导数连续, 这里给出一个较好的充分条件.

定理 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $p(x, y)$ 偏导数 $f_x(x, y)$ 连续, $f_y(x, y)$ 存在, 则函数 $z = f(x, y)$ 在点 $p(x, y)$ 处可微.

证明 $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$

$$= [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)]$$

$$+ [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)],$$

而

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = f_x(x + \theta \Delta x, y + \Delta y) \Delta x$$

因为在 $U_\delta(p)$ 内 $f_x(x, y)$ 连续, 所以

$$f(x + \theta \Delta x, y + \Delta y) \Delta x = (f_x(x, y) + \epsilon_1) \Delta x, \text{ 式中 } \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \epsilon_1 = 0.$$

又在 $U_\delta(p)$ 内, $f_y(x, y)$ 存在,

所以

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = (f_y(x, y) + \epsilon_2) \Delta y,$$