·中学生学习辅导丛书

高中数学解题方法与技巧

《中学生学习报》编辑部

河南教育出版社

前　　言

《中学生学习报》是目前国内发行量最大的知识性报纸。几年来开设了一些有特色的栏目，刊载了优秀教师、专家、学者的许多好文章。应广大读者要求，我们根据新的教学大纲，把这些文章加以精选，汇编成了《中学生学习辅导丛书》。在创刊五周年纪念之际，奉献给读者。

这套丛书包括：《作文步步高》、《课堂短笛》、《雏鹰展翅》、《初中数学解题方法与技巧》、《高中数学解题方法与技巧》、《学习英语的路与桥》、《中学英语同义词新解》、《初中物理重点难点解析》、《高中物理重点难点解析》、《初中化学学习辅导》、《高中化学解题纵横谈》，共十一本。

《高中数学解题方法与技巧》一书分代数、立体几何、三角、解析几何、综合五部分。既介绍了常用的解题方法，又提供了新颖的解题技巧。既有利于读者巩固所学知识，又能帮助读者拓宽解题思路。它是中学数学教师和学生的良好参考书。

在编辑这套丛书时，我们广泛征求了各方面的意见，对文章做了进一步的修改和补充。尽管如此，缺点错误仍在所难免。欢迎广大读者给以批评指正。

《中学生学习报》编辑部

目　　录

代数部分

立体几何部分

三角部分

解析几何部分

综　合　部　分

代 数 部 分

如何求函数解析式

汤璇罗

高一代数的所有内容，几乎是环绕着“函数”这个中心．由于函数概念具有一定的抽象性，所以一些同学总觉得对函数，特别是“ $y=f(x)$ ”这个记号捉摸不透．对于函数概念，在理解函数定义的同时，必须认识到它是由定义域、值域以及由定义域到值域的对应法则三部分组成的一类特殊的“映射”（或称“单值对应”）．为了加深对函数概念的理解和提高解题能力，这里对如何求函数的“对应法则”及有关问题，作一些介绍．

一、用待定系数法求函数解析式

待定系数法的根据是定理：如果

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n$$

那么 $a_0=b_0$， $a_1=b_1$：……， $a_n=b_n$ ．

例1 已知 $y=f(x)$ 是一次函数，$y=g(x)$是正比例函数，且有关系式：$f[g(x)]=g[f(x)]=3x-2$；求$f(x)$和$g(x)$．

解：设$f(x)=k_1x+b$，$g(x)=k_2x$，

则$f[g(x)]=k_1(k_2x)+b=3x-2$．

$\therefore k_1\cdot k_2=3$，$b=-2$，

又$g[f(x)]=k_2(k_1x+b)=k_1k_2x+k_2b=3x-2$，

$\therefore k_2b=-2$，$\because b=-2$，$\therefore k_2=1$，则$k_1=3$，

$\therefore f(x)=3x-2$，$g(x)=x$．

二、设过渡变量求函数解析式

例2 已知$f(x^n)=\ln x$，求$f(2)$的值．

解：令$s=x^n$，则$x=\sqrt[n]{s}$，代入$f(x^n)=\ln x$，得

$$f(s)=\ln\sqrt[n]{s}=\frac{1}{n}\ln s.$$

即
$$f(x)=\frac{1}{n}\ln x,$$

$\therefore$
$$f(2)=\frac{1}{n}\ln 2.$$

三、解函数方程组求函数解析式

例3 若函数$f(x)$适合$af(x)+bf(\frac{1}{x})=cx$，　　(1)

求$f(x)$（其中$|a|\neq|b|$）．

解：令$u=\frac{1}{x}$，则$x=\frac{1}{u}$，代入已知关系式（1）得

$$af(\frac{1}{u})+bf(u)=\frac{c}{u},$$

即
$$\begin{cases} af(x)+bf(\frac{1}{x})=cx, & (1)\\ af(\frac{1}{x})+bf(x)=\frac{c}{x}. & (2)\end{cases}$$

解得 $f(x)=\dfrac{acx^2-bc}{(a^2-b^2)x}$　　$(a^2\neq b^2)$．

四、利用自变量和函数间的依赖关系解题

例4 函数$f(x)$对一切实数x满足$f(2+x)=f(2-x)$，如果方程$f(x)=0$恰有四个不同的实根，求这四个实根的和．

解： 设方程$f(x)=0$有实数根x_1，则$f(x_1)=0$，

又$f(x_1)=f(2+x_1-2)=f[2-(x_1-2)]$

$$=f(4-x_1)=0,$$

即方程有实根$4-x_1$．

若方程另有不同于以上两根的实根x_2，则同理必有实根$4-x_2$．

∴ 四实根之和：$x_1+(4-x_1)+x_2+(4-x_2)=8$．

希望上述例题对加深你对函数概念的理解有一定的帮助。

求反函数要注意的问题

汤璇罗

求一个函数的反函数时，我们必须抓住反函数的定义中“由函数确定的映射是定义域到值域上的一一映射”这句话，因此，有两种情况必须引起注意。

1.偶次函数在整个实数集内没有反函数． 当取它的某一单调区间为其定义域时，它所确定的映射，才是该定义域到值域上的一一映射，才存在反函数．如函数$y=x^2$的定义域R，值域$[0,+\infty)$，$y=x^2$确定的映射就不是R到$[0,+\infty)$上的一一映射．若取区间$[0,+\infty)$为$y=x^2$的定义域．此时$y=x^2$，$(x\geqslant 0)$有反函数，且$y=\sqrt{x}$；若取区间$(-\infty，0]$为它的定义域，此时$y=x^2$，$(x<0)$也有

反函数，其反函数为 $y=-\sqrt{x}$.

例1 求函数 $y=x^2-4x+3$，$(x<2)$ 的反函数.

解：$x=2\pm\sqrt{1+y}$，$\because x\leqslant 2$.

$\therefore\quad x=2-\sqrt{1+y}$，

$\therefore$ 反函数为 $y=2-\sqrt{1+x}$.

2.在求反函数的过程中，若进行了偶次方运算，则必须注意所得反函数的定义域.

例2 求函数 $y=\sqrt{x-2}$ 的反函数.

解：$x=y^2+2$，若得结论："反函数为$y=x^2+2$"，就错了.因为原函数的值域是 $[0，+\infty)$，而"反函数" $y=x^2+2$ 的定义域是R .所以 $y=\sqrt{x-2}$ 的反函数应是

$$y=x^2+2\ (x>0).$$

例3 求函数 $y=2-\sqrt{x}$ 的反函数.

解：$\sqrt{x}=2-y, x=(y-2)^2(y<2)$，$\therefore$反函数为

$$y=(x-2)^2,\ (x<2).$$

例4 函数$y=\sqrt{9-x^2}$在整个定义域上是否存在反函数？试确定它在 $[-3，0]$ 上的反函数.

解：（1）函数$y=\sqrt{9-x^2}$的定义域是$x\in[-3，3]$，值域$y\in[0，3]$，因为 $y=\sqrt{9-x^2}$ 所确定的映射不是从 $[-3，3]$ 到 $[0，3]$ 上的一一映射，所以 $y=\sqrt{9-x^2}$ 在 $[-3，3]$ 上不存在反函数.

（2）由 $y=\sqrt{9-x^2}$，$(-3<x<0)$

得 $x^2=9-y^2$ $(-3<x<0，0<y<3)$，

$x=-\sqrt{9-y^2}$ $(0<y<3)$，

$\therefore$ 函数 $y=\sqrt{9-x^2}$ $(-3<x<0)$的反函数为

$$y=-\sqrt{9-x^2}\quad(0<x<3).$$

[练习] 求下列函数的反函数：

1. $y=-\sqrt{\frac{1}{3}x}$；

2. $y=-2x^2+1,(x\geqslant 0)$；（若定义域为$(x>0)$怎样？）

3. $y=-\sqrt{x^2-4}\ (x\geqslant 2)$.

（答案）

（1） $y=3x^2\ (x\leqslant 0)$；

（2） $y=\sqrt{\frac{1-x}{2}}$；若定义域$(x>0)$，则

$$y=\sqrt{\frac{1-x}{2}}\ (x\neq 1).$$

（3） $y=\sqrt{x^2+4}\ (x\leqslant 0)$.

关于函数图象的平移

张荣先

同学们学习了幂、指、对等函数的图象和性质后，还应把知识进一步深化．因此，有必要研究一下函数图象的变换．在中学阶段通常会遇到下面三种变换．

（一）图象的平移

在初中学习二次函数时，曾讲过图象的平移，这里仅以函数的一般形式$y=f(x)$作一简要说明．

1. $y=f(x)$与$y=f(x)+m$的关系．

当$m>0$时，$y=f(x)+m$的图象可由$f(x)$的图象向上平移m个单位而得．

当 $m<0$ 时，$y=f(x)+m$ 的图象，可由 $f(x)$ 的图象向下平移 $|m|$ 个单位而得.

2. $y=f(x)$ 与 $y=f(x+m)$ 的关系.

当 $m>0$ 时，$y=f(x+m)$ 的图象，可由 $f(x)$ 的图象向左平移 m 个单位而得.

当 $m<0$ 时，则需把 $f(x)$ 向右平移 $|m|$ 个单位.

（二）图象的翻转

1. $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的关系.

此两函数互为反函数，它们的图象关于直线 $y=x$ 对称. 后者可由前者沿 $y=x$ 翻转而得.

2. $y=f(x)$ 与 $y=-f(x)$ 的关系.

因为对于同一个自变量 x_0，函数值 $f(x_0)$ 与 $-f(x_0)$ 始终互为相反数，因此，图象关于 x 轴对称，即后者可由前者沿 x 轴翻转印制.

注意：二者定义域相同. 值域是前者若为区间 (a, b)，则后者为区间 $(-b, -a)$. 例如

$$y=\log_2 x \text{ 与 } y=-\log_2 x=-\frac{\log_{\frac{1}{2}} x}{\log_{\frac{1}{2}} 2}=\log_{\frac{1}{2}} x$$

是我们熟悉的例子（图象见课本（乙种本）P.56）.

3. $y=f(x)$ 与 $y=f(-x)$ 的关系.

必须首先明确，两个函数的定义域是关于原点对称的两个区间，即若前者为 $x\in(a, b)$ 则后者为 $x\in(-b, -a)$.

因为对于 (a, b) 中的任一个 x 的值 x_0，其函数值 $f(x_0)$ 与 $(-b, -a)$ 中的对称点 $-x_0$ 的相应的函数值

$$f(-(-x_0))=f(x_0)$$

始终相等。因此，二者的图象关于 y 轴对称，其中任一个都

可由另一个沿 y 轴翻转印制．例如 $y=f(x)=2^x$ 与

$$y=f(-x)=2^{-x}=(2^{-1})^x=(\frac{1}{2})^x$$

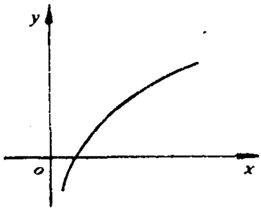
走大家熟悉的例子，图象关于 y 轴对称（见课本(乙种本) P．51图 1—26）．

同学们必须注意，这是两个函数，它们有各自的图象，两个图象关于 y 轴对称。同时，这两个函数并非一定为偶函数。若 $y=f(x)$ 为偶函数时，二者的图象将会出现什么情况？留给同学们自己思考！

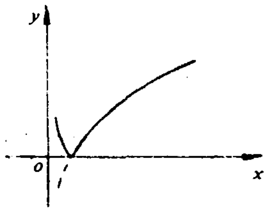
（三）绝对值对图象的影响

这里只谈 $y=|f(x)|$ 与 $y=f(x)$ 的关系．

根据绝对值的意义，对于定义域中某区间 $x\in[a,b]$，如果恒有 $f(x)\geqslant 0$，那么，$y=|f(x)|=f(x)$，对于定义域中某区间 $x\in[c,d)$，如果恒有 $f(x)<0$，那么 $y=|f(x)|=-f(x)$．因此 $y=|f(x)|$ 的图象，只需把 $y=f(x)$ 的图象位于 x 轴下方的部分，沿 x 轴翻转 $180°$ 印到上半平面．仍以同学们熟悉的对称函数 $y=\log_2 x$ 为例：$y=\log_2 x$ 的图象为图甲所示，那么 $y=|\log_2 x|$ 的图象为图乙所示．



图甲



图乙

注意：二者的定义域相同，但值域可能变化．（怎样变化？要分几种情况讨论？留给读者）。

等差（比）数列的通项公式及应用

赵国民

高中数学课本《代数》第二册在《数列》一章中，介绍了等差数列和等比数列的通项公式，分别为

$$a_n = a_1 + (n-1)d \text{ 和 } a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

略加变形，即可得到等差数列和等比数列的广义通项公式：

$$a_n = a_m + (n-m)\cdot d,$$

及 $a_n = a_m \cdot q^{n-m}$．（m、$n \in N$，公式和 n、m 的大小无关）

利用上述公式，可比较方便地解决课本上的一些习题和课外参考题．

例1 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_4=10$，$a_7=19$，求 a_1 与 d．（课本第47页2（4）题）

解：依题意，有

$a_7 = a_4 + (7-4)\cdot d$，

即　$19 = 10 + 3d$，

$\therefore d = 3$．

又 $\because a_1 = a_4 + (1-4)\cdot d$，

$\therefore a_1 = 10 - 3\times 3 = 1$．

例2 一个等比数列的第2项是10，第3项是20，求它的第1项与第4项．（课本第58页第3（2）题）

解：依题意，有 $a_3 = a_2 \cdot q^{3-2}$，即 $20 = 10q$．

$\therefore q = 2$．

$\therefore a_1 = a_2 \cdot q^{1-2} = 10\times 2^{-1} = 5$，

$$a_4 = a_3 \times q^{4-3} = 20 \times 2 = 40.$$

例3 已知$\{a_n\}$为等差数列，其中$a_p = q$，$a_q = p$，

求证：$a_{p+q} = 0$．

证明：$\because a_p = a_q + (p-q)\cdot d$，

$$\therefore d = \frac{a_p - a_q}{p-q} = \frac{q-p}{p-q} = -1.$$

$$\therefore a_{p+q} = a_p + [(p+q)-p]\cdot d$$

$$= q + q \times (-1) = 0.$$

例4 在等比数列$\{a_n\}$中，已知$a_5 - a_1 = 15$，$a_4 - a_2 = 6$，求a_3．（课本第62页第2（4）题）

解：依题意，有

$$\begin{cases} a_3 q^2 - a_3 q^{-2} = 15, & (1) \\ a_3 q - a_3 q^{-1} = 6. & (2) \end{cases}$$

（1）÷（2），得

$$q + \frac{1}{q} = \frac{5}{2},$$

解得 $q = 2$，或$q = \frac{1}{2}$.

分别代入（2），得 4，或$a_3 = -4$．

等比差数列通项公式的求法

祝厚元

数列$\{a_n\}$：若满足$a_{n+1} = p a_n + d$，（$p \neq 1$，p、d是常数）则称此数列为等比差数列。当给定$a_1 = a$时，我们来求它的通项公式．

为了讨论这类题目的做法，先来看特例：若$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1$ $(n\in N)$ 求通项公式a_n

解法一：$\because a_1=1$，

$a_2=2\cdot1+1=3=2^2-1$，

$a_3=2\cdot(2^2-1)+1=7=2^3-1,\cdots\cdots$

猜想$a_n=2^n-1$．下面再用数学归纳法证明：

当$n=1$时，$a_1=2^1-1=1$，猜想为真．

当$n=k$时，设$a_k=2^k-1$，则

$a_{k+1}=2a_k+1=2(2^k-1)+1=2^{k+1}-1$

猜想亦真，故对一切$n\in N$，$a_n=2^n-1$成立．

解法二：注意到$a_{n+1}=2a_n+1$．两边加1，

$a_{n+1}+1=2a_n+2=2(a_n+1)$．令$b_n=a_n+1$，$b_{n+1}=a_{n+1}+1$．可见对于数列$\{b_n\}$，有$b_{n+1}=2b_n$，

$\therefore\{b_n\}$是以$b_1=a_1+1$为首项，2为公比的等比数列，

$\therefore\{b_n\}$的通项$b_n=(a_1+1)\cdot2^{n-1}=2^n$．($\because a_1=1$)

$\therefore$原数列通项公式$a_n=b_n-1=2^n-1$，($n\in N$)．

从以上可总结出两种方法：第一种是观察、归纳、猜想、证明的方法．第二种是对所给递推公式两边添加适当常数，变换为一个新的等比数列，从而间接求出原数列通项公式下面仅用第一种方法求本文开始所给数列的通项．

解：$\because a_1=a$．

$a_2=pa_1+d=pa+d$，

$a_3=pa_2+d=p^2a+pd+d=p^2a+d(p+1)$，

$a_4=pa_3+d=p^3a+d(p^2+p+1)$，

猜想$a_n=p^{n-1}a+d(p^{n-2}+p^{n-3}+\cdots\cdots+p+1)$

$$=p^{n-1}a+d\left(\frac{1-p^{n-1}}{1-p}\right),\ (\because p\neq1).$$

然后用数学归纳法证明：

显然 $n=1$ 时猜想成立.

设 $n=k$ 时，$a^{k}=p^{k-1}a+d\left(\frac{1-p^{k-1}}{1-p}\right)$.

则 $n=k+1$ 时，$a_{k+1}=p\left[p^{k-1}a+d\cdot\frac{1-p^{k-1}}{1-p}\right]+d$

$=p^{k}a+\frac{d-dp^{k}}{1-p}=p^{k}a+\frac{d(1-p^{k})}{1-p}$. 猜想亦真，故对一切 $n\in N$，猜想为真.

$\therefore a_{n}=p^{n-1}a+\frac{d(1-p^{n-1})}{1-p}$

等比数列的前 n 项和公式别证

章淳立

等比数列 a_1，a_2，$a_3\cdots$，$a_n\cdots$的公比为 $q\neq1$，前 n 项的和记为 S_n，则 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$.

下面给出几种异于课本上的证法：

证法一：利用 $S_n-S_{n-1}=a_n$.

$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}$

$=a_1+q(a_1+a_1q+\cdots+a_1q^{n-2})=a_1+qS_{n-1}$

$=a_1+q(S_n-a_n)$.

从上等式 $S_n=a_1+q(S_n-a_n)$ 中可解，得

$$S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}=\frac{a_1-a_1q^n}{1-q}.$$