广东实验中学高考总复习用书

广东实验中学　编

2006

丛书主编:郑炽钦
副主编:李夏萍

数学
(基础知识)

本册主编:黄为

SHUXUE

广东高等教育出版社

广东实验中学高考总复习用书

广东实验中学 编
丛书主编：郑炽钦
副 主 编：李夏萍

数　　学

(基础知识)

本册主编：黄　为
编写人员（按姓氏笔画排序）：
刘军凤　江秋明　李夏萍　肖勇钢　陈镇民
陈胜方　张淑华　周映平　周若鸿　孟冬宏
侯士群　翁之英　程力生　程建华

广东高等教育出版社
·广州·

图书在版编目（CIP）数据

数学（基础知识）/郑炽钦主编；黄为分册主编. —广州：广东高等教育出版社，2005. 9
（广东实验中学高考总复习用书/郑炽钦主编，李夏萍副主编）
ISBN 7-5361-3203-4

Ⅰ. 数… Ⅱ. ①郑…②黄… Ⅲ. 数学课-高中-升学参考资料 Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 097795 号

广东高等教育出版社出版发行
地址：广州市天河区林和西横路
邮编：510500 电话：（020）87551436
佛山市浩文彩色印刷有限公司印刷
787 毫米×1 092 毫米 16 开本 12.25 印张 342 千字
2005 年 9 月第 1 版 2005 年 9 月第 1 次印刷
印数：1~5 000 册
定价：15.00 元

前　　言

普通高等学校招生全国统一考试（一般简称高考），无论是命题形式和考试内容，还是试卷结构，一直都在进行着改革。从2004年开始，广东在全国（上海、北京除外）率先进行高考语文、数学、英语的自主命题，而从2005年开始，包括广东省在内的全国十几个省市均尝试自主命题。从广东省的自身情况看，2006年，可以说是依据现有的教学大纲和《考试说明》进行高考命题、考试的最后一年。然而，不管是全国命题，还是分省命题；不管是“老”高考，还是“新”高考，高考命题改革的“大方向”始终不会有大的改变，那就是：各学科的命题首先立足于考查学生扎扎实实的“双基”（即基础知识和基本技能），同时强调试题的能力立意，注意考查学生的学科能力和素质。

所以，在进行高考第一轮复习时，考生们首先应该依据各科《考试说明》每项考点对相关知识的要求，条分缕析，精心编织高考所需知识的网络；其次，弄清近年高考典型试题所体现的知识内容，熟知高考的命题意图，明晰相应的解题思路；然后，通过适当的题例分析和训练，以加深对知识的记忆，提高运用知识的能力。从而为进入下一阶段的复习打下坚实的基础。

基于此，为了帮助广大考生进行2006年高考备考，受广东高等教育出版社邀请，广东实验中学组织了语文、数学、英语学科的一批骨干教师，在认真总结历年备考成功经验，深入研究高考备考规律的基础上，精心编写了这套《广东实验中学高考总复习用书》。该套书暂出版语文、数学、英语三个学科，每学科用书包括“基础知识”用书和“专题训练”用书两册。

《广东实验中学高考总复习用书》由郑炽钦任主编，李夏萍任副主编，李子良担任语文学科主编，黄为担任数学学科主编，黄溪宁担任英语学科主编。

编　者

2005年8月于广州

编写说明

本书共分两册《基础知识》、《专题训练》，按第一轮复习要求，分成每个课时编写，整章有知识结构图“知识网络”，每课时包括“应考目标”、“知识回顾”、“示例点拨”、“思路导航”几个栏目。

本书以考试大纲为依据，以梳理知识为中心，通过对基础知识的讲解、典型例题的引导，突出了必考点和重点内容，加强了方法的点拨。围绕各考点精选了近几年针对性较强的各地模拟题和高考题，设计了与高考链接的新题型，且每课时都附有相应的训练题。愿你在复习中扎实打好基础，在训练中努力提高能力，在高考中取得优异的成绩。

编　者

2005 年 8 月

目录

第八章　圆锥曲线方程

第九章　直线、平面、简单几何体

第十章　排列、组合和二项式定理

第十一章　概率与统计

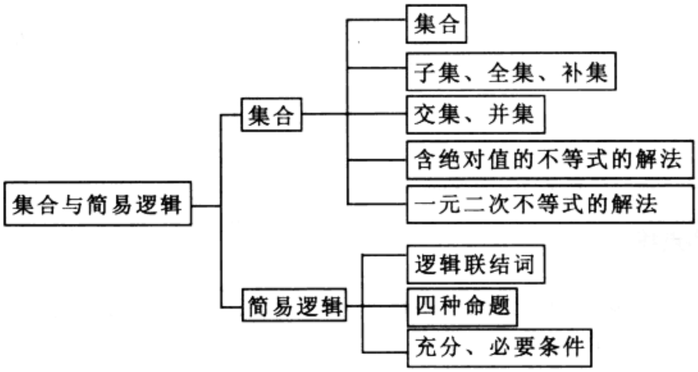
第十二章　极限

第十三章　导数

第十四章　复数

第一章　集合与简易逻辑

[知识网络]



第 1 课时　集　合

[应考目标]

理解集合、子集、补集、交集、并集的概念，了解属于、包含、相等关系的意义，掌握有关的术语和符号，并会用它们正确表示一些简单的集合.

[知识回顾]

一、集合的基本概念

1. 某些指定的对象集在一起就成为一个集合.

集合中的每个对象叫集合的元素. $a\in A$，$a\notin A$.

2. 集合分有限集与无限集. 不含任何元素的集合叫空集$\varnothing$.

3. 集合的表示法：列举法、描述法、图示法.

4. 常见数集：$\mathbf{N}$（自然数集），$\mathbf{N}_+$（正整数集），$\mathbf{Z}$（整数集），$\mathbf{Q}$（有理数集），$\mathbf{R}$（实数集）.

二、集合与集合的关系

1. 包含：$A\subseteq B$　集合 B 包含集合 A，即 A 是 B 的子集.

不包含：$A\not\subseteq B$　集合 B 不包含集合 A.

$\varnothing\subseteq A$；$A\subseteq A$；若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$.

相等：若 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$，则 $A=B$.

真子集：若 $A\subseteq B$，且 $A\neq B$，则 A 是 B 的真子集，$A\subsetneqq B$.

2. 全集与补集：若 $A\subseteq S$，则 A 在 S 中的补集为$\complement_S A=\{x|x\in S$ 且 $x\notin A\}$，若一集合包含要研究的各集合的全部元素，则这集合可看作一个全集，记为 I.

3. 交集：$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$

并集：$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$

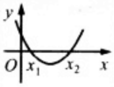
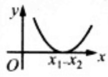
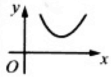
三、不等式解法

1. 含绝对值不等式：$|x|<a$（$a>0$）的解集是 $\{x|-a<x<a\}$.

$|x|>a$（$a>0$）的解集是 $\{x|x<-a$ 或

$x>a\}$.

2. 一元二次不等式：

二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图象			
不等式 $ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$ 的解集	$\{x\mid x<x_1$ 或 $x>x_2\}$	$\{x\mid x\neq x_1\}$	$\mathbf{R}$
不等式 $ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$ 的解集	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

[示例点拨]

例1. (1) 设 A、B、I 为非空集合，且满足 $A\subseteq B\subseteq I$，则下列各式中错误的是（　　）.

A. $(\complement_I A)\cup B=V$

B. $(\complement_I A)\cup(\complement_I B)=I$

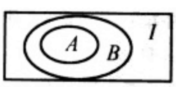
C. $A\cap(\complement_I B)=\varnothing$

D. $(\complement_I A)\cap(\complement_I B)=\complement_I B$

(2) 设 $M=\{a,2,3,4\}$，$N=\{1,b,3\}$，$M\cup N=\{1,2,3,4,5\}$，则 a、b 的值，共有______组.

(3) 设 $I=\{x\mid x=\frac{1}{2^n},n\in\mathbf{N}_+\}$，$A=\{x\mid x=\frac{1}{4^n},n\in\mathbf{N}_+\}$，则 $\complement_I A=$________.

解： (1) 由 $A\subseteq B\subseteq I$，画出韦恩图，可知错误的是B.



(2) 依题意，$a=5$ 或 $b=5$，a、b 值的各种可能为：$\begin{cases}a=5\\b=2\end{cases}$或$\begin{cases}a=5\\b=4\end{cases}$或$\begin{cases}a=5\\b=5\end{cases}$或$\begin{cases}a=1\\b=5\end{cases}$，共有4组.

(3) $x=\frac{1}{4^n}=\frac{1}{2^{2n}}$，所以 $\complement_I A=\{x\mid x=\frac{1}{2^{2n-1}},n\in\mathbf{N}_+\}$.

评析： (1) 注意利用韦恩图. (2) 要注意集合中元素的互异性. (3) 把几个集合的元素的表示形式统一起来.

例2. 设函数 $f(x)=\sqrt{2-\frac{x+3}{x+1}}$ 定义域为 A，$g(x)=\lg[(x-a-1)(2a-x)]$ $(a<1)$ 的定义域为 B.

(1) 求 A；

(2) 若 $B\subseteq A$，求实数 a 的取值范围.

解： (1) 由 $2-\frac{x+3}{x+1}\geqslant 0$，得 $\frac{x-1}{x+1}\geqslant 0$，所以 $x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 1$，即 $A=\{x\mid x<-1$ 或 $x\geqslant 1\}$.

(2) 由 $(x-a-1)(2a-x)>0$，得 $(x-a-1)(x-2a)<0$.

因为 $a<1$，$2a<a+1$，

所以 $B=\{x\mid 2a<x<a+1\}$.

若 $B\subseteq A$，则必须 $a+1\leqslant -1$ 或 $1\leqslant 2a$，即 $a\leqslant -2$ 或 $a\geqslant\frac{1}{2}$，而 $a<1$，所以 $a\leqslant -2$ 或 $\frac{1}{2}\leqslant a<1$.

故当 $B\subseteq A$ 时，实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-2]\cup[\frac{1}{2},1)$.

评析： 复习一元二次不等式的解法，注意二次项系数的符号，讨论相关两极的大小，利用数轴求出 a 的取值范围，注意区间端点.

例3. (1) 设 $A=\{x\mid x=\sqrt{5k+1},k\in\mathbf{N}\}$，$B=\{x\mid x\leqslant 6,k\in\mathbf{Q}\}$，则 $A\cap B$ 等于（　　）.

A. $\{1,4\}$　　B. $\{1,6\}$

C. $\{4,6\}$　　D. $\{1,4,6\}$

(2) 已知 $a>b>0$，全集 $I=\mathbf{R}$，集合 $M=\{x\mid b<x<\frac{a+b}{2}\}$，$N=\{x\mid\sqrt{ab}<x<a\}$，$P=\{x\mid b<x\leqslant\sqrt{ab}\}$，则 P 与 M、N 的关系为（　　）.

A. $P=M\cap(\complement_I N)$　　B. $P=(\complement_I M)\cap N$

C. $P=M\cup N$　　D. $P=M\cap N$

(3) 含有三个实数的集合可表示为 $\{a,\frac{b}{a},1\}$，也可表示 $\{a^2,a+b,0\}$，则 $a^{2005}+b^{2006}$ 的

值等于________.

解：(1) 因为 $A=\{x\mid x=\sqrt{5k+1},\ k\in\mathbf{N}\}=\{1,\ \sqrt{6},\ \sqrt{11},\ 4,\ \sqrt{21},\ \sqrt{26},\ \sqrt{31},\ 6,\ \cdots\}$，所以 $A\cap B=\{1,\ 4,\ 6\}$. 故选 D.

(2) 由 $a>b>0$ 知 $b<\sqrt{ab}<\dfrac{a+b}{2}<a$，借助数轴可知 $P=M\cap(\complement_I N)$，故选 A.

(3) $\{a,\ \dfrac{b}{a},\ 1\}=\{a^2,\ a+b,\ 0\}$，从而有 $0\in\{a,\ \dfrac{b}{a},\ 1\}$.

因为 $a\neq0$，所以 $\dfrac{b}{a}=0$，即 $b=0$，这时 $\{a,\ 0,\ 1\}=\{a^2,\ a,\ 0\}$.

从而有 $1\in\{a^2,\ a,\ 0\}$，且 $a\neq1$，故 $a^2=1$，$a=-1$.

所以 $a=-1$，$b=0$.

故 $a^{2\,005}+b^{2\,006}=(-1)^{2005}=-1$.

评析：(1) 可将集合的描述法表示转换为列举法. (2) 利用基本不等式. (3) 注意集合中元素的确定性、互异性.

例 4. 设全集 $I=\mathbf{R}$.

(1) 解关于 x 的不等式 $|x-1|+a-1>0$ $(a\in\mathbf{R})$.

(2) 记 A 为 (1) 中不等式的解集，$B=\{x\mid \sin(\pi x-\dfrac{\pi}{3})+\sqrt{3}\cos(\pi x-\dfrac{\pi}{3})=0\}$，若 $(\complement_I A)\cap B$ 恰有 3 个元素，求 a 的取值范围.

解：(1) 由 $|x-1|+a-1>0$ 得 $|x-1|>1-a$.

当 $a>1$ 时，解集是 $\mathbf{R}$.

当 $a\leqslant1$ 时，$x-1<a-1$ 或 $x-1>1-a$，即 $x<a$ 或 $x>2-a$，解集为 $\{x\mid x<a$ 或 $x>2-a\}$.

(2) 当 $a>1$ 时，$\complement_I A=\varnothing$，$(\complement_I A)\cap B=\varnothing$，不满足题意.

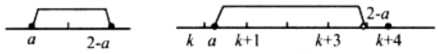
当 $a\leqslant1$ 时，$\complement_I A=\{x\mid a\leqslant x\leqslant 2-a\}$.

又因为 $\sin(\pi x-\dfrac{\pi}{3})+\sqrt{3}\cos(\pi x-\dfrac{\pi}{3})=2\sin(\pi x-\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3})=2\sin\pi x$.

由 $\sin\pi x=0$ 得 $\pi x=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $x=k$，$k\in\mathbf{Z}$.

即 $B=\mathbf{Z}$，要使 $(\complement_I A)\cap B$ 恰有 3 个元素，则

$$\begin{cases}a\leqslant1\\ a\in\mathbf{Z}\\ (2-a)-a=2\end{cases}\text{或}\begin{cases}a\leqslant1\\ k<a<k+1\\ k+3<2-a<k+4\end{cases}\quad(k\in\mathbf{Z})$$



所以 $a=0$ 或 $\begin{cases}a\leqslant1\\ k=-1\\ -1<a<0\end{cases}$.

故 a 的取值范围是 $(-1,\ 0]$.

评析：注意集合关系、数形结合、分类讨论的综合运用.

[思路导航]

1. 涉及本节知识点的高考题大都是基本题，综合性大题不多，着重考查：(1) 集合的概念与运算；(2) 集合语言、集合思想在映射、不等式、方程、函数等各类数学的题中的应用，集合与其他知识的综合.

2. 复习重点应是对集合概念的深刻认识和正确理解.

3. 主要数学思想方法是数形结合法、分类讨论法. 利用数轴、韦恩图解题可使问题由难变易.

第 2 课时　逻辑联结词、四种命题、充要条件

[应考目标]

理解逻辑联结词“或”、“且”、“非”的含义，理解四种命题及其相互关系，掌握充要条件的意义.

[知识回顾]

1. 命题：可以判断真假的语句.

2. 逻辑联结词：“或”、“且”、“非”.

3. 简单命题：不含逻辑联结词的命题.

4. 复合命题：由简单命题与逻辑联结词构成的命题.

复合命题的构成形式："p 或 q"、"p 且 q"、"非 p".

复合命题的真假：

p	真	真	假	假
q	真	假	真	假
p 或 q	真	真	真	假
p 且 q	真	假	假	假
非 p	假	假	真	真

5. 四种命题：原命题　若 p 则 q；
　　逆命题　若 q 则 p；
　　否命题　若 $\neg p$ 则 $\neg q$；
　　逆否命题　若 $\neg q$ 则 $\neg p$.

一个命题与它的逆否命题等价.

6. 反证法.

7. 若 $p\Rightarrow q$，则说 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件.

若 $p\Leftrightarrow q$，则说 p 是 q 的充要条件.

[示例点拨]

例 1.（1）给定两个命题 p、q，则可组成四个复合命题："非 p"、"非 q"、"p 或 q"、"p 且 q"，其中真命题个数为 a，假命题个数为 b，则 a 与 b 的大小关系是（　　）.

A. $a>b$　　B. $a<b$　　C. $a=b$　　D. 不能确定

（2）在下列关于直线 l，m 和平面 α、β 的命题中，真命题是（　　）.

A. 若 $l\subseteq\beta$ 且 $\alpha\perp\beta$，则 $l\perp\alpha$

B. 若 $l\perp\beta$ 且 $\alpha/\!/\beta$，则 $l\perp\alpha$

C. 若 $l\perp\beta$ 且 $\alpha\perp\beta$，则 $l/\!/\alpha$

D. 若 $\alpha\cap\beta=m$ 且 $l/\!/m$，则 $l/\!/\alpha$

解：（1）由复合命题的真假值表，可知 $a=b$，故选 C.

（2）因为 $\alpha/\!/\beta$，$l\perp\beta$，故 $l\perp\alpha$，选 B.

评析：立体几何命题的判断可画出图形.

例 2.（1）已知 p 是 r 的充分不必要条件，s 是 r 的必要条件，q 是 s 的必要条件，那么 p 是 q 成立的（　　）.

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

（2）有下列叙述：

①"$x>2$ 且 $y>3$"是"$x+y>5$"的充要条件

②"$A\cap B\neq\varnothing$"是"$A\subsetneqq B$"的充分条件

③"$b^2-4ac<0$"是"一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$"的充要条件

④一个三角形的三边满足勾股定理的必要条件是此三角形为直角三角形

其中错误的是________.

（3）函数 $f(x)=x|x+a|+b$ 是奇函数的充要条件是（　　）.

A. $ab=0$　　　B. $a+b=0$

C. $a=b$　　　D. $a^2+b^2=0$

解：（1）因为 $p\Rightarrow r\Rightarrow s\Rightarrow q$，所以 p 是 q 成立的充分不必要条件. 故选 A.

（2）①因为 $x+y>5\not\Rightarrow x>2$ 且 $y>3$，错误.

②$A\cap B\neq\varnothing$　可能 ⒶⒷ，故 $A\subsetneqq B$ 不成立，错误.

③在 $a>0$ 的情况下才正确.

④正确.

所以错误的是①②③.

（3）若 $f(x)$ 是奇函数，则对任意 $x\in\mathbf{R}$，$f(-x)=-f(x)$ 均成立. 即 $-x|-x+a|+b=-x|x+a|-b$ 恒成立.

当 $x=0$ 时成立，有 $b=0$.

所以 $x[|x+a|-|x-a|]=0$ 恒成立，即 $|x+a|=|x-a|$ 恒成立. 当 $x=a$ 时成立，即 $|2a|=0$，所以 $a=0$.

所以 $a=b=0$，即 $a^2+b^2=0$.

反之，若 $a^2+b^2=0$，则 $a=b=0$，$f(x)=x|x|$.

所以 $f(-x)=-x|-x|=-x|x|=-f(x)$，$f(x)$ 是奇函数，故选 D.

例 3.（1）命题 p：若 a、$b\in\mathbf{R}$，则 $|a|+|b|>1$ 是 $|a+b|>1$ 的充分不必要条件. 命题 q：函数 $y=\sqrt{|x-1|-2}$ 的定义域是 $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$，则（　　）.

A. "p 或 q"为假　　B. "p 且 q"为真

C. p 真 q 假　　　　D. p 假 q 真

（2）在下列各结论中，正确的结论为（　　）.

①“p 且 q”为真是“p 或 q”为真的充分不必要条件

②“p 且 q”为假是“p 或 q”为假的充分不必要条件

③“p 或 q”为真是“$\neg p$”为假的必要不充分条件

④“$\neg p$”为真是“p 且 q”为假的必要不充分条件

A. ①②　B. ①③　C. ②④　D. ③④

解：(1) 由绝对值不等式知 $|a|+|b|\geqslant|a+b|$，故

$|a+b|>1\Rightarrow|a|+|b|>1$.

反之不成立. 故 $|a|+|b|>1$ 是 $|a+b|>1$ 的必要不充分条件，故 p 是假命题.

q 为真命题，所以选 D.

（2）B.

例 4. 已知 $a>0$，函数 $f(x)=ax-bx^2$.

（1）当 $b>1$ 时，证明对任意 $x\in[0,1]$，$|f(x)|\leqslant1$ 的充要条件是 $b-1\leqslant a\leqslant2\sqrt{b}$.

（2）当 $0<b\leqslant1$ 时，讨论：对任意 $x\in[0,1]$，$|f(x)|\leqslant1$ 的充要条件.

（1）**证明：**

必要性：对任意 $x\in[0,1]$，$|f(x)|\leqslant1\Leftrightarrow-1\leqslant f(x)\leqslant1$.

已知 $b>1$，所以 $0<\dfrac{1}{\sqrt{b}}<1$，从而 $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{b}}\right)\leqslant1$.

即 $a\cdot\dfrac{1}{\sqrt{b}}-b\left(\dfrac{1}{\sqrt{b}}\right)^2=\dfrac{a}{\sqrt{b}}-1\leqslant1$，所以 $a\leqslant2\sqrt{b}$.

又 $f(-1)\geqslant-1$ 即 $a-b\geqslant-1$，所以 $a\geqslant b-1$.

即对任意 $x\in[0,1]$，$|f(x)|\leqslant1\Rightarrow b-1\leqslant a\leqslant2\sqrt{b}$.

充分性：因为 $b>1$，$a\geqslant b-1>0$，对任意 $x\in[0,1]$，$x-x^2=x(1-x)\geqslant0$.

从而有 $f(x)=ax-bx^2\geqslant(b-1)x-bx^2=b(x-x^2)-x\geqslant-x\geqslant-1$.

又 $b>1$，$a\leqslant2\sqrt{b}$，对任意 $x\in[0,1]$，可推出 $f(x)=ax-bx^2\leqslant2\sqrt{b}x-bx^2=1-(\sqrt{b}x-1)^2\leqslant1$.

即 $b-1\leqslant a\leqslant2\sqrt{b}\Rightarrow$ 对任意 $x\in[0,1]$，$|f(x)|\leqslant1$.

综上所述，当 $b>1$ 时，对任意 $x\in[0,1]$，$|f(x)|\leqslant1$ 的充要条件是 $b-1\leqslant a\leqslant2\sqrt{b}$.

（2）**解：**因为 $a>0$，$0<b\leqslant1$，对任意 $x\in[0,1]$，$f(x)=ax-bx^2\geqslant-bx^2\geqslant-b\cdot1\geqslant-1$，即必有 $f(x)\geqslant-1$.

所以 $a>0$，$0<b\leqslant1$ 时，$|f(x)|\leqslant1\Leftrightarrow f(x)\leqslant1$ $(x\in[0,1])$，$f(x)\leqslant1\Rightarrow f(1)\leqslant1\Rightarrow a-b\leqslant1\Rightarrow a\leqslant b+1$.

$$\left.\begin{array}{r}a\leqslant b+1\\ 反之,a>0\\ 0<b\leqslant1\end{array}\right\}\Rightarrow f(x)=ax-bx^2\leqslant(b+1)x-bx^2=bx(1-x)+x\leqslant x(1-x)+x=-x^2+2x=1-(x-1)^2\leqslant1.$$

所以当 $a>0$，$0<b\leqslant1$ 时，对任意 $x\in[0,1]$，$|f(x)|\leqslant1$ 的充要条件是 $a\leqslant b+1$.

[思路导航]

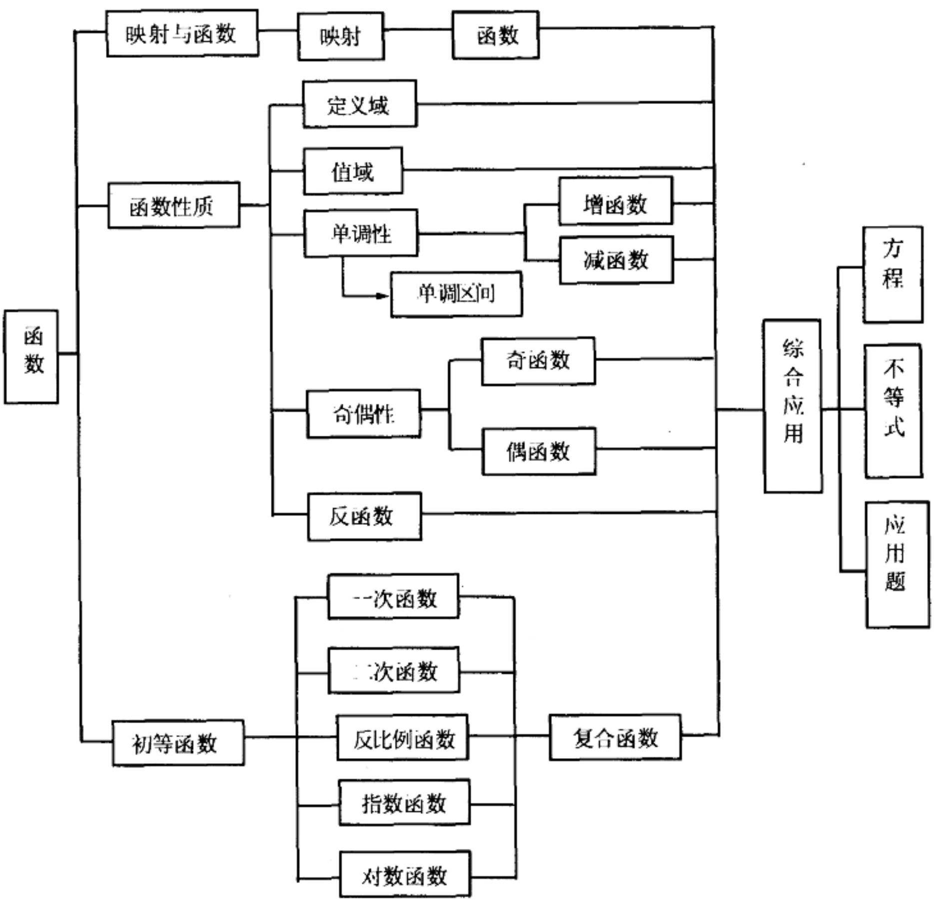
1. 重点考查四种命题、充分必要条件、判断命题的真假等知识点和逻辑推理能力.

2. 判断充分条件、必要条件、充要条件时，要注意“$\Rightarrow$”的方向.

3. 判断命题真假时涉及的数学命题很广泛，如立体几何、三角、不等式、函数、数列、方程、向量等等，解题时要综合运用各方面的知识.

第二章　函　数

[illegible]



第3课时　映射与函数、求定义域

[illegible]

了解映射的概念,. 理解函数的概念，会求基本函数（给出函数表达式）的定义域.

[illegible]

1. 映射：设 A、B 是两个集合，如果按照某种对应法则 f，对于集合 A 中的任何一个元素，在集合 B 中都有唯一的元素和它对应，这样的对应（包括集合 A、B 以及 A 到 B 的对应法则 f）叫做

从集合 A 到集合 B 的映射.

2. 函数：函数实际上就是非空数集 A 到非空数集 B 的一个映射 f: $A\to B$，对于自变量在定义域 A 内的任何一个值 x，在集合 B 中都有唯一的函数值 y 和它对应，记作：$y=f(x)$；自变量的值是原象，和它对应的函数值是象；自变量 x 的取值范围叫作函数的定义域（即原象的集合 A），象的集合 C 就是函数的值域，显然 $C\subseteq B$.

3. 函数的三要素：定义域、值域和对应法则.

4. 函数的三种主要的表示方法，即解析法、列表法、图象法.

[redacted]

例 1. 已知 $A=\mathbf{R}$，$B=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}\}$，$f$: $A\to B$ 是从集合 A 到集合 B 的映射，f: $x\to(x+1,x^2+1)$，求 A 中的元素 $\sqrt{2}$ 的象，B 中元素 $\left(\frac{3}{2},\frac{5}{4}\right)$ 的原象.

解： $\sqrt{2}$ 的象是 $(\sqrt{2}+1,3)$；设 $\left(\frac{3}{2},\frac{5}{4}\right)$ 的原象是 x，则 $\begin{cases}x+1=\dfrac{3}{2}\\x^2+1=\dfrac{5}{4}\end{cases}\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

例 2. 求下列函数的定义域.

(1) $f(x)=\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{2-x}$；

(2) $y=\dfrac{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^x-4}}{\log_{\frac{1}{3}}(x+5)}$ 的定义域；

(3) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,4)$，求 $f\left(\dfrac{1}{x}+2\right)$ 的定义域.

分析： 给定函数时，要指明函数的定义域，对于用解析式表示的函数，如果没有给出定义域，那么就认为函数的定义域是指使函数有意义的自变量取值的集合.

解： (1) $\begin{cases}x+1\geqslant 0\\2-x\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geqslant -1\\x\neq 2\end{cases}$，

所以这个函数的定义域是 $\{x\mid x\geqslant -1$ 且 $x\neq 2\}=[-1,2)\cup(2,+\infty)$.

(2) $\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-4\geqslant 0\\x+5\neq 1\\x+5>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leqslant -2\\x\neq -4\\x>-5\end{cases}$

$\Leftrightarrow -5<x\leqslant -2$ 且 $x\neq -4$.

所以所求函数定义域是 $(-5,-4)\cup(-4,-2]$.

(3) $-1\leqslant\dfrac{1}{x}+2<4$，则 $-3\leqslant\dfrac{1}{x}<2$.

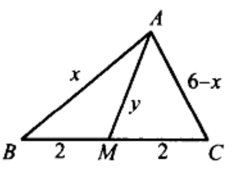
又 $\dfrac{1}{x}\neq 0$，所以 $-3\leqslant\dfrac{1}{x}<0$ 或 $0<\dfrac{1}{x}<2$.

则 $x\leqslant -\dfrac{1}{3}$ 或 $x>\dfrac{1}{2}$ 即为所求的函数的定义域.

说明： 题 (3) 实质上是求复合函数的定义域，我们把 $y=f\left(\dfrac{1}{x}+2\right)$ 看成是由 $y=f(u)$、$u=\dfrac{1}{x}+2$ 两个函数复合而成的，因为 $-1\leqslant u<4$，则 $-1\leqslant\dfrac{1}{x}+2<4$，从而求出 x 的范围，另外，对不等式进行倒数运算时，应注意不等式两边必须同号，取倒数后不等号的方向改变，这里也是学习时常常容易发生错误的地方，应加以重视.

例 3. 线段 $|BC|=4$，BC 的中点为 M，点 A 与 B、C 两点的距离之和为 6，设 $|AM|=y$，$|AB|=x$，求 $y=f(x)$ 的函数表达式及这函数的定义域.

解： (1) 若 A、B、C 三点不共线，如图所示，由余弦定理可知：



$x^2=2^2+y^2-4y\cos\angle AMB$ ①

$(6-x)^2=2^2+y^2-4y\cos(180^\circ-\angle AMB)$ ②

① + ② 得：$x^2+(6-x)^2=2y^2+8$.

所以 $y^2=x^2-6x+14$.

又 $x^2-6x+14=(x-3)^2+5$ 恒正，

所以 $y=\sqrt{x^2-6x+14}$.

又三点 A、B、C 能构成三角形.

所以$\begin{cases} x+(6-x)>4 \\ x+4>6-x \\ 4+(6-x)>x \end{cases}$，即 $1<x<5$.

（2）若三点 A、B、C 共线，由题意可知，$x+4=6-x$，$x=1$ 或 $4+6-x=x$，$x=5$.

综上所述：$y=\sqrt{x^2-6x+14}$（$1\leqslant x\leqslant 5$）.

说明：第一，首先要分析三点 A、B、C 是否在同一条直线上，因为由题意，A、B、C 不一定能构成三角形，它们也可在同一条直线上，所以要分两种情形来讨论. 第二，实际问题求解析式时要特别注意函数的定义域.

例 4. 设函数 $f(x)=\sqrt{1+3^x\cdot a}$.

（1）若已知函数的定义域是 $(-\infty,1]$，求 a 的取值范围.

（2）若函数在区间 $(-\infty,1]$ 上有意义，求 a 的取值范围.

解：（1）函数 $f(x)=\sqrt{1+3^x\cdot a}$ 的定义域是 $(-\infty,1]\Leftrightarrow$ 不等式 $1+3^x\cdot a\geqslant 0$ 的解集是 $(-\infty,1]$，即 1 是方程 $1+3^x\cdot a=0$ 的根，所以 $a=-\frac{1}{3}$；

（2）函数 $f(x)=\sqrt{1+3^x\cdot a}$ 在 $(-\infty,1]$ 上有意义 $\Leftrightarrow$ 不等式 $1+3^x\cdot a\geqslant 0$ 在区间 $(-\infty,1]$ 上恒成立 $\Leftrightarrow a\geqslant -\frac{1}{3^x}$ 在区间 $(-\infty,1]$ 上恒成立；因为函数 $y=-\frac{1}{3^x}$ 在区间 $(-\infty,1]$ 上的最大值为 $-\frac{1}{3}$，所以 $a\geqslant -\frac{1}{3}$.

【思路导航】

1. 函数是一种特殊的映射——非空数集到非空数集上的一种映射.

2. 若给出函数的解析式，求函数的定义域时我们通常从以下几个方面来考虑：（1）若有分母则分母不为零；（2）若有偶次根式，则被开方数非负；（3）若有对数式，则真数大于零且底数大于零而不等于 1；求一个函数的定义域，实质上就是求由上述的不等式组成的不等式组的解集；（4）若 $f(x)$ 是由实际问题列出的，那么函数的定义域是使解析式本身有意义且符合实际意义的实数的集合.

第 4 课时　求函数解析式

【应考目标】

掌握函数表达式的常用方法，学会一些抽象函数的解决方法.

【知识回顾】

函数解析式就是函数对应法则的代数表示，也叫函数表达式. 函数解析式可以是一个式子，也可以是由多个式子组成的，即分段函数，这时每一个式子的自变量必须给出取值范围.

【示例导拨】

例 1. 若 $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$，求 $f(x)$.

解：用换元法. 令 $t=\sqrt{x}+1$ 则 $x=(t-1)^2$，$t\geqslant 1$，代入原式有

$f(t)=(t-1)^2+2(t-1)=t^2-1$

所以 $f(x)=x^2-1$　$(x\geqslant 1)$.

例 2. 若 $g(x)=1-2x$，$f[g(x)]=\frac{1-x^2}{1+x^2}$ $(x\neq 0)$，求 $f(\frac{1}{2})$.

解一：令 $1-2x=\frac{1}{2}$，则 $x=\frac{1}{4}$，

所以 $f(\frac{1}{2})=\cdots=\frac{15}{17}$.

解二：令 $1-2x=t$，则 $x=\frac{1-t}{2}$，

$f[g(x)]=f(t)=\cdots=\frac{3+2t-t^2}{5-2t+t^2}$，

所以 $f(\frac{1}{2})=\cdots=\frac{15}{17}$.

例 3. 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}^+$，且 $f(xy)=f(x)+f(y)$，$f(8)=3$，求 $f(\sqrt{2})$.

解：因为 $f(xy)=f(x)+f(y)$，所以 $f(8)=f(2\times 4)=f(2)+f(4)=f(2)+f(2\times 2)=f(2)+f(2)+f(2)=3f(2)=3$，即 $f(2)=1$.

又 $f(2)=f(\sqrt{2}\times\sqrt{2})=f(\sqrt{2})+f(\sqrt{2})=2f(\sqrt{2})=1$.

所以$f(\sqrt{2})=\frac{1}{2}$.

例4. 设二次函数$f(x)$满足$f(x-2)=f(-x-2)$，且图象在y轴上的截距为1，被x轴截得的线段长为$2\sqrt{2}$，求$f(x)$的解析式.

解一： 设$f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$，

由$f(x-2)=f(-x-2)$得

$4a-b=0$ ………………………………… (1)

又$|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=2\sqrt{2}$，

所以$b^2-4ac=8a^2$ ……………………… (2)

又已知$c=1$ ……………………………… (3)

由(1)、(2)、(3)解得$b=2$，$a=\frac{1}{2}$，$c=1$，$f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+1$.

解二： $f(x-2)=f(-x-2)$，即$f(-2+x)=f(-2-x)$，故$y=f(x)$的图象有对称轴$x=-2$，可设$y=a(x+2)^2+k$（后略）.

解三： 因为$y=f(x)$的图象有对称轴$x=-2$，又$|x_1-x_2|=2\sqrt{2}$，

所以$y=f(x)$与x轴的交点为$(-2-\sqrt{2},0)$，$(-2+\sqrt{2},0)$.

所以可设$y=a(x+2+\sqrt{2})(x+2-\sqrt{2})$.

因为$f(0)=1$，所以$a=\frac{1}{2}$（后略）.

说明： (1) 若函数满足$f(a+x)=f(a-x)$，则其图象关于直线$x=a$对称. (2) 二次函数与x轴的交点一定关于对称轴（直线$x=a$）对称. (3) 若二次方程$ax^2+bx+c=0$有两根x_1、x_2，则方程一定可分解为$a(x-x_1)(x-x_2)=0$，同样若二次函数在x轴的截距为x_1、x_2，则函数一定可设为$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$，这由曲线与方程可以理解.

[思路导航]

(1) 求函数的表达式主要有换元法、待定系数法、配方法等.

(2) 应用题中，根据所给的条件写出函数的表达式. 由自变量的实际意义求出函数定义域.

第5课时　函数的奇偶性与周期性（一）

[高考目标]

理解和掌握奇函数、偶函数、周期函数的定义，并应用它们去解决一些问题.

[知识回顾]

1. 函数的奇偶性.

设$y=f(x)\ (x\in A)$，如果对于任意$x\in A$都有$f(-x)=f(x)$，则称函数$y=f(x)$为偶函数；如果对于任意$x\in A$都有$f(-x)=-f(x)$，则称函数$y=f(x)$为奇函数；如果函数$y=f(x)$是奇函数或偶函数，则称函数$y=f(x)$具有奇偶性.

2. 奇偶性判断方法.

(1) 定义法. 步骤：a. 求出定义域；b. 判断定义域是否关于原点对称；c. 求$f(-x)$；d. 比较$f(-x)$与$f(x)$或$f(-x)$与$-f(x)$的关系.

(2) 图象法.

3. 函数的周期性.

定义：若T为非零常数，对于定义域内的任一x，使$f(x+T)=f(x)$恒成立，则$f(x)$叫做周期函数，T叫作这个函数的一个周期.

[示例点拨]

例1. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$；

(2) $y=\frac{x}{2^x+1}-\frac{x}{2}$；

(3) $f(x)=\begin{cases}x^2+x & (x<0)\\ -x^2+x & (x>0)\end{cases}$.

解： (1) 因为$x\in\mathbf{R}$，$f(-x)=\ln(\sqrt{1+x^2}+x)=\ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}=-\ln(\sqrt{1+x^2}-x)=-f(x)$.

所以该函数是奇函数.

(2) 因为 $x\in\mathbf{R}$，$f(-x)=-x\left(\frac{1}{2^{-x}+1}-\frac{1}{2}\right)$

$=-x\left(\frac{2^x}{1+2^x}-\frac{1}{2}\right)$

$=-x\left[\frac{2\cdot 2^x-(1+2^x)}{2(1+2^x)}\right]$

$=-x\cdot\frac{2^x-1}{2(1+2^x)}=-x\cdot\frac{(2^x+1)-2}{2\cdot(2^x+1)}$

$=-x\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^x+1}\right)=\frac{x}{2^x+1}-\frac{x}{2}=f(x)$.

所以 $f(x)$ 是偶函数.

(3) 当 $x<0$ 时，$-x>0$. 所以 $f(-x)=-(-x)^2+(-x)=-x^2-x=-f(x)$.

当 $x>0$ 时，$-x<0$. 所以 $f(-x)=(-x)^2+(-x)=x^2-x=-f(x)$.

所以对任意 $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，都有 $f(-x)=-f(x)$.

所以 $f(x)$ 是奇函数.

例 2. 若 $f(x)=\frac{a2^x+a-2}{2^x+1}$ 为奇函数，求实数 a 的值.

解： 因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$.

即 $\frac{a\cdot 2^{-x}+a-2}{2^{-x}+1}=-\frac{a\cdot 2^x+a-2}{2^x+1}\Leftrightarrow 2(a-1)\cdot 2^x=-2(a-1)$.

即 $(a-1)[2\cdot 2^x+2]=0$，所以 $a=1$.

例 3. 设 $f(x)$ 为偶函数，$g(x)$ 为奇函数，又 $f(x)+g(x)=\frac{x}{1-x}$，求 $f(x)$ 和 $g(x)$.

解： 由 $f(x)+g(x)=\frac{x}{1-x}$ 及 $f(x)$、$g(x)$ 的奇偶性，可知

$f(-x)+g(-x)=\frac{-x}{1+x}$ ①，

$f(x)-g(x)=\frac{-x}{1+x}$ ②

①＋②得：$2f(x)=\frac{x}{1-x}-\frac{x}{1+x}$，所以 $f(x)=\frac{x^2}{1-x^2}$.

同理：$g(x)=\frac{x}{1-x^2}$.

例 4. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且对任意 x 都有 $f(x-1)=f(x+3)$，在区间 $[4,6]$ 上，$f(x)=e^x+1$，求在区间 $[-2,0]$ 上 $f(x)$ 的反函数.

解： 由 $f(x-1)=f(x+3)$ 得 $f(t)=f(t+4)$，所以 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数.

当 $x\in[-2,0]$ 时，$-x\in[0,2]$，$4-x\in[4,6]$，又 $f(x)$ 为偶函数.

所以 $f(x)=f(-x)=f(4-x)=e^{4-x}+1$.

$f^{-1}(x)=4-\ln(x-1)$，$x\in(e^4+1,e^6+1)$.

［思路导航］

1. 函数 $y=f(x)$ 是奇函数或偶函数的必要条件是：定义域关于原点对称. 函数奇偶性的定义是判定函数奇偶性的依据，但有时为了便于判断，需将函数进行变形、化简或利用定义的等价形式：

$$f(-x)=-f(x)\Leftrightarrow f(-x)+f(x)=0\Leftrightarrow\frac{f(-x)}{f(x)}=-1\ (f(x)\neq 0).$$

$$f(-x)=f(x)\Leftrightarrow f(-x)-f(x)=0\Leftrightarrow\frac{f(-x)}{f(x)}=1\ (f(x)\neq 0)$$

2. 已知：$H(x)=f(x)g(x)$，

若非零函数 $f(x)$，$g(x)$ 的奇偶性相同，则在公共定义域（非空）内 $H(x)$ 为偶函数.

若非零函数 $f(x)$，$g(x)$ 的奇偶性相反，则在公共定义域（非空）内 $H(x)$ 为奇函数.

3. 若 $f(x)$ 是奇函数，且 $0\in$ 定义域，则 $f(0)=0$.

第 6 课时　函数的奇偶性与周期性（二）

［示例点拨］

例 1. 已知 $f(x)=x^5+ax^3+bx-8$，且 $f(-2)=10$，求 $f(2)$.

解： 由已知 $f(x)+8=x^5+ax^3+bx$，

令 $g(x)=f(x)+8=x^5+ax^3+bx$，

则 $g(x)$ 为奇函数，

$g(2)=-g(2)$，

即 $f(2)+8=-[f(-2)+8]=-18$