

小垂度柔綫計算理論

〔苏联〕B. K. 卡楚林著

科学技術出版社

小垂度柔綫計算理論

[苏联] B. K. 卡楚林著

楊 福 新 譯

科 学 技 術 出 版 社

內 容 提 要

本書从基本理論出发,研究在均布、集中、温度、风力、摩阻力、縱向力以及任意方向集中力等作用下,單跨柔綫、不同类型的彈性支座柔綫以及在一个跨度中拉断时多跨柔綫的張力和垂度計算;同时,亦研究与各种工程如輸电綫路、起重機纜索、架空索道及纜索桥等有关的柔綫計算問題,叙述柔綫剛性、彈性变形以及温度变化等对解答的修正,最后討論到鏈条和柔綫的組合体系,傾斜及垂直悬挂以及空間节点等問題。書中除一般理論、公式外,尚有大量实际計算例題,供柔綫計算时参考。

小垂度柔綫計算理論

ГИБКИЕ НИТИ С МАЛЫМИ СТРЕЛКАМИ

原 著 者 (苏联) В. К. Кагурин

原出版者 Государственное Издательство

Технико-Теоретической Литературы

譯 者 楊 福 新

*

科学技術出版社出版

(上海南京西路2004号)

上海市書刊出版業營業許可証出 079 号

大众文化印刷厂印刷 新华書店上海發行所总經售

*

統一書号:15119·810

开本 850×1168 • 1/32 印張 6 3/16 • 字數 150,000

1958年8月第1版

1958年8月第1次印刷•印數 1-2,000

定价 (10) 1.10 元

緒 言

柔綫是工程上最常用的構件。屬於柔綫的構件是：電話和電報綫路的電綫，電氣鐵路和電車的接觸綫，無線電天綫，懸鏈橋的鏈條，纜索起重機和索道的鋼索，以及船隻鐵錨的鏈條等等。很難指出這樣的工程部門：即它不或多或少地需用柔綫。

此外應該指出，柔綫的計算理論並沒有得到充分發展，而且這方面的某些應用問題一般地還沒有解決。例如：沒有透徹地研究受任意空間載荷作用的柔綫的計算問題；很少研究多跨柔綫，特別是在彈性支座上的多跨柔綫的計算問題；沒有解決由柔綫和剛性盤體組成的混合體系的計算問題；很少研究由柔綫組成的空間節點的計算。其實，這些問題都是具有重要意義的。關於柔綫受空間載荷的問題，是在設計傾斜懸挂的電氣鐵路的接觸綫，以及設計有電動拖船通航的運河上的接觸綫等等時遇到的。在本書中專門研究了上述這些問題。

柔綫是一種變化體系。因此隨着關於柔綫張力大小問題的提出，同時發生了柔綫受載荷作用時的形狀和尺寸問題。這樣就使柔綫的計算理論大大地複雜化。首先，柔綫本身的強度計算問題就與在不變體系情形中提出的強度計算問題有所區別。無重量的柔綫不可能有一定的形狀。只有當它受載荷作用時才產生這樣或那樣的形狀。因此首先提出的是關於柔綫的初始形狀問題（即柔綫受初始載荷作用時的形狀）。然後，當載荷變化時又產生關於柔綫的形狀及尺寸變化的問題。

屬於變化體系的柔綫不遵守力作用獨立的原理，並且在載荷

和變形之間不存在直綫比例。求得的計算公式常常是很複雜的。因此，許多問題的最後結果都不能以字母來表示。另一方面，作者認為在研究的所有情形中完全有必要敘述全部的計算步驟。這樣就不得不在書中列舉了許多計算例題。

在本書中只考查小垂度柔綫。但是在第三章中介紹了大垂度柔綫的某些解，這樣做主要是為了擴展所作的分析。問題是在於大垂度柔綫的張力一般很小，因此從強度觀點來說張力的大小並無意義。在此情形下，大垂度柔綫的計算寧屬於理論力學上的問題。實則，作者在本書中給自己提出的任務是從強度觀點來計算柔綫（在所有大小城市上方交織着的各種電綫都屬於小垂度柔綫的範疇。在城外亦大量地使用了這種柔綫）。

作者在本書中並沒有提出要為某一個部門（例如輸電綫或索道等等）提供柔綫計算指南的目的。本書的內容在於一般地敘述柔綫的計算理論，同時考查了不同部門的一系列實際例題。然而，只應該將這些例題視為引用理論結論的算例，而不能作為某一獨特工程部門研究出來的柔綫計算方法。作者希望在本書中所研究的理論，能有助於不同技術部門的柔綫計算工作。

目 录

緒言	1
第一章 單跨柔綫	1
§ 1 柔綫的基本計算公式	1
§ 2 均布載荷的作用	6
§ 3 受任意布置的垂直載荷作用的柔綫的一般計算步驟	13
§ 4 集中力的作用	17
§ 5 柔綫跨度的变化和溫度变化	20
§ 6 把柔綫当作拉杆	24
§ 7 求积分 $\int_0^l Q^2 dx$ 的方法	30
§ 8 結論的应用	36
§ 9 按作用方向垂直于柔綫初始垂度平面的載荷計算柔綫的一般步驟	44
§ 10 风力的作用	48
§ 11 集中荷重	49
§ 12 荷重沿柔綫运动的阻力	52
§ 13 縱向力的作用	57
§ 14 任意方向的集中力	62
第二章 多跨柔綫	67
§ 15 支座类型、張力的平衡、溫度影响	67
§ 16 具有可动中間支座的柔綫	75
§ 17 柔綫在中間支座上的傾斜度	90
§ 18 跨度相同的彈性支座柔綫	92
§ 19 跨度不同的彈性支座柔綫	99
§ 20 彈性支座柔綫在一个跨度中拉漸	103
第三章 某些解答的修正	109

§ 21	不可伸張柔綫的精確計算	109
§ 22	彈性變形和溫度变化的影响	118
§ 23	柔綫剛性的影响	121
第四章	組合体系	130
§ 24	鏈条、鏈条和柔綫的組合	130
§ 25	用吊杆連接的柔綫	148
§ 26	“傾斜”悬挂	161
§ 27	垂直悬挂和傾斜悬挂的近似計算法	168
§ 28	空間节点	176
附录	柔綫計算問題发展簡况	188
	参考文献	190

第一章 單跨柔綫

§ 1. 柔綫的基本計算公式

a) 支座位於同一水平上

設有一根受任意垂直載荷作用的、支座位於同一水平上的柔綫(圖 1a)。圖 1b 是繪有支座反力的同樣的一根柔綫。

為了解決關於在柔綫中產生的力的問題，必須首先確定支座反力。這些反力可根據下列靜力條件來確定：

$$\sum x = -H_A + H_B = 0, \quad (1)$$

$$\sum M_B = Al - \sum M_{PB} = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_A = -Bl + \sum M_{PA} = 0. \quad (3)$$

在這些公式中， $\sum M_{PB}$ 和 $\sum M_{PA}$ 是作用在柔綫上的外力對於支座 B 和 A 的力矩。

由(1)式得

$$H_A = H_B = H, \quad (4)$$

由(2)及(3)式相應得

$$A = \frac{\sum M_{PB}}{l}, \quad (5)$$

$$B = \frac{\sum M_{PA}}{l}. \quad (6)$$

我們看出，支座反力垂直分力的式子，與載荷情況和柔綫載荷情況(圖 1a 和 1b)相類似的簡支梁支座反力的式子毫無區別，亦即

$$A = A_0, \quad (7)$$

$$B = B_0. \quad (8)$$

現在來研究距左支座 x 的柔綫某一截面 C。此截面的縱坐標

等于 y (图 1a 和 1b)。由于假定柔綫是绝对柔性的, 因此可証出上述截面内的弯矩等于零, 亦即

$$Ax + M_{Ax} + H_A y = 0. \quad (9)$$

式中 M_{Ax} ——作用在柔綫左部分上的所有力(支座反力除外)对截面 C 的力矩的总和; 而 $Ax + M_{Ax}$ 就是简支梁相应截面的弯矩 M_0 (图 1c 和 1d)。由此公式 (9) 可改写为

$$M_0 - H_A y = 0, \quad (9a)$$

注意到公式 (4), 得

$$y = \frac{M_0}{H}. \quad (10)$$

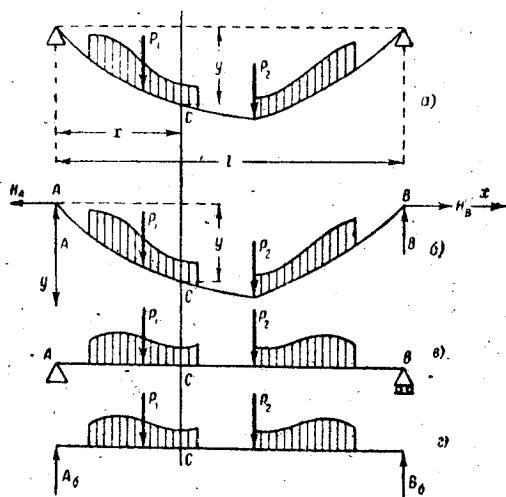


图 1

确定导数 $\frac{dy}{dx}$ 时, 必须注意数量 H 是与 x 无关的不变值。根

据弯曲理论中的熟知公式 $\frac{dM_0}{dx} = Q_0$, 可得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q_0}{H}. \quad (11)$$

式中 Q_0 ——跨度和载荷情况与柔线相同的简支梁内的剪力。

在以后，我们写 M_0 和 Q_0 时不再附加指号。因此

$$y = \frac{M}{H}, \quad (12)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{H}. \quad (13)$$

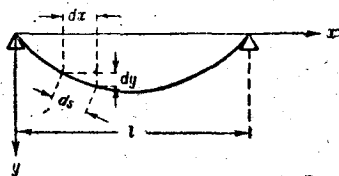


图 2

在柔线计算中必须确定其长度。柔线长度可由曲线的长度来确定(图 2)

$$L = \int_0^l ds = \int_0^l \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

因为在本书中只研究小垂度柔线，数量 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ 与 1 相比较是很小的；因此按照近似计算规则可写出

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \approx 1 + \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{2}.$$

由此

$$L \approx \int_0^l \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right] dx.$$

注意到公式(13)，得

$$L = \int_0^l \left[1 + \frac{1}{2} \frac{Q^2}{H^2} \right] dx$$

或，因 $\int_0^l dx = l$ ，而 H 是常数，所以得到

$$L = l + \frac{1}{2H^2} \int_0^l Q^2 dx. \quad (14)$$

6) 支座位于不同水平上

图 3a 是受任意垂直力作用的柔线 AB 。图 3b 是受任意垂直

力并包括支座反力 R_A 及 R_B 作用的同一根柔綫。这些反力均可分解成两个分力

A_1 和 H'_A , B_1 和 H'_B ;

力 H'_A 和 H'_B 作用于支座 A 和 B 点的連綫方向。

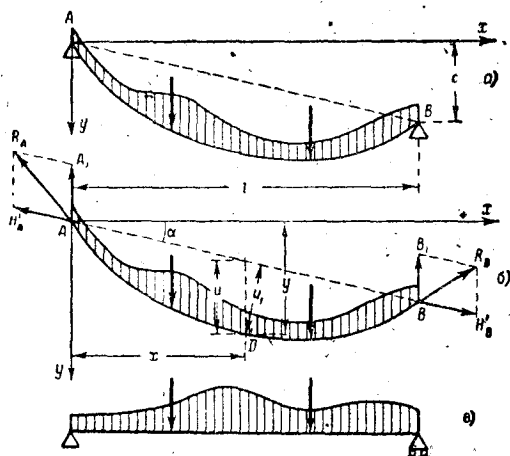


图 3

將作用在柔綫上的所有力投影到水平軸上,得

$$H'_A = H'_B = H'. \quad (15)$$

利用所有力对于支座 A 和 B 的力矩方程式,得

$$-B_1 l + \sum M_{PA} = 0,$$

$$A_1 l - \sum M_{PB} = 0,$$

由此

$$A_1 = \frac{\sum M_{PB}}{l} = A_0,$$

$$B_1 = \frac{\sum M_{PA}}{l} = B_0.$$

因此,求分力 A_1 和 B_1 的方法,和前面求載荷情况与柔綫相同的簡支梁(图 3c)反力的方法是相类似的。

現在我們以作用在柔綫左部的所有力对 D 点的力矩总和等

于零的式子作为先决条件

$$A_1 x + M_{Ax} - H'_A u_1 = 0,$$

由此

$$u_1 = \frac{A_1 x + M_{Ax}}{H'_A}.$$

因为此处 $A_1 x + M_{Ax}$ 就是簡支梁相应截面內的力矩 M , 因此得

$$u_1 = \frac{M}{H'_A}. \quad (16)$$

数量 u_1 沿直綫 AB 的垂直綫方向計算。它可以用縱坐标 u 表示

$$u_1 = u \cos \alpha, \quad (17)$$

式中 α 是直綫 AB 对水平軸的傾角。將公式(16)和(17)加以比較, 可写出

$$u = \frac{M}{H'_A \cos \alpha}.$$

但由图 36 看出, $H'_A \cos \alpha$ 就是支座反力 R_A (或 R_B)^① 的水平分力。

如果我們仍以 H 表示此水平分力, 則得

$$u = \frac{M}{H}. \quad (18)$$

这时自水平軸算起的柔綫的縱坐标为 (图 3a 和 36)

$$y = u + x \operatorname{tg} \alpha = u + C \frac{x}{l} = \frac{M}{H} + C \frac{x}{l}, \quad (19a)$$

而自直綫 AB 算起的縱坐标为

$$y_1 = \frac{M}{H}. \quad (19b)$$

由此得到

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{H} + \frac{C}{l}, \quad (20)$$

而柔綫的長度將等于

① 譯者注: 原書为 A (或 B)。

$$L = \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

假定, 数量 C 与 跨度相較是不大的, 則数量 $\frac{dy}{dx}$ 較之 1 也是小的。由此, 同前

$$\begin{aligned} L &= \int_0^l \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right] dx = l + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{Q}{H} + \frac{C}{l}\right)^2 dx \\ &= l + \frac{1}{2H^2} \int_0^l Q^2 dx + \frac{C}{Hl} \int_0^l Q dx + \frac{C^2}{2l^2} \int_0^l dx, \end{aligned}$$

注意到 $\frac{C}{l} = \operatorname{tg} \alpha$, 得

$$L = l + \frac{1}{2H^2} \int_0^l Q^2 dx + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{H} \int_0^l Q dx + \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{2} l.$$

积分 $\int_0^l Q dx$ 就是簡支梁剪力图的面积。大家知道, 在任何垂力作用下此面积均等于零。由此得

$$L = l + \frac{1}{2H^2} \int_0^l Q^2 dx + \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{2} l, \quad (21)$$

当 α 角較小时 (約在 $15 \sim 20^\circ$ 以內), 利用此公式能得到可靠的結果。如果 α 角較大, 則柔綫長度的解答的誤差就很大。下面將介紹大傾度的柔綫的解答:

§ 2. 均布載荷的作用

a) 支座位於同一水平上

計算柔綫時可能遇到兩種均布載荷: 沿柔綫全長均勻分布的載荷和沿柔綫水平投影綫均勻分布的載荷。第一種分布情形在各種輸電綫中遇到, 第二種一般在計算橋梁中遇到。由於在本書中僅研究小垂度柔綫, 因此認為載荷沿柔綫水平投影綫均勻分布在

所有情形下都是足够精确的。

設有一根支座位於同一水平上的柔綫(圖4)，它的跨度為 l ，垂度為 f ，單位水平投影長度上的載荷為 q 。求柔綫各不同截面的內力、柔綫的外形及長度。根據(12)式，對於跨度中心可寫出

$$M = \frac{ql^2}{8},$$

$$y_{l/2} = f = \frac{M}{H} = \frac{ql^2}{8H},$$

由此

$$H = \frac{ql^2}{8f}. \quad (22)$$

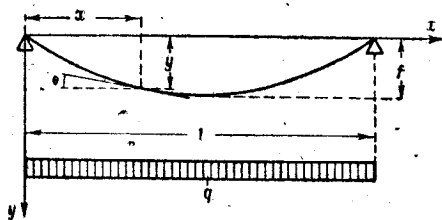


圖 4

力矩方程式可寫為

$$M = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2},$$

因此公式(12)即具有下列形式：

$$y = \frac{4fx(l-x)}{l^2}. \quad (23)$$

現在即可寫出

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \theta = \frac{4f}{l} - \frac{8fx}{l^2}. \quad (24)$$

显而易见，柔綫任意截面的內力^①沿水平軸的分力即等於柔綫張力 H (圖5)。亦即

① 讀者注意，在本書中柔綫“內力”一詞即為柔綫的張力，柔綫的“張力”即為柔綫的水平張力——譯者

$$S = \frac{H}{\cos \theta} = \frac{ql^2}{8f \cos \theta} \quad (25)$$

將式(24)的 $\operatorname{tg} \theta$ 值代入公式 $\frac{1}{\cos \theta} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}$, 得到

$$\frac{1}{\cos \theta} = \sqrt{1 + \frac{16f^2}{l^2} \left[1 - 2 \frac{x}{l} \right]^2} \quad (26)$$

由此將上式代入(25)式, 即得

$$S = \frac{ql^2}{8f} \sqrt{1 + \frac{16f^2}{l^2} \left[1 - 2 \frac{x}{l} \right]^2} \quad (27)$$

显然, 最大内力产生在 $x=0$ 和 $x=l$ 处。在这两种情形下得到

$$S_{\max} = \frac{ql^2}{8f} \sqrt{1 + 16 \frac{f^2}{l^2}} = H \sqrt{1 + 16 \frac{f^2}{l^2}}$$

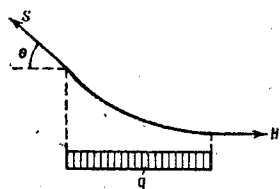


图 5

應該指出, 在小垂度柔綫中最大內力和水平張力 H 的差別是很小的。实际上, 即使当垂度的大小等于 $f=0.1l$ 时(此垂度值已可認為是較大的), 最大內力不过为

$$S_{\max} = H \sqrt{1 + 16 \times 0.1^2} = 1.078H,$$

亦即最大內力与張力只相差 7.8%。如果 $f = \frac{l}{20}$, 差值为 2%; 而当 $f = \frac{l}{40}$, 則差值仅为 0.5%。由此, 在計算小垂度柔綫时常可認為最大內力与水平張力是相等的

$$S_{\max} \approx H. \quad (28)$$

柔綫的長度可根据公式(14)确定。对于受均布載荷的对称柔綫

$$Q = \frac{ql}{2} - qx.$$

因此

$$\int_0^l Q^2 dx = q^2 \int_0^l \left(\frac{l}{2} - x\right)^2 dx = \frac{q^2 l^3}{12}, \quad (29)$$

若注意到(22)式,則按公式(14)得

$$L = l + \frac{1}{2 \left(\frac{ql^2}{8f}\right)^2} \frac{q^2 l^3}{12} = l + \frac{8}{3} \frac{f^2}{l}. \quad (30)$$

公式(30)可直接用于实际計算,并对以后的柔綫理論敘述是极其有用的。

必須指出,在小垂度柔綫中柔綫的長度 L 和跨度的差別是很小的。例如当 $l=100$ 公尺和 $f=2.5$ 公尺时 L 等于 100.167 公尺。

6) 支座位于不同水平上

图 6 是一根支座位于不同水平上的柔綫。如前面的情形一样,要确定柔綫的外形、各截面的內力及其長度。

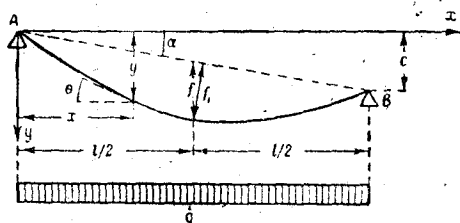


图 6

按公式(19a)得到

$$H = \frac{M}{y - C \frac{x}{l}}. \quad (31)$$

假定柔綫跨度中間自直綫 AB 算起的垂度 f 是已知的。对此截面得

$$M = \frac{ql^2}{8}, \quad y = f + \frac{C}{2}.$$

因此將 $x = \frac{l}{2}$ 代入公式(31),即得

$$H = \frac{ql^2}{8f} \quad (32)$$

必須指出,在此处 q 不是指柔綫的單位重量 q_1 , 而是已考慮柔綫傾斜度的單位重量值

$$q = \frac{q_1}{\cos \alpha}$$

柔綫的垂曲綫方程式可根據(19a)式求得

$$y = \frac{M}{H} + \frac{Cx}{l}$$

或將(32)式的 H 值及下式代入上式

$$M = \frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2}$$

得到

$$y = \frac{4fx(l-x)}{l^2} + \frac{Cx}{l} = \frac{4fx(l-x)}{l^2} + x \operatorname{tg} \alpha_0 \quad (33)$$

由此

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4f}{l} - 8f \frac{x}{l^2} + \frac{C}{l} \quad (34)$$

在柔綫的左終端,亦即在 $x=0$ 处,得到 $\frac{dy}{dx} = \theta_A$ (此处 θ_A 是柔綫的切綫對水平綫的傾角)

$$\operatorname{tg} \theta_A = \frac{4f}{l} + \frac{C}{l}; \quad (35)$$

同样,對於右終端(亦即在 $x=l$ 处)

$$\operatorname{tg} \theta_B = \frac{4f}{l} - \frac{8f}{l} + \frac{C}{l} = -\frac{4f}{l} + \frac{C}{l} \quad (36)$$

因此,如果 $4f=C$, 則此終端是水平的。如果 $4f>C$, 則正切是負值,亦即切綫的傾斜情形與圖 7a 相適應。如果 $4f<C$, 則柔綫在右支座上的切綫方向如圖 7b 所示。

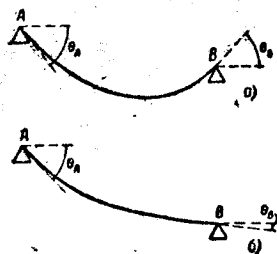


圖 7