高中新课标

◎根据教育部最新教材编写◎

教材全解丛书

中学教材全解

ZHONGXUEJIAOCAI QUANJIE

总主编／薛金星

高中数学

选修 1–2

配套人民教育出版社实验教科书

B版

陕西人民教育出版社

高中新课标

根据教育部最新教材编写

中学教材全解

高中数学选修 1-2

配套人民教育出版社实验教科书B版

陕西人民教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

中学教材全解. 高中数学:选修/薛金星主编;丁一分册主编. -西安:陕西人民教育出版社,2005.3

ISBN 7—5419—9462—6

Ⅰ.中... Ⅱ.①薛...②丁... Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 028956 号

中学教材全解

高中数学选修 1-2

配套人民教育出版社实验教科书 B 版

陕西人民教育出版社出版发行

(西安市长安南路 181 号)

各地书店经销　　北京市昌平兴华印刷厂印刷

890×1240 毫米　32 开本　6 印张　220 千字

2005 年 11 月第 1 版　2005 年 11 月第 1 次印刷

ISBN 7-5419-9462-6/G·8250

定价:8.80 元

出版前言

《中学教材全解》系列丛书根据教育部最新教材编写。值此出版之际，我们祝愿《中学教材全解》将伴随您度过中学阶段的美好时光，帮您迈向日夜向往的高等学府。

这套丛书与其他同类书相比具有以下几个鲜明特色：

第一，新。

首先是教材新。本书以最新教改精神为依据，以现行初、高中最新教材为蓝本编写。其次是体例新。紧扣教材，步步推进，设题解题、释疑解难，课后自测，迁移延伸，逐次深入。其三是题型(材料)新。书中选用的题型(材料)都是按中考、高考要求精心设计挑选的，让读者耳目一新。

第二，细。

首先是对教材讲解细致入微。以语文科为例，小到字的读音、词的辨析，大到阅读训练和作文训练都在本书中有所体现。其次是重点难点详细讲析，既有解题过程又有思路点拨。其三是解题方法细，一题多解，多题一法，变通训练，总结规律。

第三，精。

首先是教材内容讲解精。真正体现围绕重点、突破难点，引发思考，启迪思维。根据考点要求，精讲精析，使学生举一反三，触类旁通。其次是问题设置精，注重典型性，避免随意性，注重迁移性，避免孤立性，实现由知识到能力的过渡。

第四，透。

首先是对教纲考纲研究得透。居高临下把握教材，立足于教材，又不拘泥于教材。其次是对学生知识储备研究得透。学习目标科学可行，注重知识"点"与"面"的联系，"教"与"学"的联系。再次是对问题讲解得透，一题多问，一题多解，培养求异思维和创新思维能力。

第五，全。

首先是知识分布全面。真正体现了"一册在手，学习内容全有"的编写指导思想。其次是该书的信息量大。它涵盖了中学文化课教学全部课程和教与学的全部过程，内容丰富，题量充足。再次是适用对象全面。本书着眼于面向全国重点、普通中学的所有学生，丛书内容由浅入深，由易到难，学生多学易练，学习效果显著。

本系列丛书虽然从策划、编写，再到出版，精心设计，细致操作，可谓尽心尽力，但疏漏之处在所难免，诚望广大读者批评指正。

薛金星于北师大

目 录

第一章 统计案例 ……… (1)

本章综合解说 ………… (1)

1.1 独立性检验 ……… (3)

新课标导学 …………… (3)

教材内容全解 ………… (3)

典型例题精析 ………… (7)

新课标问题研讨 ……… (10)

高考要点阐释 ………… (11)

本节内容总结 ………… (13)

自测与评估 …………… (14)

课后习题全解 ………… (17)

1.2 回归分析 ………… (18)

新课标导学 …………… (18)

教材内容全解 ………… (18)

典型例题精析 ………… (25)

新课标问题研讨 ……… (30)

高考要点阐释 ………… (33)

本节内容总结 ………… (33)

自测与评估 …………… (34)

课后习题全解 ………… (35)

章末总结提高 ………… (37)

知识网络归纳 ………… (37)

本章注意问题 ………… (37)

专题综合讲解 ………… (38)

高考热点指南 ………… (39)

课后习题全解 ………… (39)

第二章 推理与证明 …… (41)

本章综合解说 ………… (41)

2.1 合情推理与演绎推理
…………………………… (44)

2.1.1 合情推理 ……… (44)

新课标导学 …………… (44)

教材内容全解 ………… (44)

典型例题精析 ………… (49)

新课标问题研讨 ……… (51)

高考要点阐释 ………… (52)

本节内容总结 ………… (53)

自测与评估 …………… (54)

课后习题全解 ………… (56)

2.1.2 演绎推理 ……… (57)

新课标导学 …………… (57)

教材内容全解 ………… (57)

典型例题精析 ………… (59)

新课标问题研讨 ……… (62)

高考要点阐释 ………… (63)

本节内容总结 ………… (64)

自测与评估 …………… (64)

课后习题全解 ………… (66)

2.2 直接证明与间接证明
…………………………… (67)

2.2.1 综合法与分析法
…………………… (67)

新课标导学 …………… (67)

教材内容全解 ………… (67)

典型例题精析 ………… (73)

新课标问题研讨 ……… (76)

高考要点阐释 ………… (77)

本节内容总结 ………… (80)

自测与评估 …………… (80)
课后习题全解 ………… (83)
2.2.2 反证法 ………… (84)
新课标导学 …………… (84)
教材内容全解 ………… (85)
典型例题精析 ………… (87)
新课标问题研讨 ……… (88)
高考要点阐释 ………… (88)
本节内容总结 ………… (89)
自测与评估 …………… (89)
课后习题全解 ………… (91)
章末总结提高 …………… (93)
知识网络归纳 ………… (93)
本章注意问题 ………… (93)
专题综合讲解 ………… (94)
高考热点指南 ………… (96)
课后习题全解 ………… (102)
第三章 数系的扩充与复数的引入 ……… (105)
本章综合解说 ………… (105)
3.1 数系的扩充与复数的引入 …………… (107)
新课标导学 …………… (107)
教材内容全解 ………… (107)
典型例题精析 ………… (112)
新课标问题研讨 ……… (116)
高考要点阐释 ………… (117)
本节内容总结 ………… (118)
自测与评估 …………… (119)
课后习题全解 ………… (122)
3.2 复数的运算 ……… (124)
3.2.1 复数的加法和减法 …………………… (124)
新课标导学 …………… (124)
教材内容全解 ………… (125)
典型例题精析 ………… (128)
新课标问题研讨 ……… (130)
高考要点阐释 ………… (131)
本节内容总结 ………… (132)
自测与评估 …………… (132)
课后习题全解 ………… (134)
3.2.2 复数的乘法和除法 …………………… (134)
新课标导学 …………… (134)
教材内容全解 ………… (135)
典型例题精析 ………… (138)
新课标问题研讨 ……… (142)
高考要点阐释 ………… (142)
本节内容总结 ………… (144)
自测与评估 …………… (144)
课后习题全解 ………… (146)
章末总结提高 …………… (149)
知识网络归纳 ………… (149)
本章注意问题 ………… (150)
专题综合讲解 ………… (150)
高考热点指南 ………… (152)
课后习题全解 ………… (153)
第四章 框 图 …………… (155)
本章综合解说 …………… (155)
4.1 流程图 …………… (157)
新课标导学 …………… (157)
教材内容全解 ………… (157)
典型例题精析 ………… (161)
新课标问题研讨 ……… (163)
高考要点阐释 ………… (165)
本节内容总结 ………… (166)
自测与评估 …………… (167)
课后习题全解 ………… (176)
4.2 结构图 …………… (178)
新课标导学 …………… (178)
教材内容全解 ………… (178)
典型例题精析 ………… (180)
新课标问题研讨 ……… (182)
本节内容总结 ………… (182)
自测与评估 …………… (183)
课后习题全解 ………… (185)
章末总结提高 …………… (185)
知识网络归纳 ………… (185)
本章注意问题 ………… (186)
专题综合讲解 ………… (186)
高考热点指南 ………… (186)
课后习题全解 ………… (187)

教材全解

第一章

统计案例

本章综合解说

1. 本章在学科知识中的地位与重要性

本章“统计案例”是在原来学习统计的基础上，对具体问题进行讨论，是对原来学习的统计的进一步加深；通过对具体典型案例的讨论，使我们了解和使用一些常用的统计方法去解决有关的实际问题，进一步体会运用统计方法解决实际问题的基本思想，认识统计方法在决策中的作用．高考中只要求学生了解几种统计方法的基本思想及其初步应用，对于其理论基础不作要求，避免学生单纯记忆和机械套用公式进行计算．

2. 本章主要内容

先通过掷骰子介绍事件 A 与事件 B 相互独立的含义．A 与 B 同时发生记作 $A\cap B$，简记作 AB．如果 $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$，则称事件 A 与 B 相互独立．χ^2（卡方）的表达式及事件 A、B 有关和无关的判断方法．两个临界值 3.841 和 6.635 与事件有关的关系，进行独立检验；从实际问题发现回归

直线的不足说明进行回归分析的必要性,相关系数r的公式及性质,做回归分析的一般步骤.

3. 本章知识与社会热点、生产生活、科技前沿等方面的联系与体现

统计案例在现实生活中的应用极为广泛,如吸烟与肺病,生产中的质量控制等都用到统计分析的有关知识. 在社会研究中,利用统计分析的问题也有许多,如预测人的寿命,某个年龄段的死亡率. 军事工业中也可以用来分析炮弹的射程、杀伤半径等. 刑警利用脚印或前臂长度预测人的身高,也是统计的一个重要应用.

4. 学法建议

"统计案例"一章是在前面学习统计的基础上进行的,学生有一定了解,但不深刻,学习中应多从实际问题入手考虑、认识自我已有知识的不足,激发强烈的求知欲. 通过对一些典型案例数据的处理,了解和使用一些常用的统计方法,再通过对数据的直观感觉,认识统计方法的特点(如统计推断可能犯错误,估计结果也有一定的随机性). 在学习中不断体会统计方法应用的广泛性,多找实际问题,结合运用所学习的统计知识去分析、解决问题,多与社会实践相结合,亲自动手实践,加深对知识的认识,巩固知识,不断创新. 要在问题的解决中,多寻找规律,合理建模,形成方法. 但不能单纯记忆公式和机械套用公式. 学会在学习中不断自我完善,探求适合自己的学习方法,并会应用必要的现代技术手段处理数据.

1.1　独立性检验

新课标导学

一、学习目标

1. 知识与技能

通过对典型案例的讨论，了解独立性检验的常用方法，并会运用所学习的知识，对具体案例进行检验.

2. 过程与方法

先从实际问题之中发现问题，探求其解决方法，正确把握独立性检验的方法、技巧和相关量之间的关系，并在此基础上总结出解决一类问题的一般方法，形成规律，最后把所学习的知识应用到实践中去. 对有关的理论、公式不要死记硬背、生搬硬套，要合理建模、准确运用.

3. 情感、态度与价值观

从实例中发现问题，提高学习兴趣，激发学习积极性和主动性，不断自我完善，养成不断探求知识，完善自我的良好态度. 独立性的检验是相对的而不是绝对的，也需要发现和完善. 从知识应用的广泛性上认识事物的规律性和我们学习的必要性.

二、相关知识链接

本节是在学习课本《必修 3》中统计和概率的基础上学习的，与本节知识相链接的知识点有：(1)概率的定义；(2)相互对立事件的概念及概率公式；(3)概率的一般加法公式；(4)统计中用样本估计总体的特征. 学习本节前请同学们将有关知识做好回顾.

教材内容全解

一、知能点全解

知能点 1　相互独立的含义

一般地，对于两个事件 A，B，如果有 $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$，就称事件 A 与 B 相互独立，简称 A 与 B 独立.

(1)当事件 A 与 B 独立时，事件 $\overline{A}$ 与 B、A 与 $\overline{B}$、$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也独立.

(2)依据定义容易验证必然事件与不可能事件与任何事件是相互独立的. 因为必然事件与不可能事件的发生与否，是不受任何事件的影响的，也不影响其他事件是否发生.

(3)从直观上可以认为不论事件 A 发生还是不发生都对事件 B 发生的概率没有影响，即事件 A 与事件 B 没有关系，或者说 B 与 A 独立.

(4)尽管独立性的定义是用 $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$ 来刻画，但实际应用时往往并不是按此定义来验证 A、B 的独立性，而是从事件的实际意义判断是否相互独立.

例如两个工人分别在甲、乙两台车床上互不干扰地操作，则事件 $A=$ {甲车床出次品}与事件 $B=$ {乙车床出次品}是相互独立的. 又如从有限个总体中有放回地抽取两次，两次抽取的有关事件也是相互独立的. 在实际应用中，大多将公式作为已知判定其独立的两个事件满足的一项性质加以应用.

(5)定义的推广：$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$，则称事件 A_1、A_2、A_3、…、A_n 相互独立.

例 1 分别掷两枚硬币，设 $A=$ {硬币甲出现正面}，$B=$ {硬币乙出现正面}，验证事件 A、B 是相互独立的.

证明：样本空间为 $\Omega=$ {(正,正)，(正,反)，(反,正)，(反,反)}，共含有 4 个基本事件，由于它们是等可能的，概率为 $\frac{1}{4}$，而 $A=$ {(正,正)，(正,反)}，$B=$ {(正,正)，(反,正)}，$A\cap B=AB=$ {(正,正)}. 由此可知 $P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{1}{2}$，这时有 $P(AB)=\frac{1}{4}=P(A)P(B)$ 成立，所以 A、B 是相互独立的.

例 2 一个家庭中有若干个小孩，假设生男孩和生女孩是等可能的，设 $A=$ {一个家庭中有男孩，又有女孩}，$B=$ {一个家庭中最多有一个女孩}. 对下列两种情形，讨论事件 A 与 B 的独立性.

(1)家庭中有两个小孩；(2)家庭中有三个小孩.

解：(1)有两个小孩的家庭，对应于样本空间为 $\Omega=$ {(男,男)、(男,女)、(女,男)、(女,女)}，有四个基本事件，由等可能性可知，基本事件的概率为 $\frac{1}{4}$，这时 $A=$ {(男,女)、(女,男)}，$B=$ {(男,男)，(男,女)，(女,男)}，$AB=$ {(男,女)，(女,男)}，于是 $P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{3}{4}$，$P(AB)=\frac{1}{2}$. 由此可知 $P(AB)\neq P(A)P(B)$，所以事件 A、B 不相互独立.

(2)有三个小孩的家庭，样本空间为 $\Omega=$ {(男,男,男)，(男,男,女)，(男,女,男)，(女,男,男)，(男,女,女)，(女,男,女)，(女,女,男)，(女,女,女)}，由等可能性知，每个基本事件的概率均为 $\frac{1}{8}$，这时 A 中有 6 个基本事件，B 中有 4 个基本事件，AB 中含有 3 个基本事件，于是 $P(A)=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$，$P(B)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$. $P(A)\cdot P(B)=\frac{3}{8}$，即 $P(AB)=\frac{3}{8}=P(A)\cdot P(B)$ 成立，从而事件 A 与 B 是相互独立的.

知能点 2 卡方 χ^2

	B	$\overline{B}$	合计
A	n_{11}	n_{12}	n_{1+}
$\overline{A}$	n_{21}	n_{22}	n_{2+}
合计	n_{+1}	n_{+2}	n

表中 $n_{+1}=n_{11}+n_{21}$，$n_{+2}=n_{12}+n_{22}$，$n_{1+}=n_{11}+n_{12}$，$n_{2+}=n_{21}+n_{22}$.
$n=n_{11}+n_{12}+n_{21}+n_{22}$.

统计量 χ^2（卡方）的表达式为 $\chi^2=\frac{n(n_{11}n_{22}-n_{12}n_{21})^2}{n_{1+}n_{2+}n_{+1}n_{+2}}$. 用 χ^2 的大小可以决定是否拒绝原来的统计假设 H_0. 如果算出的 χ^2 的值较大就拒绝 H_0，也就是拒绝"事件 A 与 B 无关"，从而就认为它们是有关的. 经过对 χ^2 的统计量分布的研究，得到了两个临界值：3.841 与 6.635. 当根据具体数值计算出 $\chi^2>3.841$ 时，有 95%的把握说事件 A 与 B 有关；当 $\chi^2>6.635$ 时，有 99%的把握说事件 A 与 B 有关；当 $\chi^2\leqslant 3.841$ 时，认为事件 A 与事件 B 是无关的.

χ^2 的构造思路：当统计假设 H_0：$P(AB)=P(A)P(B)$ 成立时，$P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B)$，$P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})$，$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})$ 都成立.

根据概率的统计定义，上面的众多事件的概率都可用相应频率来估计，例如 $P(AB)$ 的估计为 $\frac{n_{11}}{n}$，$P(A)$ 的估计为 $\frac{n_{1+}}{n}$，$P(B)$ 的估计为 $\frac{n_{+1}}{n}$，于是 $\frac{n_{11}}{n}$ 与 $\frac{n_{1+}}{n}\cdot\frac{n_{+1}}{n}$ 应该很接近，$\frac{n_{12}}{n}$ 与 $\frac{n_{1+}}{n}\cdot\frac{n_{+2}}{n}$ 应该很接近，或者说 $\left(\frac{n_{11}}{n}-\frac{n_{1+}}{n}\cdot\frac{n_{+1}}{n}\right)^2$，$\left(\frac{n_{12}}{n}-\frac{n_{1+}}{n}\cdot\frac{n_{+2}}{2}\right)^2$，$\left(\frac{n_{21}}{n}-\frac{n_{2+}}{n}\cdot\frac{n_{+1}}{n}\right)^2$，$\left(\frac{n_{22}}{n}-\frac{n_{2+}}{n}\cdot\frac{n_{+2}}{n}\right)^2$ 应该比较小，从而

$$\frac{\left(\frac{n_{11}}{n}-\frac{n_{1+}}{n}\cdot\frac{n_{+1}}{n}\right)^2}{\frac{n_{1+}}{n}\cdot\frac{n_{+1}}{n}}+\frac{\left(\frac{n_{12}}{n}-\frac{n_{1+}}{n}\cdot\frac{n_{+2}}{n}\right)^2}{\frac{n_{1+}}{n}\cdot\frac{n_{+2}}{n}}+\frac{\left(\frac{n_{21}}{n}-\frac{n_{2+}}{n}\cdot\frac{n_{+1}}{n}\right)^2}{\frac{n_{2+}}{n}\cdot\frac{n_{+1}}{n}}+\frac{\left(\frac{n_{22}}{n}-\frac{n_{2+}}{n}\cdot\frac{n_{+2}}{n}\right)^2}{\frac{n_{2+}}{n}\cdot\frac{n_{+2}}{n}}$$

也应该比较小，上式可以化简为 $\chi^2=\frac{n(n_{11}n_{22}-n_{12}n_{21})^2}{n_{1+}n_{2+}n_{+1}n_{+2}}$. 这就是卡方 χ^2 的表达式.

知能点 3 独立性检验

进行独立性检验首先由卡方公式计算出统计量 $\chi^2=\frac{n(n_{11}n_{22}-n_{12}n_{21})^2}{n_{1+}n_{2+}n_{+1}n_{+2}}$，用它的大小决定是否拒绝原来的统计假设，如果 $\chi^2>3.841$，有 95%的把握说事件 A 与 B 有关，当 $\chi^2>6.635$ 时，有 99%的把握说事件 A 与 B 有关，当 $\chi^2\leqslant 3.841$ 时，认为事件 A 与 B 是无关的.

例 3 为了探究患慢性气管炎是否与吸烟无关，调查了 339 名 50 岁以上的人，调查结果如下表所示. 试问：50 岁以上的人患慢性气管炎与吸烟习惯有关吗？

	患慢性气管炎	未患慢性气管炎	合计
吸烟	43	162	205
不吸烟	13	121	134
合计	56	283	339

分析:该图表称为 2×2 列联表,意思是问题考虑 50 岁以上的人的两种状态:吸烟,不吸烟;每种状态又分两种情况:患慢性气管炎,未患慢性气管炎.表中 $n_{\cdot 1}=n_{11}+n_{21}$,$n_{\cdot 2}=n_{12}+n_{22}$,$n_{1\cdot}=n_{11}+n_{12}$,$n_{2\cdot}=n_{21}+n_{22}$,$n=n_{11}+n_{12}+n_{21}+n_{22}$.利用 $\chi^2=\frac{n(n_{11}n_{22}-n_{12}n_{21})^2}{n_{1+}n_{2+}n_{+1}n_{+2}}$,若 $\chi^2>3.841$,则有 95%的把握说患慢性气管炎与吸烟有关.若 $\chi^2>6.635$,则有 99%的把握说患慢性气管炎与吸烟有关.若 $\chi^2\leqslant3.841$,则说患慢性气管炎与吸烟无关.

解:由于 $n_{\cdot1}=56$,$n_{\cdot2}=283$,$n_{1\cdot}=205$,$n_{2\cdot}=134$,$n=339$.

$\chi^2=\frac{n(n_{11}n_{22}-n_{12}n_{21})^2}{n_{1+}n_{2+}n_{+1}n_{+2}}=\frac{339(43\times121-162\times13)^2}{205\times134\times56\times283}\approx7.469.$

因为 7.469>6.635,所以我们有 99%的把握说 50 岁以上的人患慢性气管炎与吸烟有关.

二、教材题目研究

课本 P8 例 6

打鼾不仅影响别人休息,而且可能与患某种疾病有关,下表是一次调查所得的数据,试问:每一晚都打鼾与患心脏病有关吗?

	患心脏病	未患心脏病	合计
每一晚都打鼾	30	224	254
不打鼾	24	1 355	1 379
合计	54	1 579	1 633

思路分析:在这个 2×2 列联表中,被调查的人有两种状态:每一晚都打鼾,不打鼾.每种状态又有两种情况:患心脏病,未患心脏病.这是一个 2×2 列联表的独立性检验问题,只需求出卡方(χ^2),用它的大小可以决定是否拒绝原来的统计假设.如果 $\chi^2>3.841$,就有 95%的把握说每一晚都打鼾与患心脏病有关.若 $\chi^2>6.635$,就有 99%的把握说每一晚都打鼾与患心脏病有关.若 $\chi^2\leqslant3.841$ 时,就认为每一晚都打鼾与患心脏病无关.

解:由题意知 $n_{11}=30$,$n_{12}=224$,$n_{21}=24$,$n_{22}=1\,355$,$n_{\cdot1}=54$,$n_{\cdot2}=1\,579$,$n_{1\cdot}=254$,$n_{2\cdot}=1\,379$,$n=1\,633$.

$\chi^2=\frac{n(n_{11}n_{22}-n_{12}n_{21})^2}{n_{1+}n_{2+}n_{+1}n_{+2}}=\frac{1\,633\times(30\times1\,355-224\times24)^2}{254\times1\,379\times54\times1\,579}\approx68.033$.因为68.033>6.635,所以有 99%的把握说,每一晚都打鼾与患心脏病有关.

拓展与发散:这里所说的“每一晚都打鼾与患心脏病有关”等问题,是统计上的关系,不要误以为这里面有因果关系,具体到每一个人每一晚都打鼾,并不能说他一定患有心脏病,患有心脏病,也未必每一晚都打鼾.其实从所给的表中,我们也可以看出,每一晚都打鼾的人群中,患有心脏病的概率也只有$\frac{30}{254}$,稍微超过十分之一.至于每一晚都打鼾的人患不患心脏病,应该由医学检查来确定,单纯的统计学知识是不能确定的.

典型例题精析

题型一　相互独立的检验

例1　从一副52张的扑克牌(不含大小王)中,任意抽一张出来,设事件A:“抽到黑桃”,B“抽到皇后Q”,试用$P(AB)=P(A)P(B)$验证事件A与B及$\overline{A}$与$\overline{B}$是否独立?

分析:独立性的检验应利用相互独立的定义,对于事件A和事件B,若$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$,则事件A与B相互独立.先求出基本事件空间Ω中的基本事件总数,求出AB中的基本事件数和A与B的基本事件数,从而检验相互独立与否.

解:从52张扑克牌中任取一张的基本事件空间Ω中的基本事件总数为52,事件A“抽到黑桃”的基本事件数为13.$\therefore P(A)=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$.事件$B$“抽到皇后$Q$”的基本事件数为4,$\therefore P(B)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$.事件$AB$为{黑桃$Q$},则$P(AB)=\frac{1}{52}$,$\therefore P(AB)=P(A)P(B)$,即有$\frac{1}{52}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{13}$.$\therefore P(AB)=P(A)P(B)$,因此$A$与$B$相互独立.$P(\overline{A})=\frac{3}{4}$,$P(\overline{B})=\frac{48}{52}=\frac{12}{13}$,$P(\overline{A}\,\overline{B})=\frac{36}{52}=\frac{9}{13}$,$P(\overline{A})P(\overline{B})=\frac{3}{4}\times\frac{12}{13}=\frac{9}{13}$,因此$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})$.因此,$\overline{A}$与$\overline{B}$相互独立.

> 事件A与B相互独立的检验,应充分利用相互独立的性质,验证$P(AB)$与$P(A)P(B)$是否相等,若相等则相互独立;若不相等,则不相互独立.解决这一类问题,关键在于准确求出基本事件空间中的基本事件总数,确定事件A与B的概率,另一个关键点是正确理解题意,分析出AB中的基本事件数,求出$P(AB)$即事件A与B同时发生的基本事件数及其概率.如果求不准确,就会出错.

变式引申:一副扑克牌52张(不含大小王),从中任意抽出来一张,设事件A“抽到红色”,B“抽到皇后Q”,请利用所学的知识验证事件A与B及$\overline{A}$与B,A与$\overline{B}$,$\overline{A}$与$\overline{B}$是否相互独立?

解:从52张扑克牌中任意抽出一张牌来的基本事件空间Ω中的基本事件总数为52,事件A“抽到红色牌”的基本事件数为$13\times2=26$,$\therefore P(A)=\frac{26}{52}=\frac{1}{2}$.事件$B$“抽到皇后$Q$”的基本事件数为4,$\therefore P(B)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$.事件$AB$:“抽到红色皇后$Q$”的

基本事件数为2，∴ $P(AB)=\frac{2}{52}=\frac{1}{26}$. ∵ $P(A)P(B)=\frac{1}{13}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{26}=P(AB)$.

∴ $P(AB)=P(A)P(B)$，因此，事件 A 与 B 相互独立.

事件 $\overline{A}$："抽到黑色牌"的基本事件数为26. ∴ $P(\overline{A})=\frac{26}{52}=\frac{1}{2}$. 又知 $P(B)=\frac{1}{13}$，事件 $\overline{A}B$"抽到黑色皇后Q"的基本事件数为2，∴ $P(\overline{A}B)=\frac{2}{52}=\frac{1}{26}$，因此，$P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B)$，从而事件 $\overline{A}$ 与 B 相互独立.

事件 $\overline{B}$："抽到的牌不是皇后Q"的基本事件数为48，所以 $P(\overline{B})=\frac{48}{52}=\frac{12}{13}$，$P(A)=\frac{1}{2}$，事件 $A\overline{B}$："抽到红色牌但不是皇后Q"的基本事件数为24，∴ $P(A\overline{B})=\frac{24}{52}=\frac{6}{13}$. ∴ $P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})$. 因此 A 与 $\overline{B}$ 相互独立.

事件 $\overline{A}$"抽到黑色牌"的基本事件数为26，$P(A)=\frac{26}{52}=\frac{1}{2}$，事件 $\overline{B}$"抽到的牌不是皇后Q"的基本事件数为48，$P(\overline{B})=\frac{48}{52}=\frac{12}{13}$. 事件 $\overline{A}\,\overline{B}$："抽到不是皇后的黑色牌"的基本事件数为24，故 $P(\overline{A}\,\overline{B})=\frac{24}{52}=\frac{6}{13}$. 又知 $P(\overline{A})P(\overline{B})=\frac{12}{13}\times\frac{1}{2}=\frac{6}{13}=P(\overline{A}\,\overline{B})$，即 $P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})$. 因此事件 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相互独立.

题型二　相关与无关的判定

例2　对196个接受心脏搭桥手术的病人和196个接受血管清障手术的病人进行了3年的跟踪研究，调查他们是否又发作过心脏病，调查结果如下表所示：

	又发作过心脏病	未发作心脏病	合计
心脏搭桥手术	39	157	196
血管清障手术	29	167	196
合计	68	324	392

试根据上述数据比较这两种手术对病人又发作心脏病的影响有没有差别.

分析：从表中可知病人有两种类型：做过心脏搭桥手术和做过血管清障手术. 每种类型又有两种情况：又发作过心脏病，未发作心脏病. 问题是用表中所给出的4个数据来检验上述两种状态是否有关，这是一个独立性检验问题，处理方法为先用卡方公式 $\chi^2=\frac{n(n_{11}n_{22}-n_{12}n_{21})^2}{n_{1+}n_{2+}n_{+1}n_{+2}}$，求出卡方用它的大小来决定是否拒绝发作心脏病与两种手术有关的假设.

如果算出的 χ^2 值较大，就拒绝这个假设，也就是拒绝又发作心脏病与两种手术无关，从而就认为它们是有关的. 通常用两种值来区别，当 $\chi^2>3.841$ 时，我们就有95%的把握说它们是有关的，当 $\chi^2>6.635$ 时，我们就有99%的把握说它们是有关

的，反之，当 $\chi^2\leqslant 3.841$ 时，我们认为又发作心脏病与这两种手术是无关的.

解：由表中可知，$n_{11}=39$，$n_{12}=157$，$n_{21}=29$，$n_{22}=167$，$n_{+1}=68$，$n_{+2}=324$，$n_{1+}=196$，$n_{2+}=196$，$n=392$，将其代入卡方公式 $\chi^2=\frac{n(n_{11}n_{22}-n_{12}n_{21})^2}{n_{1+}n_{2+}n_{+1}n_{+2}}$ 得 $\chi^2=\frac{392\times(39\times167-157\times29)^2}{196\times196\times68\times324}\approx1.78$.

因为 $1.78<3.841$，所以我们没有理由说"心脏搭桥手术"、"血管清障手术"与"又发作心脏病"有关，可以认为病人又发作心脏病与是否作过何种手术无关.

点评

本题为利用卡方公式 $\chi^2=\frac{n(n_{11}n_{22}-n_{12}n_{21})^2}{n_{1+}n_{2+}n_{+1}n_{+2}}$ 求出 χ^2 的值再判断 χ^2 与3.841，6.635 的大小关系来确定是否有关. 解题时应注意准确代数与计算，不可错用公式，并保证计算的准确率.

变式引申：1. 在一次恶劣气候的飞机航程中，调查男女乘客在飞机上晕机的情况如下表所示，请你根据所给的资料判定是否在恶劣气候飞行中男人比女人更容易晕机？

	晕机	不晕机	合计
男人	24	31	55
女人	8	26	34
合计	32	57	89

解：这是一个 2×2 列联表的独立性检验问题，从表中可知 $n_{11}=24$，$n_{12}=31$，$n_{21}=8$，$n_{22}=26$，$n_{+1}=32$，$n_{+2}=57$，$n_{1+}=55$，$n_{2+}=34$，$n=89$，代入公式 $\chi^2=\frac{n(n_{11}n_{22}-n_{12}n_{21})^2}{n_{1+}n_{2+}n_{+1}n_{+2}}$ 得 $\chi^2=\frac{89\times(24\times26-31\times8)^2}{55\times34\times32\times57}\approx3.689$.

因为 $3.689<3.841$，所以我们没有理由说晕机与是否跟男女性别有关，尽管在这次航班中男人晕机的比例 $\frac{24}{55}$ 比女人晕机的比例 $\frac{8}{34}$ 高，但我们不能据此认为在恶劣气候下飞行，男人比女人更容易晕机.

2. 在研究某种新措施对猪白痢的防治效果时，得到如下数据.

	存活数	死亡数	合计
对照	114	36	150
新措施	132	18	150
合计	246	54	300

试问新措施对防治猪白痢是否有效？

解：在这个 2×2 列联表中，$n_{11}=114$，$n_{12}=36$，$n_{21}=132$，$n_{22}=18$，$n_{+1}=246$，$n_{+2}=54$，$n_{1+}=150$，$n_{2+}=150$，$n=300$. 代入公式得 $\chi^2=\frac{n(n_{11}n_{22}-n_{12}n_{21})^2}{n_{1+}n_{2+}n_{+1}n_{+2}}$，$\chi^2=\frac{300(114\times18-36\times132)^2}{150\times150\times246\times54}\approx7.317$. 因为 $7.317>6.635$，所以我们有 99% 的把握认为

新措施对防治猪白痢是有效的.

题型三 创新应用

例3 如图1-1-1所示,分别用 $2n$ 个完全相同的电子元件组成一个系统,有两种不同的联络方式,第Ⅰ种是先串联后并联如图(1)所示,第Ⅱ种是先并联后串联如图(2)所示.

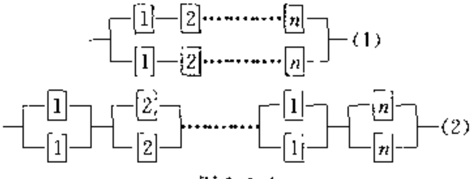

图1-1-1

如果各个电子元件能否正常工作是相互独立的,每个元件能正常工作的概率为 r(元件或系统能正常工作的概率通常称为可靠度),请你运用所学的知识比较一下两个系统之中哪一个系统更可靠一些(即可靠度大一些)?

分析:由于每一个电子元件能否正常工作是相互独立的,系统Ⅰ中两条通路也是相互独立的,系统Ⅱ中两个电子元件所组成的小串联节也是相互独立的,故可用相对独立的定义式 $P(AB)=P(A)P(B)$ 求各个系统的概率,系统中概率大的更可靠.

解:对于系统Ⅰ,它有两条通路工作,分别记这两条通路的可靠度为 $R_{Ⅰ-1}$ 和 $R_{Ⅰ-2}$,每条通路能正常工作当且仅当该通路上的每一个电子元件都能正常工作,由独立性可知每一条通路的可靠度为 $R_{Ⅰ-1}=R_{Ⅰ-2}=r^n$. 由前面所学习的知识可知,系统Ⅰ的可靠度为 $R_Ⅰ=1-(1-R_{Ⅰ-1})(1-R_{Ⅰ-2})=1-(1-r^n)^2=r^n(2-r^n)$.

对于系统Ⅱ,先求每一个并联的小节的可靠度,由独立性可知,每一个小节的可靠度为 $R=1-(1-r)(1-r)=r(2-r)$,而整个系统Ⅱ的可靠度为 $R_Ⅱ=R^n=[r(2-r)]^n=r^n(2-r)^n$.我们可以证明当 $n\geqslant2$ 时,总有 $(2-r)^n>2-r^n$ 成立,从而当 $n\geqslant2$ 时,有 $R_Ⅱ>R_Ⅰ$,即系统Ⅱ比系统Ⅰ更加可靠.

本题是相互独立性问题的一个具体应用.这是一个颇有启发性的例子.用相同的元件组成一个系统,完成相同的功能,只是由于设计的联络方式不同,得到的可靠度就不同,从而告诫我们,事先应精心设计提高产品(或工程)的可靠度,这是可靠性工程学中的一个重要课题.

新课标问题研讨

一、自主学习

例1 把一颗质地均匀的骰子任意地掷一次,设事件 A="掷出偶数点",B="掷出3的倍数点",求出事件 $A,B,\overline{A},\overline{B}$ 的概率以及 $A\cap B,A\cap\overline{B},\overline{A}\cap B,\overline{A}\cap\overline{B}$ 的概率,并根据求出的结果判断 $P(A\cap B)$ 与 $P(A)\cdot P(B)$,$P(\overline{A}\cap B)$ 与 $P(B)\cdot P(\overline{A})$、$P(A\cap\overline{B})$ 与 $P(A)\cdot P(\overline{B})$,$P(\overline{A}\cap\overline{B})$ 与 $P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})$ 的关系.

解:$P(A)=\frac{1}{2}$,$P(B)=\frac{1}{3}$,$P(\overline{A})=\frac{1}{2}$,$P(\overline{B})=\frac{2}{3}$,$P(A\cap B)=\frac{1}{6}$,$P(A\cap\overline{B})=$

$\frac{1}{3}$，$P(\overline{A}\cap B)=\frac{1}{6}$，$P(\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{1}{3}$.

故 $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$，$P(\overline{A}\cap B)=P(B)\cdot P(\overline{A})$、$P(A\cap\overline{B})=P(A)\cdot P(\overline{B})$，$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})$.

二、合作学习

例 2 若事件 A、B 满足 $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$，试判断 $P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\cdot P(B)$，$P(A\cap\overline{B})=P(A)\cdot P(\overline{B})$，$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})$ 中哪些独立？以掷骰子出现的偶数点为事件 A，以出现 3 的倍数点为事件 B 来验证之.

解：参考例 1，详解略.

高考要点阐释

1. 考点点击

本节因为是新课标中所新加内容，故近几年的高考中较少涉及，只在相互独立事件中有所考查，且出现的题型有解答题、选择题、填空题三种类型，并且在历年的高考中均有题目出现. 预计在今后的高考中会出现相互独立事件的检验，及通过求卡方判断相关关系类的题目，请广大同学注意.

2. 典例剖析

例 1 （2005 年浙江高考）袋子 A 和 B 中装有若干个均匀的红球和白球. 从 A 中摸出一个红球的概率为 $\frac{1}{3}$，从 B 中摸出一个红球的概率为 p.

(1) 从 A 中有放回地摸球，每次摸出一个，共摸出 5 次，求：①恰好有 3 次摸到红球的概率；②第一次，第三次，第五次均摸到红球的概率.

(2) 若 A、B 两个袋子中的球数之比为 $1:2$，将 A，B 中的球装在一起后，从中摸出一个红球的概率为 $\frac{2}{5}$，求 p 的值.

分析：认真分析题目的条件，正确运用相互独立事件的概率的求解公式和组合数公式进行求解. 分析出问题中相互独立事件同时发生，进行求解.

解：(1) ① $C_5^3\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=10\times\frac{1}{27}\times\frac{4}{9}=\frac{40}{243}$；② $\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$.

(2) 设袋子 A 中有 m 个球，则袋子 B 中有 $2m$ 个球，由 $\frac{\frac{1}{3}m+2mp}{3m}=\frac{2}{5}$，解之得 $p=\frac{13}{30}$.

新课标理念提示：(1) 会用公式 $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$ 求解相互独立事件的概率. 通过具体问题认识在实际问题中相互独立的概率的求法.

(2) 本题主要考查排列组合的计算，相互独立事件同时发生的概率等基础知识，及准确把握题意，进行合理的逻辑推理的能力.

例 2 （2005 年辽宁省高考）某工厂生产甲、乙两种产品，每种产品都是经过第一和第二工序加工而成，两道工序的加工结果相互独立，每道工序的加工结果均有 A、