高等数学

学习与考研指导

（下册）

侯云畅 主编

- 数学史料　教学要求
- 释疑解惑　题型分析
- 习题解难　考研真题

国防工业出版社
National Defense Industry Press

高等数学学习与考研指导

（下 册）

编委会主任　朱林户　冯有前
主　　　编　侯云畅
编　　　者　（以姓氏笔画为序）
王国正　柏又青　董福安

国防工业出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习与考研指导(上,下)/侯云畅主编.
北京：国防工业出版社，2006. 5
ISBN 7-118-04262-5

Ⅰ. 高... Ⅱ. 侯... Ⅲ. 高等数学-自学参考资料
Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 153692 号

※

国防工業出版社出版发行
（北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100044）
北京奥鑫印刷厂印刷
新华书店经售

*

开本 710×960 1/16 印张 21 字数 378 千字
2006 年 5 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—5000 册 定价 20.00 元

国防书店：（010）68428422　发行邮购：（010）68414474
发行传真：（010）68411535　发行业务：（010）68472764

目　　录

第五章　多元函数的微分学及其应用

一、教学基本要求

1. 理解多元函数的概念，了解二元函数的极限与连续的概念，了解有界闭区域上连续函数的性质.

2. 理解偏导数、全微分的概念，了解全微分存在的必要条件和充分条件，会计算全微分.

3. 了解高阶偏导数的概念，会求二阶偏导数.

4. 理解方向导数与梯度的概念，会求方向导数.

5. 掌握多元复合函数一、二阶偏导数的求法.

6. 会求隐函数（含由两个方程组成的方程组确定的隐函数）的偏导数.

7. 了解向量值函数($f:R^1\to R^3$)的概念及其导数的概念，会求曲线的切线方程和法平面方程以及曲面的切平面方程和法线方程.

8. 理解多元函数极值和条件极值的概念，会求二元以上函数的极值，了解求条件极值的拉格朗日乘数法，会建立、求解一些简单的最值问题模型.

二、释疑解惑

1. 如何正确理解多元函数的极限的定义？

答　多元函数的极限的定义：设$z=f(p)$，$p\in\Omega$，p_0是Ω的聚点，A是常数，若$\forall\, U_\varepsilon(A)$，$\exists\, U_\delta^0(p_0)$，$\forall\, p\in U_\delta^0(p_0)\cap\Omega$，$f(p)\in U_\varepsilon(A)$，则称函数$f(p)$，当$p\to p_0$以$A$为极限，记为$\lim\limits_{p\to p_0}f(p)=A$.

这里ε，δ的意义同一元函数极限. 注意点：①p_0是Ω的聚点，意即对孤立点是无极限可言的；②$\forall\, p\in U_\delta^0(p_0)\cap\Omega$，意即只对$U_\delta^0(p_0)$中函数$f(p)$有定义的点，有$f(p)\in U_\varepsilon(A)$；对$U_\delta^0(p_0)$中函数$f(p)$无定义的点，不予考虑. 所以这个定义要比定义为$\forall\, P\in U_\delta^0(p_0)$的条件要宽，使极限概念更便于应用；③$p\to p_0$的方式是任意的，这是多元函数极限与一元函数极限的

最大区别，也是求多元函数极限的困难之点.

例1　求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin xy}{x}$.

解　因为函数$\dfrac{\sin xy}{x}$，除 $x=0$（即 y 轴）外有定义，所以 $\forall\varepsilon>0$，要 $\left|\dfrac{\sin xy}{x}-0\right|\leqslant\dfrac{|xy|}{|x|}=|y|<\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon$，只要取 $\delta=\varepsilon$ 即可，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin xy}{x}=0$. 该结果是对 $\forall p\in U_\delta^0(p_0)\cap\Omega$ 的定义而言的.

若从 $\forall P\in U_\delta^0(p_0)$考虑，则在$U_\delta^0(p_0)$内，$\left|\dfrac{\sin xy}{x}-0\right|$对 y 轴上的点 p 是无意义的，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin xy}{x}$不存在.

2. 试问极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{\rho\to0^+}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$吗?

答　一般来说是不等的. 因为，对每个确定的 θ，在点（x，y）沿射线方向，$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 趋于原点时，若函数$f(x,y)$的极限存在，此极限称为方向极限. 即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon,\theta)>0$，当$0<\rho<\delta(\varepsilon,\theta)$时，有$|f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)-A|<\varepsilon$. 但方向极限存在，二重极限并不一定存在. 何时方向极限与二重极限相等呢? 只要对 θ 一致地有$\delta(\varepsilon)>0$，当$0<\rho<\delta(\varepsilon)$时，有$|f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)-A|<\varepsilon$(此极限称为一致性极限)，则必有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{\rho\to0^+}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta).$$

简言之，若$|f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)-A|$能放大为仅与 ρ 有关，与 θ 无关，当 $\rho\to0^+$，其极限存在且为零时，则等式成立.

例2　求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$.

解　由 $\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|=\left|\dfrac{\rho^3\cos^2\theta\sin\theta}{\rho^2}\right|\leqslant\rho\to0$，$(\rho\to0^+)$，

故
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0.$$

例3　求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\ln(x^2+y^2)$.

解　由 $|(x+y)\ln(x^2+y^2)-0|=|\rho(\sin\theta+\cos\theta)\ln\rho^2|<4\rho\ln\rho\to0,(\rho\to0^+)$,

故
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\ln(x^2+y^2)=0.$$

例4　求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$.

解　由 $\left|\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}\right|=\dfrac{\rho|\sin^2\theta\cos\theta|}{\cos^2\theta+\rho^2\sin^4\theta}<\dfrac{\rho}{\cos^2\theta+\rho^2\sin^4\theta}$，

仅当 $\theta\neq\dfrac{\pi}{2}$，$\rho\to0^+$ 时，　$\dfrac{\rho}{\cos^2\theta+\rho^2\sin^4\theta}\to0$，

当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$\rho\to0^+$ 时，极限为 ∞，故极限不存在．实际上，可由 $\lim\limits_{\substack{y^2=kx\\x\to0}}\dfrac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$ 与 k 值有关知，极限不存在．

3．求多元函数的极限有哪些方法？

答　归纳有如下几种方法：

(1) 连续函数的极限．

例 5　求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to0}}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$．

解　函数 $\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 在 $U_\delta((1,0))$ 连续，故 $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to0}}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\ln2$．

(2) 用重极限定义．

关键是选特殊路径求出 A，然后将 $|f(x,y)-A|$ 放大为 $\alpha\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$，其中 α 是常数．

例 6　求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$．

解　$\forall\varepsilon>0$，要 $\left|\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}-0\right|\leqslant\dfrac{x^2}{x^2+y^2}|x|+\dfrac{y^2}{x^2+y^2}|y|$

$$\leqslant|x|+|y|\leqslant2\sqrt{x^2+y^2}=2\rho<\varepsilon,$$

只要取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=0$．

(3) 转化为一元函数，利用一元函数求极限的方法．

① 将分式有理化，化不定式为定式．

例 7　求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$．

解　$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{xy}=2$．

② 变量代换．

例 8 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-\sin\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.

解 令 $\sqrt{x^2+y^2}=t$，当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，$t\to0$.

故
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\sin\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\lim_{t\to0}\frac{t-\sin t}{t^3}=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{3t^2}=\frac{1}{6}.$$

③ 用有界变量与无穷小之积仍是无穷小的结论.

例 9 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$.

解 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}\cdot x=0$.（因为 $\left|\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{2}$）

④ 利用夹逼定理.

例 10 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0^+)}\dfrac{xy}{x+y}$.

解 因为 $0\leqslant\left|\dfrac{xy}{x+y}\right|\leqslant\dfrac{\sqrt{xy}}{2}\to0$,（当 $(x,y)\to(0^+,0^+)$ 时）

故
$$\lim_{(x,y)\to(0^+,0^+)}\frac{xy}{x+y}=0.$$

⑤ 利用等价无穷小量代换.

例 11 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$.

解
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x^2+y^2)^2}{2(x^2+y^2)x^2y^2}$$
$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}\right)=+\infty.$$

⑥ 利用重要极限等其他方法.

例 12 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0^+)}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$.

解
$$\lim_{(x,y)\to(0^+,0^+)}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}=\lim_{(x,y)\to(0^+,0^+)}(1+xy)^{\frac{1}{xy}\cdot\frac{xy}{x+y}}$$
$$=e^{\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0^+)}\frac{xy}{x+y}}=e^0=1.$$

(4) 用一致性极限求.

例 13 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解　由 $\left|\dfrac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \dfrac{\rho^2|(\sin\theta-\cos\theta)\cos\theta|}{\rho} \leqslant 2\rho \to 0(\rho\to 0^+)$，

故
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

(5) 用洛必达法则．

多元函数的洛必达法则：设函数 $f(p),g(p)$ 在区域 Ω 内有定义，$p_0(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$ 为 Ω 的聚点；$f(p),g(p)$ 在 Ω 内有关于所有变元的连续偏导数；且 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial g(p)}{\partial x_i}(x_i-x_i^{(0)})\neq 0$；当 $p\to p_0$ 时，$f(p),g(p)$ 都趋于零（或∞）；若

$$\lim_{p\to p_0}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(p)}{\partial x_i}(x_i-x_i^{(0)})\Big/\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g(p)}{\partial x_i}(x_i-x_i^{(0)})\right]=k,$$

（有限数或无穷大）则 $\lim\limits_{p\to p_0}\dfrac{f(p)}{g(p)}=k$.

简言之，将分子、分母分别求全微分，Δp 用 $p-p_0$ 表示，然后再求极限.

注：当 $x_i\to\infty$ 时，令 $x_i=1/t_i$，则 $t_i\to 0$；当全微分之比的极限摆动不存在时，法则失效.

例 14　求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2y^2}$.

解
$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2y^2} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\cos(x^2+y^2)[2x(x-0)+2y(y-0)]}{2xy^2(x-0)+2x^2y(y-0)}\\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\cos(x^2+y^2)(x^2+y^2)}{2x^2y^2}\\ &= \frac{1}{2}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\cos(x^2+y^2)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)=+\infty.\end{aligned}$$

例 15　求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

解
$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2y^2} &= \exp\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left[\ln(x^2+y^2)/\left(\frac{1}{x^2y^2}\right)\right]\\ &= \exp\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left[\frac{2x^2+2y^2}{x^2+y^2}/\left(-\frac{4x^2y^2}{x^4y^4}\right)\right]\\ &= \exp\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(-\frac{x^2y^2}{2}\right)=1.\end{aligned}$$

4. 证明二重极限不存在有哪些方法？

答　其基本思想是找一特殊路径，使 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在，或找两个特殊路径，使其极限值不相等. 关键是适当选取路径. 下面给出一些常见函数类型选取路径的方法.

(1) $f(x,y)$ 是不恒为常数的零次齐次函数，即 $f\neq c$，$f(tx,ty)=t^0 f(x,y)$，路径可选 $y=kx$ 或 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$.

例 16　求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$.

解　易见 $\dfrac{x}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$ 为零次齐次函数.

由 $\lim\limits_{\substack{y=kx\\x\to0}} \dfrac{x}{x(1+\sqrt{1+k^2})}=\dfrac{1}{1+\sqrt{1+k^2}}$，与 k 值有关，故极限不存在. 或由 $\lim\limits_{\rho\to0} \dfrac{\rho\cos\theta}{\rho(\cos\theta+1)}=\dfrac{\cos\theta}{\cos\theta+1}$，与 θ 值有关，故极限不存在.

(2) $f(x,y)$ 是 $\lambda(\lambda\neq0)$ 次齐次函数，可选 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$.

例 17　求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$.

解　易见 $\dfrac{x^2+y^2}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$ 是一次齐次函数.

由
$$\lim_{\rho\to0}\frac{\rho^2}{\rho(\cos\theta+1)}=\lim_{\rho\to0}\frac{\rho}{\cos\theta+1}=\begin{cases}0,\theta=0,\\1,\rho=1+\cos\theta.\end{cases}$$
因为沿不同路径其极限值不相等，所以极限不存在.

(3) $f(x,y)$ 是不恒为常数的广义零次齐次函数，即 $f\neq c$，$f(t^\alpha x,t^\beta y)=t^0 f(x,y)$，$(\alpha>0,\ \beta>0)$，可选 $y=kx^{\frac{\beta}{\alpha}}$.

例 18　求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$.

解　因为 $f(t^{\frac{1}{2}}x,ty)=\dfrac{t^2xy}{t^2x^4+t^2y^2}=\dfrac{xy}{x^4+y^2}$，所以可选 $y=kx^2$.

由 $\lim\limits_{\substack{y=kx^2\\x\to0}} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{kx^4}{x^4+k^2x^4}=\dfrac{k}{1+k^2}$，与 k 值有关，所以极限不存在.

(4) 形如 $f(x,y)=\dfrac{x^my}{y-\varphi(x)}$ 的函数，可选 $y=\varphi(x)+kx^\alpha$，$(x>0,\alpha>0,\alpha$ 待定).

例 19 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{(x^2+y)^2}$.

解 考虑选取 $y=-x^2+kx^\alpha$,

则
$$\lim_{\substack{y=-x^2+kx^\alpha\\ x\to 0}}\frac{x^2(-x^2+kx^\alpha)}{k^2x^{2\alpha}}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^4+kx^{\alpha+2}}{k^2x^{2\alpha}},$$

可见取 $\alpha=2$，其极限为 $\dfrac{k-1}{k^2}$，与 k 有关，所以极限不存在.

(5) 形如 $f(x,y)=\dfrac{P_m(x,y)}{Q_n(x,y)}=\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}y+\cdots+a_{m-1}xy^{m-1}+a_my^m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}y+\cdots+b_{n-1}xy^{n-1}+b_ny^n}$.

$P_m(x,y)$ 与 $Q_n(x,y)$ 为互质的齐次有理函数，当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，有如下结论:

① 当 $m\leqslant n$ 时，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在.

② 当 $m>n$ 时，当 $Q(1,y)=0$ 或 $Q(x,1)=0$ 有实根时，则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在. 当 $Q(1,y)=0$ 和 $Q(x,1)=0$ 均无实根时，则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$.

注意: 该结论只适用 $f(x,y)$ 为齐次有理分式函数，极限过程为 $(x,y)\to(0,0)$，否则不可用.

例 20 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{y^3}{x(x+y)}$;　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^2+y}$;

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3y+xy^3+x^2y^2}{x+y}$;　　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.

解 易知(1),(2),(3)极限不存在；(4) 极限为零.

5. 试述二重极限与累次极限的关系?

答 二重极限与累次极限是两个不同的概念.

累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$（是先固定 x 对 y 取极限，再对 x 取极限），它本质上是一元函数极限. 而二重极限是考察在 $U_\delta^0(p_0)\cap\Omega$ 内，点 p 以任意方式趋于 p_0 时，函数 f 的变化趋势，这是两者的本质差异.

二重极限存在，累次极限未必存在；累次极限存在且相等，二重极限也未必存在，但它们之间存有下面定理.

定理 若二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$ 存在或 ∞，对任意异于 y_0 的 $y\in(y_0-\delta,y_0+\delta)$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=\varphi(y)$ 存在，则累次极限 $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=$

$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$必存在，且等于二重极限 A.

定理 若$f(x,y)$在点(x_0,y_0)二重极限存在，且累次极限也存在，则累次极限必相等.

推论 若累次极限存在但不等，则二重极限必不存在. 若累次极限和二重极限都存在，则两个累次极限和二重极限必相等.

例 21 讨论下列函数在点（0，0）的二重极限和累次极限.

(1) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$;

(2) $f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}, & xy\neq 0, \\ 0, & xy=0. \end{cases}$

解 (1) 由 $\lim\limits_{\substack{y=kx\\x\to 0}}\dfrac{k^2x^4}{k^2x^4+(1-k)^2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{k^2x^2}{k^2x^2+(1-k)^2}=\begin{cases}1, & k=1,\\0, & k=0,\end{cases}$

故
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)\text{不存在}.$$
而
$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}f(x,y)=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}f(x,y)=0.$$

(2) 由 $\left|x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant|x|+|y|\to 0$,(当$(x,y)\to(0,0)$),

故
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0.$$
而
$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}f(x,y)\text{与}\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}f(x,y)\text{都不存在}.$$

6. 函数在一点可微的另一充分条件.

目前多数教材给出的函数在一点可微的充分条件是，在该点关于所有变元的偏导数连续，这里给出一个较好的充分条件.

定理 设函数$z=f(x,y)$在点$p(x,y)$偏导数$f_x(x,y)$连续，$f_y(x,y)$存在，则函数$z=f(x,y)$在点 $p(x,y)$处可微.

证明
$$\begin{aligned}\Delta z&=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)\\&=[f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)]\\&\quad+[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)],\end{aligned}$$

而
$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)=f_x(x+\theta\Delta x,y+\Delta y)\Delta x$$

因为在$U_\delta(p)$内 $f_x(x,y)$连续，所以
$$f_x(x+\theta\Delta x,y+\Delta y)\Delta x=(f_x(x,y)+\varepsilon_1)\Delta x\text{ ，式中}\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\varepsilon_1=0.$$

又在$U_\delta(p)$内，$f_y(x,y)$存在，

所以
$$f(x,y+\Delta y)-f(x,y)=(f_y(x,y)+\varepsilon_2)\Delta y,$$