21世纪高等院校经典教材同步辅导
ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

微积分

全程导学及习题全解

上册

同济大学第二版

主编　杨蕤
副主编　杨晓叶　潘大伟
主审　苗明川

◆知识归纳　梳理主线重点难点
◆习题详解　精确解答教材习题
◆提高练习　巩固知识迈向更高

中国时代经济出版社
China Modern Economic Publishing House

21世纪高等院校经典教材同步辅导
ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

微积分

全程导学及习题全解

上册

同济大学第二版

主编　杨蕤
副主编　杨晓叶　潘大伟
主审　苗明川

◆知识归纳　梳理主线重点难点
◆习题详解　精确解答教材习题
◆提高练习　巩固知识迈向更高

中国时代经济出版社
China Modern Economic Publishing House

图书在版编目（CIP）数据

微积分全程导学及习题全解．上册/杨蕤主编．—北京：中国时代经济出版社，2006.6

（21世纪高等院校经典教材同步辅导）

ISBN 7-80221-048-8

Ⅰ．微…　Ⅱ．杨…　Ⅲ．微积分-高等学校-教学参考资料　Ⅳ．O172

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第028545号

微积分全程导学及习题全解（上册）

杨蕤 主编

出版者	中国时代经济出版社
地　址	北京东城区东四十条24号 青蓝大厦东办公区11层
邮政编码	100007
电　话	(010)68320825(发行部) (010)88361317(邮购)
传　真	(010)68320634
发　行	各地新华书店
印　刷	北京市优美印刷有限责任公司
开　本	880×1230　1/32
版　次	2006年9月第1版
印　次	2006年9月第1次印刷
印　张	11.5
字　数	350千字
印　数	1～5000册
定　价	15.00元
书　号	ISBN 7-80221-048-8/G·032

内容提要

本书是同济版《微积分》教材的一本配套学习辅导及习题解答教材。编写的重点在于原教材中各章节全部习题的精解详答,并对典型习题做了很详细的分析和提纲挈领的点评,思路清晰,逻辑缜密,循序渐进的帮助读者分析并解决问题,内容详尽,简明易懂。本书对各章的知识点进行了归纳和提炼,帮助读者梳理各章脉络,统揽全局。在《微积分》教材给出的习题的基础上,根据每章的知识重点,精选了有代表的例题,方便读者迅速掌握各章的重点和难点。

本书可作为工科各专业本科学生《微积分》课程教学辅导材料和复习参考用书及工科考研强化复习的指导书。也可以作为《微积分》课程教师的教学参考书。

前　言

《微积分》是解决工科数学问题和工程实际问题的重要理论基础和实用工具，也是工科各专业研究生入学考试的内容。为了帮助广大学生更好的学习和掌握《微积分》课程的理论精髓和解题方法，我们根据同济大学应用数学系编写的《微积分》教材，编写了这本辅导资料。

本辅导教材根据《微积分》教材中各章的内容，着重编写了以下几方面的内容：

知识点概要：精练了各章中的主要知识点，理清各知识点之间的脉络联系，囊括了主要定理及相关推论，重要公式和解题技巧等，帮助读者融会贯通，系统理解各章的体系结构，奠定扎实的理论基础。

典型例题讲解：精选具有代表性的重点习题进行讲解，分析问题的突破点，指引解决问题的思路，旨在帮助读者学会独立思考的方式和分析问题的办法。

习题全解：依据教材各章节的习题，进行详尽的解答。考虑到不同层次读者的需求，在解答过程中，对于重点和难点习题进行了分析和讲解，归纳解题技巧。

本教材由杨蕤、杨晓叶、潘大伟等同志编写，全书由苗明川老师主审。苗明川老师高深的造诣、严谨的治学态度，使编者受益匪浅，对此深表感谢。本书编写过程中得到任

卉、谢婧等同志的大力协助，并得到中国时代经济出版社的领导和有关编辑的大力支持，为此表示忠心的感谢！

对《微积分》教材作者同济大学应用数学系老师们，表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，加之时间仓促，本书难免有缺点和疏漏，这些不妥之处，敬请各位专家及广大读者批评指正。

编　者

2006年8月

目　录

预备知识

知识点概要

1. 集合

(1)概念

事物组成的总体.

(2)元素

组成集合的事物.

(3)分类(按元素个数)

有限集,无限集.

(4)特殊集合的表示方法

实数集	$\mathbf{R}$	正实数集	$\mathbf{R}^+$
自然数集	$\mathbf{N}$	空集	$\mathbf{\Phi}$
整数集	$\mathbf{Q}$	负整数集	$\mathbf{Q}^-$
复数集	$\mathbf{C}$	除 0 复数集	$\mathbf{C}^*$

2. 集合的运算

(1)并集

$A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$;

(2)交集

$A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$;

(3)差集

$A\backslash B=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$;

(4)余集

$A^C=\{x|x\in I, I$ 为余集,且 $x\notin A\}$;

(5)集合运算律

①交换律 $A\cup B=B\cup A$,

$A\cap B=B\cap A$;

②结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

③分配律 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

④对偶律 $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$,

$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

(6)直积(笛卡尔积)

$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$.

3. 区间和邻域

(1)开区间

$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$.

(2)闭区间

$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$.

(3)半开半闭区间

$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$.

(4)半闭半开区间

$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$.

(5)无穷区间

$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$,

$(-\infty,a)=\{x\mid x<a\}$.

(6)邻域

$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}$.

(7)去心邻域

$\dot{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$.

4. 映射

(1)函数的三要素

定义域,值域,对应法则.

(2)满射

(3)单射

(4)一一映射(一一对应)

(5)逆映射

只有一一映射才是可逆映射.

(6)复合映射

5. 一元函数

(1)函数的表示法

表格法、图形法、解析法.

(2)自然定义域

(3)分段函数

6. 函数性质

(1)有界性

$\exists M>0, \forall x\in X$,满足$|f(x)|\leqslant M$.

f在X上有界:$f\in B(X)$.

(2)单调性

递增:$\forall x_1,x_2\in X, x_1<x_2$时,$f(x_1)<f(x_2)$.

递减:$\forall x_1,x_2\in X, x_1<x_2$时,$f(x_1)>f(x_2)$.

(3)奇偶性

①偶函数　$\forall x\in D, f(x)=f(-x)$.

偶函数关于y轴对称.

②奇函数　$\forall x\in D, f(x)=-f(-x)$.

奇函数关于原点对称.

(4)周期性

$\exists T\neq 0, \forall x\in D$,有$x\pm T\in D$,且$f(x+T)=f(x)$.

(5)反函数

原函数与反函数的图形在同一坐标平面内关于直线$y=x$对称.

(6)复合函数

(7)函数的运算

和、差、积、商、线性组合.

7. 基本初等函数

(1)幂函数	$y=x^a$	(a为常数)
(2)指数函数	$y=a^x$	($a>0$且$a\neq 1$)
(3)对数函数	$y=\log_a x$	(a是常数且$a>0, a\neq 1$)
(4)三角函数	$y=\sin x$	$y=\cos x$
	$y=\tan x$	$y=\cot x$
	$y=\sec x$	$y=\csc x$
(5)反三角函数	$y=\arcsin x$	$y=\arccos x$

$y=\arctan x \qquad y=\operatorname{arccot} x$

$y=\operatorname{arcsec} x \qquad y=\operatorname{arccsc} x$

8. 初等函数

(1)概念

(2)双曲函数及其反函数

$$y=\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

$$y=\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$$y=\tanh x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

$$y=\coth x=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

$$y=\operatorname{arsinh} x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$$

$$y=\operatorname{arcosh} x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

$$y=\operatorname{artanh} x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

习题全解

1. 设 $A=\{x|\sqrt{1-x^2}\leqslant 1\}$、$B=\{x|0<x<2\}$ 是实数域中的两个子集，写出 $A\cup B$、$A\cap B$、$A\backslash B$ 及 $B\backslash A$ 的表达式.

解：

$$\begin{aligned} A\cup B&=\{x|x\in A\text{ 或 }x\in B\}\\ &=\{x|\sqrt{1-x^2}\leqslant 1\text{ 或 }0<x<2\}\\ &=\{x||x|\leqslant 1\text{ 或 }0<x<2\}\\ &=\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\text{ 或 }0<x<2\}\\ &=\{x|-1\leqslant x<2\}=[-1,2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A\cap B&=\{x|x\in A\text{ 且 }x\in B\}\\ &=\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\text{ 且 }0<x<2\}\\ &=\{x|0<x\leqslant 1\}=(0,1]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A\backslash B&=\{x|x\in A\text{ 且 }x\notin B\}\\ &=\{x|-1\leqslant x\leqslant 0\}=[-1,0]. \end{aligned}$$

$$B\backslash A=\{x|x\in B\text{ 且 }x\notin A\}$$

$=\{x|1<x<2\}=(1,2)$.

2. 两个集合 A 与 B 之间如果存在一一对应，则称集合 A 与 B 等势. 例如，设 A 是正奇数集合，B 是正偶数集合，如果定义从 A 到 B 的映射 T：$T(2n+1)=2n+2$，其中 n 为任一自然数，则 T 是 A 与 B 之间的一一对应，因此这两个集合等势. 试说明下列数集是等势的：

(1)整数集合 $\mathbf{Z}$ 与自然数集 $\mathbf{N}$；

(2)区间(1,2)与区间(3,5).

解：

(1) $T(x)=\begin{cases}2x & x\geqslant 0 \text{ 且 } x \text{ 为整数.}\\ -2x-1 & x<0 \text{ 且 } x \text{ 为整数.}\end{cases}$

且 $T:\mathbf{Z}\to\mathbf{N}$ 且 T 为一一映射.

整数集合 $\mathbf{Z}$ 与自然数集 $\mathbf{N}$ 等势.

(2) $T(x)=2x+1, x\in(1,2)$

则 $T:(1,2)\to(3,5)$，且 T 为一一映射.

∴区间(1,2)与区间(3,5)等势.

3. 求下列函数的自然定义域：

(1)$y=\dfrac{1}{x+2}$；　　(2)$y=\sqrt{x^2-9}$；

(3)$y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+1}$；　　(4)$y=\dfrac{1}{[x+1]}$.

解：

(1) $D=\{x|x+2\neq 0\}=\{x|x\neq -2\}$
$=(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$.

(2) $D=\{x|x^2-9\geqslant 0\}=\{x|x\geqslant 3 \text{ 或 } x\leqslant -3\}$
$=(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$.

(3) $D=\{x|1-x^2\neq 0 \text{ 且 } x+1\geqslant 0\}$
$=\{x|x\neq\pm 1 \text{ 且 } x\geqslant -1\}$
$=(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(4) $D=\{x|[x+1]\neq 0\}$
$=\{x|x+1<0 \text{ 或 } x+1\geqslant 1\}$
$=(-\infty,-1)\cup[0,+\infty)$.

4. 下列函数 f 和 φ 是否相同？为什么？

(1)$f(x)=\dfrac{x}{x}, \varphi(x)=1$；　　(2)$f(x)=x, \varphi(x)=\sqrt{x^2}$；

(3)$f(x)=1, \varphi(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$；　　(4)$f(x)=1, \varphi(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$.

解:

(1) $D(f)=\{x|x\neq 0\}$, $D(\varphi)=\mathbf{R}$

$\because D(f)\neq D(\varphi)$

$\therefore$ 函数 f 与 φ 不相同.

(2) $D(f)=\mathbf{R}$, $D(\varphi)=\{x|x^2\geqslant 0\}=\mathbf{R}$

$\varphi(x)=\sqrt{x^2}=|x|\geqslant 0$

$\because$ 函数 f 与 φ 的值域不相同

$\therefore$ 函数 f 与 φ 不相同.

(3) $D(f)=\mathbf{R}$, $D(\varphi)=\mathbf{R}$

$\varphi(x)=\sin^2 x+\cos^2 x=1=f(x)$

$\therefore$ 函数 f 与 φ 相同.

(4) $D(f)=\mathbf{R}$

$D(\varphi)=\{x|\cos x\neq 0\}=\{x|x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\}$

$\because D(f)\neq D(\varphi)$

$\therefore$ 函数 f 与 φ 不相同.

注意:在讨论函数是否相同时,应分别考察定义域,值域和对应法则是否相同.

5. 讨论下列函数的奇偶性:

(1) $y=x+x^2-x^3$; (2) $y=a+b\cos x$;

(3) $y=x+\sin x+e^x$; (4) $y=x\sin\frac{1}{x}$.

解:

(1) $f(x)=x+x^2-x^3$

$D(f)=\mathbf{R}$

$f(-x)=-x+(-x)^2-(-x)^3=-x+x^2+x^3$

$\because f(-x)\neq f(x)$ 且 $f(-x)\neq -f(x)$

$\therefore y=x^2+x^2-x^3$ 是非奇非偶函数.

(2) $\because f(x)=a+b\cos x$

$\therefore D(f)=\mathbf{R}$

$\because f(-x)=a+b\cos(-x)=a+b\cos x=f(x)$

$\therefore y=a+b\cos x$ 是偶函数.

(3) $\because f(x)=x+\sin x+e^x$

$\therefore D(f)=\mathbf{R}$

$\because f(-x)=(-x)+\sin(-x)+e^{-x}=-x-\sin x+e^{-x}$

$\therefore f(-x)\neq f(x)$ 且 $f(-x)\neq -f(x)$

$\therefore y=x+\sin x+e^x$ 是非奇非偶函数.

(4) $\because f(x)=x\sin\frac{1}{x}$

$\therefore D(f)=\{x \mid x\neq 0, x\in\mathbf{R}\}$

$\because f(-x)=(-x)\sin\frac{1}{(-x)}=x\sin\frac{1}{x}=f(x)$

$\therefore y=x\sin\frac{1}{x}$ 是偶函数.

注意:判断函数奇偶性时,考察定义域是否关于原点对称是一个很重要的步骤.在定义域满足条件的前提下再去判断函数 $f(-x)$ 的性质.

6. 证明:两个偶函数之积是偶函数,两个奇函数之积是偶函数;一个奇函数与一个偶函数之积是奇函数.

证明:

(1)若 $f(x),g(x)$ 均为偶函数,则 $\forall x\in D$

$f(-x)=f(x), g(-x)=g(x)$

则 $h(x)=f(x)g(x)$ 的定义域关于原点对称,且

$h(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)g(x)=h(x)$

$\therefore$两个偶函数之积是偶函数.

(2)若 $f(x),g(x)$ 均为奇函数,则

$f(-x)=-f(x), g(-x)=-g(x)$

由 $h(x)=f(x)g(x)$ 的定义域关于原点对称,且

$h(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)g(x)=h(x)$

$\therefore$两个奇函数之积是奇函数.

(3)若 $f(x)$ 为偶函数,$g(x)$ 为奇函数,则

$f(-x)=f(x), g(-x)=-g(x)$

则 $h(x)=f(x)g(x)$ 的定义域关于原点对称,且

$h(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)[-g(x)]=-h(x)$

$\therefore$一个奇函数与一个偶函数之积是奇函数.

7. 设 $f(x)$ 是定义在对称区间 $(-l,l)$ 上的任何函数,证明:

(1)$\varphi(x)=f(x)+f(-x)$ 是偶函数,$\psi(x)=f(x)-f(-x)$ 是奇函数,

(2)定义在区间 $(-l,l)$ 上的任何函数可以表示为一个偶函数与一个奇函数的和.

证明:

(1) $\because \varphi(x)=f(x)+f(-x), \psi(x)=f(x)-f(-x)$,

$\therefore D(\varphi)=D(\psi)=D(f)=(-l,l)$

$\varphi(-x)=f(-x)+f(x)=f(x)+f(-x)=\varphi(x)$

$\psi(-x)=f(-x)-f(x)=-[f(x)-f(-x)]=-\psi(x)$

$\therefore \varphi(x)=f(x)+f(-x)$是偶函数,$\psi(x)=f(x)-f(-x)$是奇函数.

(2)由前题,知 $\varphi(x)$是偶函数,$\psi(x)$为奇函数,

则 $f(x)=\frac{1}{2}[\varphi(x)+\psi(x)]=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2}\psi(x)$

且$\frac{1}{2}\varphi(x)$仍为偶函数,$\frac{1}{2}\psi(x)$仍为奇函数

$\therefore$定义在区间$(-l,l)$上的任何函数可以表示为一个偶函数与一个奇函数的和.

8. 证明:

(1)两个增加(减少)的函数之和是增加(减少)的;

(2)两个增加(减少)的正值函数之积是增加(减少)的;

(3)两个增加的函数的复合函数是增加的.又问两个减少的函数的复合函数情况如何?

证明:

(1)设 $f(x)$和 $g(x)$是增加的函数,则

$\forall x_1,x_2\in D$,若 $x_1<x_2$,

则 $f(x_1)<f(x_2),g(x_1)<g(x_2)$

令$h(x)=f(x)+g(x)$

$$\begin{aligned}h(x_1)-h(x_2)&=[f(x_1)+g(x_1)]-[f(x_2)+g(x_2)]\\&=[f(x_1)-f(x_2)]+[g(x_1)-g(x_2)]<0\end{aligned}$$

即 $h(x_1)<h(x_2)$

$\therefore$两个增加的函数之和是增加的;

同理可证,两个减少的函数之和是减少的.

(2)若 $f(x)$和 $g(x)$是增加的正值函数,则

$\forall x_1,x_2\in D$,若 $x_1<x_2$,

则 $f(x_2)>f(x_1)>0,g(x_2)>g(x_1)>0$

令 $h(x)=f(x)g(x)$,

$$\begin{aligned}&h(x_2)-h(x_1)\\&=f(x_2)g(x_2)-f(x_1)g(x_1)\\&=[f(x_2)g(x_2)-f(x_2)g(x_1)]+[f(x_2)g(x_1)-f(x_1)g(x_1)]\\&=f(x_2)[g(x_2)-g(x_1)]+g(x_1)[f(x_2)-f(x_1)]>0\end{aligned}$$

即 $h(x_2)>h(x_1)$

$\therefore$两个增加的正值函数之积是增加的;

同理可证,两个减少的正值函数之积是减少的.

(3)若 $f(x)$和 $g(x)$是增加的函数,则

$\forall x_1,x_2\in D$,若 $x_1<x_2$,