Peculiar Explanation

宋伯涛　总主编

人教统编版

北京朗曼教学与研究中心教研成果

非常讲解

高三数学

教材全解全析（下）

天津人民出版社

非常讲解

朗曼文化

高三年级

英语	人教统编版（上、下）
语文	人教统编版（上、下）
数学	人教统编版（上、下）
物理	人教统编版（全一册）
化学	人教统编版（全一册）
生物	人教统编版（全一册）

责任编辑◆王敏 张春龙
封面设计◆福瑞来书装

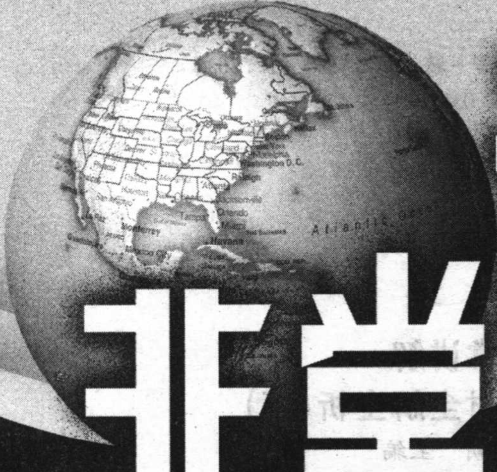
ISBN 7-201-01479-X
9 787201 014791 >

ISBN 7-201-01479-X
定价：15.80元

Peculiar Explanation

张志朝 主编

北京朗曼教学与研究中心教研成果



非常讲解

高三数学

教材全解全析(下)

天津人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

非常讲解．数学．高三．下/张志朝主编．-天津:天津人民出版社,2004.10
ISBN 7-201-01479-X

Ⅰ．非…　Ⅱ．张…　Ⅲ．数学课-高中-教学参考资料　Ⅳ．G634
中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第031029号

非常讲解
高三数学教材全解全析(下)

张志朝　主编

天津人民出版社出版
出版人：刘晓津
(天津市西康路35号　邮政编码：300051)
北京市昌平开拓印刷厂印刷　新华书店发行

*

2005年11月第2版　2005年11月第1次印刷
32开本　890×1240毫米　14印张　字数:423千字
定价:15.80元
ISBN 7-201-01479-X

敬告读者

《中学 1+1》《非常讲解》系列丛书汇集了北京朗曼教学与研究中心最新教学科研成果。值此再版之际，北京朗曼教学与研究中心向全国千百万热心读者深表谢意！

在购买《中学 1+1》《非常讲解》系列丛书时，请读者认准封面上“**北京朗曼教学与研究中心教研成果**”“**宋伯涛总主编**”等字样，以防假冒。

近年来，发现个别出版物公然冒用《中学 1+1》《非常讲解》品牌或大量盗用书中内容。在此，本中心**严正声明：凡冒用《中学 1+1》《非常讲解》品牌，盗用书中内容的行为，均为侵犯知识产权行为，本中心将根据有关法规追究侵权者的法律责任。**

保护知识产权，打击盗版、盗用行为是每一个真正尊重知识的忠诚读者的义务。如发现有侵权行为，请及时告知北京朗曼教学与研究中心，本中心对您的正直行为表示由衷的感谢。

如您在使用本书过程中发现有疏漏之处或疑难问题，可来信与本中心联系，我们将悉心听取您的批评和建议，竭诚为您排忧解难。让我们携手共勉，共同打造朗曼光辉的形象！

本书在全国各地均有销售，您也可以来信邮购。

来信请寄：北京市朝阳区亚运村邮局 89 号信箱，北京朗曼教学与研究中心**蒋雯丽**（收）；邮编：100101。

联系电话：010－64925885；64925887 转 603，605。

另外，北京朗曼教学与研究中心新建大型教学网站“**朗曼 1+1 网**”已于 **2004 年 5 月 18 日**正式开通。网站科目齐全，内容丰富，欢迎登录！

轻松浪漫的学习旅程，将从点击“朗曼 1+1 网”开始！

网址：http://www.lmedu.com.cn

《高三数学教材全解全析(下)》
编委会

主　编　张志朝

编　者　徐　伟

陈丽琴

锁有贵

张　雷

周子君

再版前言

本书针对高考复习按教材分专题编写，每讲对高考命题趋势进行预测，对高考要点集中详尽讲解，对往年考试热点进行追踪，对常用方法技能进行综合讲解，对各知识点逐个进行详细的讲解和分析，着重知识和技能的拓展与规律方法的揭示与总结，通过典型常规题，创新开放题及实践应用题等让学生对新教材的知识点进行探究和体验，并按以下三点进行设计：

1.对典型例题进行全面剖析，并设以下四个栏目：①**思路点拨**：点拨解题思路，提供解题策略。②**解答**：按照解题方案，给出规范解答。③**误点剖析**：指出解题常见错误，并点击错误产生的原因，进行防错提示。④**评注**：总结解题过程的注意点，剖析解题技巧的关键处。开设以上小栏目，其目的是，开启学生思路，着眼规律方法总结。

2.试解相关题(或变式题)。从不同角度提出与典型例题相关或相近的问题，供学生练习，达到融会贯通，举一反三的目的。

作者在编写过程中，力求讲解教材全部内容，信息量大，做到精讲精析精选，讲解透彻且具有深度，辨析清晰细致，分析讲解新颖独到，与众不同，别具一格，不落窠臼。

《非常讲解》系列丛书讲解细致，分析透彻，层次分明，条理清晰，内容丰富，对掌握教材重点、难点、疑点以及各知识点，对培养并提高理解、分析、判断、领悟、思考

以及解决问题能力具有极强的实用性和指导性，是朗曼中心继《中学 1+1》系列丛书后又一成功力作，两者堪称姊妹篇。其侧重点各不相同，前者偏重于重点及疑难问题的讲解与测试，后者偏重于对教材的讲解与分析，它们既是一个整体，又互为补充，相得益彰。

希望我们的努力能给老师和同学们的教学活动带来切实而有效的帮助，同时也期待着来自广大师生和教育专家的批评和指教。

宋伯涛

2005 年 10 月于北师大

目录 CONTENTS

第二篇　专题研究

第一部分 重点知识选讲

第 1 讲　函数的性质及其应用

命题趋势预测

函数是高中数学最重要的内容之一，相关的知识多且面广．在函数中所用到的数形结合、分类讨论等数学思想方法的体现既有深度又有广度，是历年数学高考的重点内容；函数的单调性、奇偶性、周期性，从以前的具体考查到现在的抽象考查，从判断、证明到应用，从单一考查到综合考查，从“知识测试型”向“能力测试型”转变，是高考命题的一个趋势；配方法、待定系数法、换元法、数形结合、分类讨论、等价转换等，这些方法的综合应用构成了函数应用的广泛性、解法的多样性和思维的创造性，这正符合高考试题改革的发展趋势，是高考的热点．

知识要点扫描

1. 函数的定义域

求函数定义域时，一般遵循以下原则：

(1) $f(x)$是整式时，定义域是全体实数．

(2) $f(x)$是分式时，定义域是使分母不为零的一切实数．

(3) $f(x)$是为偶次根式时，定义域是使被开方式为非负值时的实数的集合．

(4)对数函数的真数必须大于零；当对数或指数函数的底数中含变量时，底数须大于零且不等于 1．

(5) $y=\tan x$ 中，$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in \mathbf{Z})$；$y=\cot x$ 中，$x\neq k\pi(k\in \mathbf{Z})$．

(6) $y=\arcsin x$ 中的 $|x|\leqslant 1$；$y=\arccos x$ 中的 $|x|\leqslant 1$．

(7)零指数幂的底数不能为零．

(8)若 $f(x)$是由有限个基本初等函数经过四则运算而组成的函数时,则其定义域一般是各基本初等函数定义域的交集.

(9)对于求复合函数定义域的问题,一般步骤是:若已知 $f(x)$的定义域为$[a,b]$,其复合函数 $f[g(x)]$的定义域应由不等式 $a\leqslant g(x)\leqslant b$ 解出.

(10)对于含字母参数的函数,求其定义域,要根据问题的具体情况对字母参数进行分类讨论.

(11)由实际问题确定的函数,其定义域除使函数有意义外,还要符合问题的实际意义.

2. 函数的值域

求函数值域较求函数定义域要复杂得多,求函数值域常和求函数最值问题紧密相关,历届高考试题中经常出现,必须引起重视.

求函数值域主要有以下一些方法:

(1)函数的定义域与对应法则直接制约着函数的值域,对于一些比较简单的函数可通过观察法求得值域.

(2)二次函数可用配方法求值域.

(3)分子、分母是一次函数的有理函数,可用反函数法求得值域.

(4)无理函数可用换元法,尤其是三角代换求得值域.

(5)分子、分母中含有二次项的有理函数,可用判别式法.

(6)单调函数可根据函数的单调性求得值域.

(7)利用数形结合的方法,根据图象求得函数值域.

(8)有的函数可拆配成重要不等式的形状,利用重要不等式求得值域.

在此必须注意,在利用配方法、重要不等式、判别式法求值域时,一定要注意等号是否成立,必要时须注明等号成立的条件.

3. 函数的单调性

(1)增函数、减函数和单调区间

①对于给定区间上的函数 $f(x)$,如果对于属于这个区间的任意两个自变量 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,都有 $f(x_1)<f(x_2)$,那么就说 $f(x)$在这个区间上是增函数.

②对于给定区间上的函数 $f(x)$,如果对于属于这个区间的任意两个自变量值 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,都有 $f(x_1)>f(x_2)$,那么就说 $f(x)$在这个区间上是减函数.

③如果函数 $y=f(x)$在某个区间上是增函数或减函数,就说 $f(x)$在这个区间上具有单调性,这一区间就叫 $f(x)$的单调区间.

④函数若在某区间内单调递增,那么它的图象在这个区间内自左至右上升;若在某区间内单调递减,那么它的图象在这个区间内自左至右下降.

(2)对函数单调性概念理解须注意的两点:

①单调性反映函数值变化的趋势,从图象看,是曲线的上升或下降,函数的单调性是对某个区间而言的;有些函数在整个定义域内具有单调性(如一次函数 $y=$

$kx+b$ 等);有些函数在某个区间上是增函数,而在另一个区间上是减函数(如二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 在 $x=-\frac{b}{2a}$ 的两侧);有的函数没有单调区间,或者它的定义域根本就不是区间(如$y=0,x\in\mathbf{N}$),对于某一点不存在变化趋势,不讨论单调性.

②在增(减)函数的定义中,x_1,x_2 的任意性是非常重要的,绝不能忽视,因为,这在本质上,就是把比较区间上无限多个函数值的大小的问题转化为比较两个任意值的大小.

(3)判断函数单调性的方法

①根据定义;②根据图象;③利用已知函数的单调性;④利用导数.

(4)复合函数单调性的判定方法

在复合函数 $y=f[g(x)]$ 中,若 $u=g(x)$ 在区间$[a,b]$上是单调增(减)函数,则 $y=f(u)$ 在区间$[g(a),g(b)]$上(或在区间 $[g(b),g(a)]$上)是单调增(减)函数,那么复合函数 $y=f[g(x)]$ 在区间$[a,b]$上一定是单调函数,它的增减性如下表:

$u=g(x)$	$y=f(u)$	$y=f[g(x)]$
增函数	增函数	增函数
增函数	减函数	减函数
减函数	增函数	减函数
减函数	减函数	增函数

4. 函数的奇偶性

(1)奇函数、偶函数

①对于函数 $f(x)$,如果对于函数定义域内任意一个 x,都有$f(-x)=-f(x)$,那么函数 $f(x)$就叫做奇函数.

②对于函数 $f(x)$,如果对于函数定义域内任意一个 x,都有$f(-x)=f(x)$,那么函数 $f(x)$就叫做偶函数.

(2)定义域关于原点对称是一个函数是奇函数或偶函数的必要条件.

(3)奇函数的图象关于原点对称,偶函数的图象关于 y 轴对称.

(4)判断函数奇偶性的方法

①根据定义;②根据图象的对称性.

(5)函数既是奇函数又是偶函数$\Leftrightarrow f(x)\equiv 0$.

5. 反函数的概念

函数 $y=f(x)$,设它的定义域为 A,值域为 C,从式子 $y=f(x)$ 中解出 x,得到式子 $x=\varphi(y)$. 如果对于 y 在 C 中的任何一个值,通过式子 $x=\varphi(y)$,x 在 A 中都有惟一确定的值和它相对应,那么式子$x=\varphi(y)$就表示 x 是自变量 y 的函数,这样函数 $x=\varphi(y)$,叫做函数$y=f(x)$的反函数,记作 $x=f^{-1}(y)$.

函数 $y=f(x)$的定义域和值域分别是函数 $x=f^{-1}(y)$的值域和定义域.

习惯上,用 x 表示自变量,y 表示函数,将函数 $x=f^{-1}(y)$ 改写成 $y=f^{-1}(x)$ 的形式,即函数 $y=f^{-1}(x)$ 是函数 $y=f(x)$ 的反函数.

6. 函数 $y=f^{-1}(x)$,$x=f^{-1}(y)$ 与函数 $y=f(x)$ 的比较.

函数	自变量	图象
$y=f(x)$	x 是自变量	
$x=f^{-1}(y)$	y 是自变量	和 $y=f(x)$ 的图象相同
$y=f^{-1}(x)$	x 是自变量	和 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称

小结:互为反函数的两个函数,其对应法则必是互逆的;反之对应法则互逆的两个函数,不一定互为反函数.

7. 求反函数的步骤

如果函数存在反函数,求反函数可分以下三步:

(1)由 $y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$.

(2)由函数 $y=f(x)$ 的定义域与值域确定反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的值域与定义域.

(3)把 $x=f^{-1}(y)$ 改写成 $y=f^{-1}(x)$,并注明函数的定义域.

8. 互为反函数的函数图象间关系

函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

小结:①函数 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称,这个结论是在坐标系中横坐标轴为 x 轴,纵坐标轴为 y 轴,而且横坐标轴与纵坐标的单位长度一致的前提下得出的.

②函数 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称,而不是函数 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

③函数 $y=f(x)$ 与函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图象是相同的.

9. 如果函数 $y=f(x)$ 在某一区间上是(严格)单调的,那么 $y=f(x)$ 在该区间上有反函数.

10. 如果函数是单调函数,则它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 也是单调函数,并且 $y=f^{-1}(x)$ 的单调性与 $y=f(x)$ 的单调性相同.

热点问题追踪

【例 1】 已知,方程 $f(x)+x-2005=0$ 有惟一实数根 α,方程 $f^{-1}(x)+x-2005=0$ 有惟一实数根 β,求 $\alpha+\beta$ 的值.

思路点拨 先将问题转化,然后再根据函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 图象的对称性进行求解.

解： 可以将方程 $f(x)+x-2005=0$ 变形为：$f(x)=-x+2005$. 于是 α 可以看作函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=-x+2005$ 交点 A 的横坐标；同样 β 也可以看作函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象与直线 $y=-x+2005$ 交点 A' 的横坐标. 由于函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象是关于直线 $y=x$ 成轴对称的，又因为直线 $f(x)=-x+2005$ 与 $y=x$ 是垂直的，故以上的两点 A 与 A' 是关于直线 $y=x$ 对称的，所以 A 与 A' 的中点就是直线 $y=x$ 与 $y=-x+2005$ 的交点. 即 A 与 A' 的中点为 $\left(\frac{2005}{2},\frac{2005}{2}\right)$. 所以 $\alpha+\beta=2\times\frac{2005}{2}=2005$.

误点剖析 若缺乏数形结合的意识，并不能运用函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于一、三象限角平分线对称，就不能得到问题获解的有效途径.

评注：一般地，我们同样可得：方程 $f(x)+x-m=0$ 的惟一实根 α 与 $f^{-1}(x)+x-m=0$ 的唯一实根 β 的和为 m，即有 $\alpha+\beta=m$.

试解相关题

1－1 已知定义在 **R** 上的函数 $y=f(x)$ 是单调增函数，它的反函数为 $y=f^{-1}(x)$. a 为实常数，则方程① $f(x)=a$；② $f(x)=x$；③ $f(x)=a-x$；④ $f^{-1}(x)=a$；⑤ $f^{-1}(x)=x$；⑥ $f^{-1}(x)=a-x$ 中，一定有根的方程为________（写出序号即可），它们的根的个数________.

1－2 若关于 x 的方程 $f(x)+x+a=0$ 仅有一根 x_1，而关于 x 的方程 $f^{-1}(x)+x+a=0$ 有一根为 x_2，则 $x_1+x_2=$________.

【例 2】 设函数 $f(x)=\dfrac{ax^2+1}{bx+c}$（$a$、$b$、$c\in\mathbf{Z}$）是奇函数，且在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，$f(1)=2$，$f(2)<3$，(1) 求 a、b、c 之值；(2) 证明 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上是减函数.

思路点拨 首先利用函数的奇偶性，$f(1)=2$ 可以建立 a 与 b 的方程，并求出 c 的值，然后再根据函数在 $[1,+\infty)$ 上的单调性与 $f(2)<3$ 可建立 a、b 的不等式，再考虑到 a、b 是整数，就能求出 a、b 的值了.

解：(1) $\because$ $f(x)=\dfrac{ax^2+1}{bx+c}$ 是奇函数，

$\therefore$ $f(-x)=-f(x)$. 又 $f(1)=2$，

$\therefore$ $f(-1)=-2$，$\therefore$ $c=0$，$a=2b-1$

又 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，

得 $f(2)>f(1)=2$.

从而 $2<f(2)<3$，$\therefore$ $2<\dfrac{4a+1}{2b}<3$.

又 a、$b\in\mathbf{Z}$，可解得 $a=1$，$b=1$.

故 $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$.

(2)用函数的单调性定义证明,略.

误点剖析 若忽视了条件 a、b、$c\in\mathbf{Z}$ 的作用,则不能求出 a、b 的值.

评注:①题设条件:函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上是单调递增函数的应用是解题的关键.②本题涉及了函数的相当多的概念和性质,对它深入研究,能帮助我们开拓思路,在解题过程中,用到了哪些解题方法和思想方法呢?

试解相关题

2－1 函数 $f(x)=ax^3+(a-1)x^2+48(a-2)x+b$ 的图象关于原点成中心对称,则 $f(x)$ 在 $[-4,4]$ 上的单调性是 ( )

A. 增函数

B. 减函数

C. $[-4,0]$ 上是增函数,$[0,4]$ 上是减函数

D. $[-4,0]$ 上是减函数,$[0,4]$ 上是增函数

2－2 已知函数 $f(x)=\frac{2x^2+bx+c}{x^2+1}(b<0)$ 的值域为 $[1,3]$.

(1)求实数 b、c 的值;

(2)判断函数 $F(x)=\lg f(x)$ 的单调性,并给出证明.

【例 3】 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,对任意的实数 x_1,x_2 都满足 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$,当 $x>0$ 时,$f(x)>0$,且 $f(2)=3$.

(1)试判断 $f(x)$ 的奇偶性和单调性;

(2)当 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时,$f(\cos2\theta-3)+f(4m-2m\cos\theta)>0$ 对所有的 θ 均成立,求实数 m 的取值范围.

思路点拨 (1)用赋值法可判断 $f(x)$ 的奇偶性,而单调性的问题,需考虑如何应用条件:当 $x>0$ 时,有 $f(x)>0$.

(2)利用第(1)小题中获得的关于函数奇偶性与单调性的结论,将要求解的抽象不等式转化为关于 m 与 θ 的具体不等式,然后再分离 m 与 θ,即可探求当 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时,使不等式总成立的 m 的取值范围.

解:(1)令 $x_1=x_2=0$,则 $f(0)=0$;

令 $x_1=x,x_2=-x$,则 $f(x)+f(-x)=f(0)$,

$\therefore\ f(-x)=-f(x)$,$\therefore\ f(x)$ 是奇函数.

设 $x_1<x_2$,则 $x_2-x_1>0$,

$\therefore\ f(x_2)-f(x_1)=f(x_2)+f(-x_1)=f(x_2-x_1)>0$.

$\therefore\ f(x_2)>f(x_1)$.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数.

(2)由 $f(\cos2\theta-3)+f(4m-2m\cos\theta)>0$ 对 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 均成立,

则 $f(\cos2\theta-3)>f(2m\cos\theta-4m)$ 对 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 均成立,

$\therefore$ $\cos2\theta-3>2m\cos\theta-4m$ 对 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 均成立,

$\therefore$ $m>\frac{\cos2\theta-3}{2\cos\theta-4}$ 对 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 均成立.

又 $\frac{\cos2\theta-3}{2\cos\theta-4}=\frac{2\cos^2\theta-4}{2\cos\theta-4}=\frac{\cos^2\theta-2}{\cos\theta-2}=\cos\theta-2+\frac{2}{\cos\theta-2}+4\leqslant-2\sqrt{2}+4$,

$\therefore$ $m>4-2\sqrt{2}$.

误点剖析 本例误点有二个,一个是面对抽象函数及其所具有的函数性质,在考虑如何运用这些性质化归问题时,找不到有效的切入口;另一个是不会处理“恒成立问题”.

评注:对函数性质的考查,由考查具体的函数向抽象的函数转化,这类题一般给定抽象函数的某些信息,通过信息的迁移,从而判断函数的性质.本题(2)的解法是植根于对函数思想的深刻理解所产生出来的一种函数方法论,即 $x\in A$ 时,记 $f(x)$ 有最大值为 M,最小值为 m,则①$d\geqslant f(x)$ 在 $x\in A$ 中恒成立$\Leftrightarrow d\geqslant M$;②$d\leqslant f(x)$ 在 $x\in A$ 中恒成立$\Leftrightarrow d\leqslant m$.

试解相关题

3－1 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,且满足 $f(x+2)=-\frac{1}{f(x)}$,当 $2\leqslant x\leqslant3$ 时,$f(x)=x$,则 $f(5.5)$ 等于 ( )

A. 5.5 B. -5.5 C. -2.5 D. 2.5

3－2 已知函数 $f(x)$ 的定义为 $\mathbf{R}$,对任意的实数 x_1、x_2 都满足 $f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)+f(x_2)$,当 $x>0$ 时,$f(x)>0$,且 $f(2)=3$.

(1)试求 $f(2^{2005})$ 的值.

(2)$f(\cos2\theta-3)+f(4m-2m\cos\theta)<0$ 对所有的 θ 均成立,求实数 m 的取值范围.

【例 4】 已知函数 $f(x)=\lg(a^x-k\cdot b^x)(k\in\mathbf{R}^+,a>1>b>0)$ 的定义域恰为区间$(0,+\infty)$.是否存在这样的 a、b,使得 $f(x)$ 恰在$(1,+\infty)$上取正值,且 $f(3)=\lg4$?若存在,求出 a、b 的值;若不存在,请说明理由.

解:$a^x-k\cdot b^x>0$,即$\left(\frac{a}{b}\right)^x>k$,

$\therefore$ $x>\log_{\frac{a}{b}}k$ 为其定义域满足的条件.

$\therefore$ $\log_{\frac{a}{b}}k=0$,即 $k=1$,$f(x)=\lg(a^x-b^x)$.