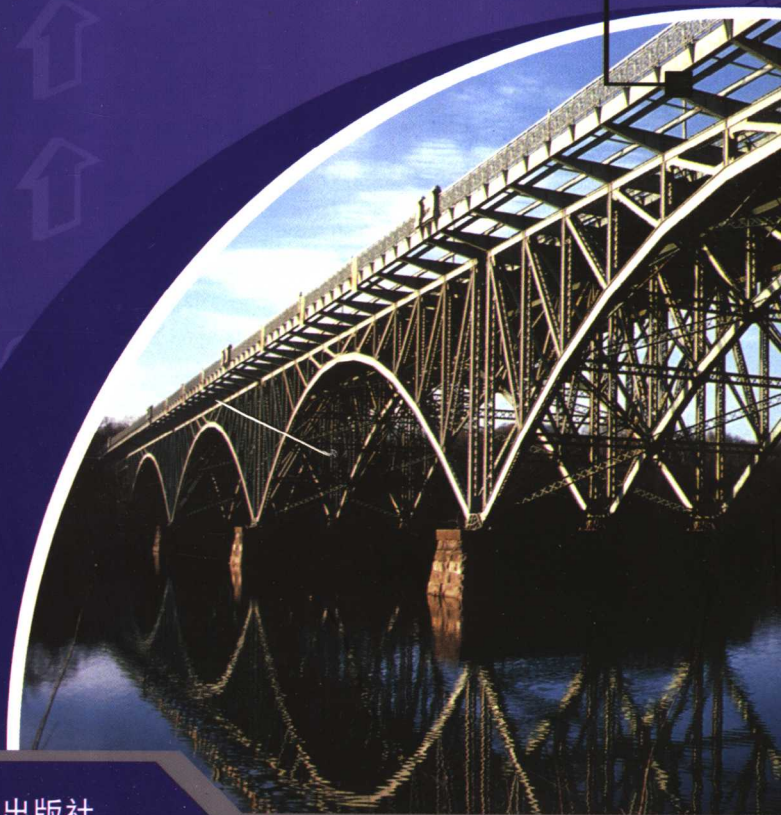


结构动力分析

主编 商大中 李宏亮 韩广才
主审 张文平



哈尔滨工程大学出版社

结构动力分析

主编 商大中 李宏亮 韩广才
主审 张文平

哈尔滨工程大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

结构动力分析/商大中,李宏亮,韩广才主编. —哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2005
ISBN 7-81073-745-7

I. 结… II. ①商…②李…③韩… III. 结构动力分析 IV. 0342

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 097894 号

内 容 简 介

本书全面系统地阐述了结构动力分析的基本内容。全书共分 7 章,第 1 章介绍了多自由度系统的振动问题,第 2 章详细介绍了离散系统的动力分析方法,第 3、4 章主要介绍连续系统的振动问题,第 5 章主要研究了连续系统的模态分析,第 6 章介绍了连续系统振动的近似解法,第 7 章介绍了有限元素法。本书在相应章节中给出了相应例题及部分仿真程序,可供学生上机实践。此外,书后附有习题可供巩固练习。

本书可作为大学工程力学专业及结构类、机械类专业高年级学生的教材或教学参考书,亦可作为有关专业工程技术人员的参考书。

哈尔滨工程大学出版社出版发行
哈尔滨市南通大街145号 哈尔滨工程大学11号楼
发行部电话:(0451)82519328 邮编:150001
新华书店经销
黑龙江省地质测绘印制中心印刷厂印刷

*

开本 787mm×1 092mm 1/16 印张 13 字数 315 千字

2005 年 10 月第 1 版 2005 年 10 月第 1 次印刷

印数:1—1 000 册

定价:15.00 元

前 言

本书是我校“十五”教材建设规划重点资助教材之一。适用于工程力学专业的教学需要,也可供船舶海洋工程、土木工程、飞行器设计、热力机械工程、船舶动力装置和机械设计与制造等专业教学使用。

本书包括了结构动力分析的基本内容,共分7章。第1章多自由度系统介绍了建立系统振动方程的方法、特征值问题和模态分析原理;第2章离散系统介绍了多自由度系统和由连续系统简化而得的离散系统的频率和振型的近似计算方法;第3章连续系统振动——牛顿法介绍了等截面杆、轴、梁、膜和等厚度薄板的自由振动方程及分离变量解法;第4章连续系统振动——变分法介绍了用变分原理,诸如虚功原理、最小势能原理、哈密顿原理和欧拉方程建立弹性体在载荷作用下的振动微分方程和边界值问题的方法;第5章连续系统的模态分析介绍了连续系统模态函数的正交性质和模态分析的方法;第6章连续系统振动的近似解法介绍了集中质量法、广义坐标法、假设模态法、模态综合法、伽辽金法和瑞利-里茨法等现代结构动力分析的方法;第7章有限元素法介绍了平面刚架和薄板的振动有限元分析。

本书是商大中教授编写的《动力分析基础》一书的续书,两书构成了一部完整的机械振动教科书。

本书在内容编排上尽量做到系统完整、逻辑严谨,尽可能介绍更多的理论知识。在内容选材上有自己的特色,吸取了国内外同类教材众家之长。本书力求简明扼要、深入浅出、便于读者自学。

本书可供理工类院校高年级本科生和研究生作教材使用,参考学时为40学时。本书也可供有关工程技术人员阅读参考。

本书由商大中教授积多年教学经验所编写的《结构动力分析》讲义修改整理而成,并增加了有关计算机振动分析程序和利用工程软件进行结构动力分析的内容和习题。第1、7章由韩广才执笔,第2、6章由李宏亮执笔,第3、4、5章由商大中执笔。有关计算机程序和工程软件应用部分及习题由李宏亮、韩广才执笔。全书最后由商大中教授统稿。

本书初稿承蒙张文平教授审阅并提出了宝贵的意见,编者在此致以诚挚的谢意。

编者

2005年10月

目 录

第1章 多自由度系统	1
1.1 引言	1
1.2 自由振动方程举例	1
1.3 影响系数法	2
1.4 拉格朗日方程法	12
1.5 主模态、特征值、特征向量	16
1.6 模态矩阵	23
1.7 特征向量的正交性	24
1.8 主坐标和方程解耦	24
1.9 正则坐标和正则模态矩阵	25
1.10 无阻尼系统的强迫振动——模态分析	28
1.11 比例阻尼系统和结构阻尼系统	33
1.12 粘性阻尼系统模态矢量的正交性	35
1.13 阻尼强迫振动——模态分析	36
1.14 半定系统	39
1.15 等固有频率的情况	42
第2章 离散系统	46
2.1 引言	46
2.2 瑞利法	46
2.3 邓克列法	53
2.4 瑞利-里茨法	55
2.5 矩阵迭代法	61
2.6 子空间迭代法	68
2.7 传递矩阵法	77
第3章 连续系统振动——牛顿法	85
3.1 引言	85
3.2 振动弦	85
3.3 杆的纵向振动	88
3.4 轴的扭转振动	90
3.5 梁的横向振动	92
3.6 膜的振动	98
3.7 薄板的横振动	102
第4章 连续系统振动——变分法	109
4.1 引言	109
4.2 变截面杆的纵向振动	109

4.3	变截面轴的扭转振动	111
4.4	变截面梁的横振动方程	113
4.5	剪切变形和转动惯量影响下的梁横振动方程	116
4.6	薄板的横振动	118
第 5 章	连续系统的模态分析	123
5.1	引言	123
5.2	弹性体振动的特征值问题	123
5.3	模态函数的正交性	124
5.4	弹性体模态分析	126
5.5	拉格朗日方程法	128
5.6	无约束杆的纵向运动	129
5.7	简支梁对集中载荷的动响应	131
5.8	简支梁对分布载荷的动响应	132
5.9	简支梁对移动载荷的动响应	134
5.10	板的动响应	136
第 6 章	连续系统振动的近似解法	138
6.1	引言	138
6.2	集中质量法	138
6.3	广义坐标法	144
6.4	假设模态法	145
6.5	模态综合法	149
6.6	伽辽金法	155
6.7	瑞利 - 里茨法	158
第 7 章	有限元素法	164
7.1	引言	164
7.2	杆的纵向振动	164
7.3	梁的横向振动	167
7.4	平面刚架的面内振动	170
7.5	薄板的面内振动	175
7.6	薄板的横向振动	179
7.7	采用 ANSYS 软件进行结构的模态分析	184
习题		193
参考文献		201

第 1 章 多自由度系统

1.1 引言

多自由度系统是指有限多个自由度的系统,也包括双自由度系统。实际的工程结构都是弹性体结构,弹性体是无限多个自由度的系统,但通过适当抽象化,往往可以归结为多自由度系统。所以多自由度系统振动的理论是解决工程振动问题的基础。

一个自由度的系统和多个自由度的系统统称为集中参数系统,或离散系统,因为它们都是用集中参数(离散参数)模型从实际工程结构简化得来的。一般来讲,一个 n 自由度系统的运动可以用 n 个独立坐标来描述,所以系统的运动常用 n 个二阶常微分方程来描述。用矩阵来表示 n 个自由度阻尼系统的自由振动微分方程为

$$M \ddot{\mathbf{x}} + C \dot{\mathbf{x}} + K \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (1-1-1)$$

其中 M 、 C 、 K 分别是 $n \times n$ 阶的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵。

1.2 自由振动方程举例

以图 1-1 所示三自由度系统为例。

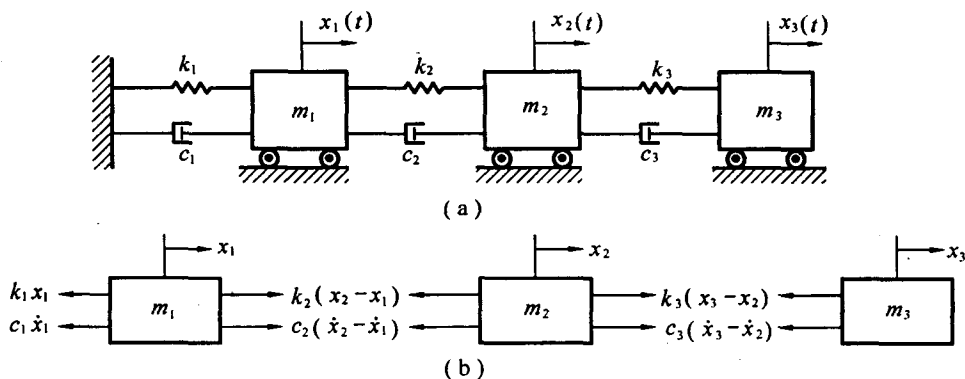


图 1-1

系统中各质量的位移由各自的静平衡位置算起,分别为 x_1 、 x_2 、 x_3 。由牛顿第二定律可建立系统的运动微分方程为

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - c_1 \dot{x}_1 - k_2(x_1 - x_2) - c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_3(x_2 - x_3) - c_3(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) \quad (1-2-1)$$

$$m_3 \ddot{x}_3 = -k_3(x_3 - x_2) - c_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2)$$

整理可得

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - c_2\dot{x}_1 + (c_2 + c_3)\dot{x}_2 - c_3\dot{x}_3 - k_2x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3x_3 = 0 \quad (1-2-2)$$

$$m_3 \ddot{x}_3 - c_3\dot{x}_2 + c_3\dot{x}_3 - k_3x_2 + k_3x_3 = 0$$

写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1-2-3)$$

或

$$M \ddot{x} + C \dot{x} + Kx = 0 \quad (1-2-4)$$

其中质量阵 M 、阻尼阵 C 和刚度阵 K 分别为

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix} \quad (1-2-5)$$

1.3 影响系数法

影响系数法是建立动力学方程的另一种方法,这种方法在结构分析中得到广泛的应用。本节主要介绍柔度影响系数法和刚度影响系数法。

1.3.1 柔度影响系数

柔度影响系数 d_{ij} 反映了系统的静弹性性质。它是由作用在 j 点处的单位力所引起的 i 点处的位移(变形)。如图 1-2 所示,单独作用于梁上 j 点处的单位力,在 i 点处引起的位移,即为柔度影响系数 d_{ij} ;而单独作用于梁上 i 点处的单位力引起的 j 点的位移则为柔度影响系数 d_{ji} 。

1.3.2 柔度矩阵

若有 n 个力 $f_1, f_2, \dots, f_n$ 分别作用在 $i = 1, 2, \dots, n$ 点上,则各自的位移 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 分别为

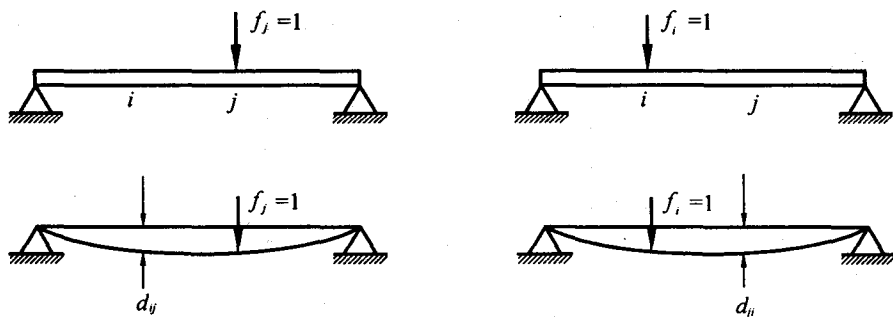


图 1-2

$$\begin{aligned}
 x_1 &= d_{11}f_1 + d_{12}f_2 + \cdots + d_{1n}f_n \\
 x_2 &= d_{21}f_1 + d_{22}f_2 + \cdots + d_{2n}f_n \\
 &\vdots \\
 x_n &= d_{n1}f_1 + d_{n2}f_2 + \cdots + d_{nn}f_n
 \end{aligned} \tag{1-3-1}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \tag{1-3-2}$$

或

$$x = Df \tag{1-3-3}$$

其中

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix} \tag{1-3-4}$$

称为柔度矩阵。方程 $x = Df$ 称为位移方程。

1.3.3 刚度影响系数

刚度影响系数 k_{ij} 也反映了系统的静弹性性质。当使系统仅在 j 点产生单位位移时, 在 i 点上需加的外力就定义为刚度影响系数 k_{ij} 。

1.3.4 刚度矩阵

对于 n 自由度系统, 各点位移分别为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 则各点上所需加的外力 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 分别为

$$\begin{aligned}
 f_1 &= k_{11}x_1 + k_{12}x_2 + \cdots + k_{1n}x_n \\
 f_2 &= k_{21}x_1 + k_{22}x_2 + \cdots + k_{2n}x_n
 \end{aligned}$$

$$f_n = k_{n1}x_1 + k_{n2}x_2 + \cdots + k_{nn}x_n \quad (1-3-5)$$

写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (1-3-6)$$

或

$$f = Kx \quad (1-3-7)$$

其中

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix} \quad (1-3-8)$$

称为刚度矩阵,方程 $f = Kx$ 称为力方程。

1.3.5 刚度矩阵与柔度矩阵的关系

已知位移方程

$$x = Df$$

力方程

$$f = Kx$$

将力方程前乘 K^{-1} , 则有

$$K^{-1}Kx = K^{-1}f$$

即

$$x = K^{-1}f \quad (1-3-9)$$

对比位移方程有

$$D = K^{-1} \quad (1-3-10)$$

同样可以证明

$$K = D^{-1} \quad (1-3-11)$$

这说明柔度矩阵和刚度矩阵是互逆的。

对于弹性系统来说,一般总能找到它的刚度矩阵,但不一定能找到它的柔度矩阵。例如系统为半正定系统时,也就是说系统的自由度中包括刚体运动时,就无法找到柔度矩阵。因为此时 n 个坐标之中,只有 $n-1$ 个是独立的,系统的刚度阵是奇异的(行列式等于零),因而不存在逆矩阵。

如图 1-3 所示系统,其刚度矩阵为

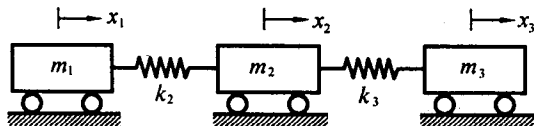


图 1-3

$$K = \begin{pmatrix} k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix} \quad (1-3-12)$$

K 的行列式为

$$|K| = \begin{vmatrix} k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (1-3-13)$$

则 K 为奇异矩阵, 无逆。事实上这个系统存在着一个刚体运动, 弹簧无变形, 系统为半正定系统。

1.3.6 互等定理

互等定理规定, 在一个线性系统里 $d_{ij} = d_{ji}$ 。为了证明这个定理, 考虑力 f_i 、 f_j 所做的功, 其加载次序是先 i 后 j , 然后反之。只要承认所做的功与加载顺序无关, 互等就成立。如图 1-4 所示, 首先考虑 f_i 作用在 i 点处, 而后 f_j 作用在 j 点处。当 f_i 单独作用时, i 点的位移是 $f_i d_{ii}$, f_i 的功为 $\frac{1}{2} f_i^2 d_{ii}$; 而当 f_j 作用在 j 点时, f_j 引起的 i 点的附加位移为 $f_j d_{ji}$, f_i 相应做的功为 $f_i (f_j d_{ji})$, f_j 的功为 $\frac{1}{2} f_j^2 d_{jj}$ 。因此总功为

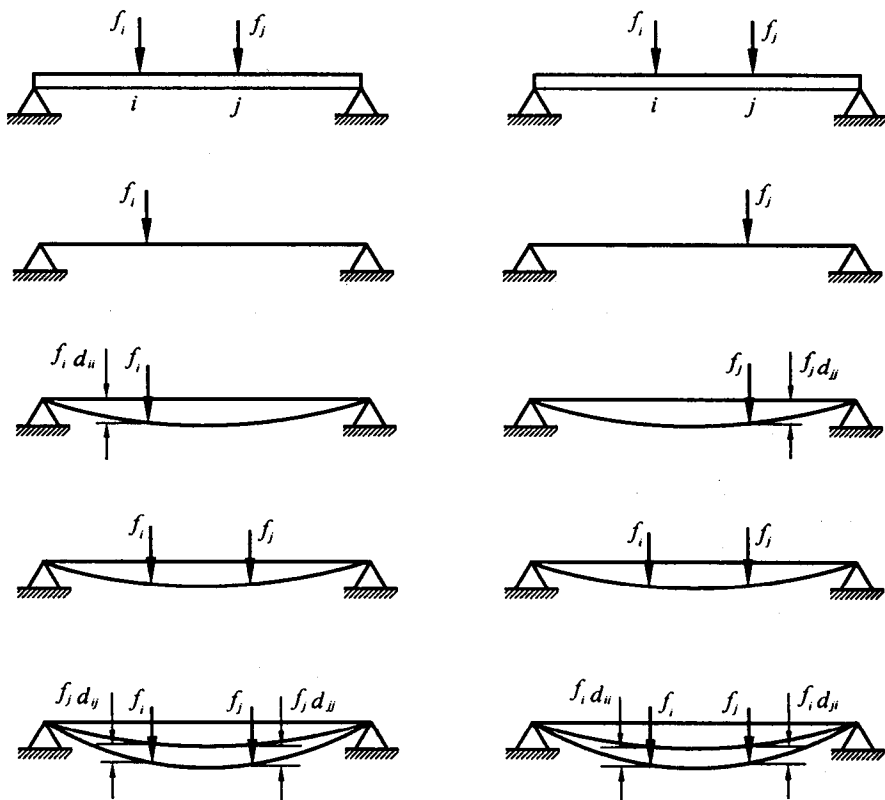


图 1-4

$$W = \frac{1}{2}f_i^2 d_{ii} + \frac{1}{2}f_j^2 d_{jj} + f_i f_j d_{ij} \quad (1-3-14)$$

现在再设 f_j 先作用于 j 点上, 而后 f_i 作用在 i 点上。可以证明 f_j, f_i 所做的总功为

$$W = \frac{1}{2}f_i^2 d_{ii} + \frac{1}{2}f_j^2 d_{jj} + f_i f_j d_{ji} \quad (1-3-15)$$

因为系统最后状态是一样的, 所以这两种加载方式所做的功是完全相等的。比较 W 的表达式, 可以得出

$$d_{ij} = d_{ji} \quad (1-3-16)$$

上式对所有的线性系统都是成立的。当力 f 广义化而表示一个力或一个力矩时, 影响系数 d_{ij} 相应地表示一个直线位移或角位移。

1.3.7 质量矩阵

根据达朗伯原理, 只要在系统中加上惯性力, 动力学问题就可转化为静力学问题处理。也就是说, 在系统中的各个质量上加上惯性力, 就可以按平衡问题处理。特别是当系统进行自由振动时, 作用在各质量上的外加力就只有各个惯性力, 即

$$f_i = -m_i \ddot{x}_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1-3-17)$$

式中 m_i 可以是质量, 也可以是转动惯量。当系统进行运动时

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\omega_n^2 \mathbf{x} \quad (1-3-18)$$

故有

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_n \end{pmatrix} = \omega_n^2 \begin{pmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (1-3-19)$$

或

$$\mathbf{f} = -\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} = \omega_n^2 \mathbf{M} \mathbf{x} \quad (1-3-20)$$

式中 $\mathbf{M}$ 称为质量矩阵, 对于集中参数系统, 其质量矩阵一般都为对角阵。当然有时也有非对角阵的情况, 即动力耦合的情况。

1.3.8 运动方程

当考虑由惯性力引起的变形时, 就可以得到系统的运动方程。

惯性力为

$$\mathbf{f} = -\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}$$

力方程为

$$\mathbf{f} = \mathbf{K} \mathbf{x}$$

因此有

$$\mathbf{K} \mathbf{x} = -\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}$$

即

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (1-3-21)$$

这样就从质量矩阵和刚度矩阵直接得到系统的运动微分方程。由位移方程 $\mathbf{x} = \mathbf{D} \mathbf{f}$ 有

$$f = D^{-1}x$$

又因为

$$f = -M\ddot{x}$$

则

$$D^{-1}x = -M\ddot{x} \quad (1-3-22)$$

或

$$x = -DM\ddot{x} \quad (1-3-23)$$

或

$$DM\ddot{x} + x = 0 \quad (1-3-24)$$

这样就由柔度矩阵和质量矩阵得出了系统的运动微分方程。上述方程与用质量矩阵和刚度矩阵得出的方程是完全等价的。因为 $K = D^{-1}$, 用 K 前乘方程(1-3-24)得

$$KDM\ddot{x} + Kx = 0$$

又因为 $KD = I$, 则有

$$IM\ddot{x} + Kx = 0$$

即

$$M\ddot{x} + Kx = 0$$

例 1-1 如图 1-5 所示系统, 用刚度影响系数法建立系统的动力学方程, 已知 $k_1 = k, k_2 = 2k, k_3 = 3k; m_1 = m, m_2 = 2m, m_3 = 3m$ 。

解 设 $x_1 = 1, x_2 = x_3 = 0$, 各质量的受力如图 1-6 所示。

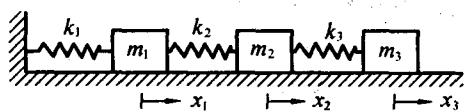


图 1-5

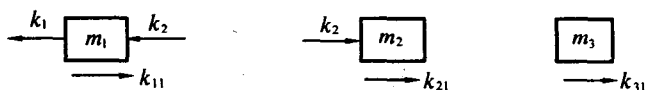


图 1-6

由各质量的平衡方程可得

$$k_{11} = k_1 + k_2 = k + 2k = 3k$$

$$k_{21} = -k_2 = -2k$$

$$k_{31} = 0$$

设 $x_1 = x_3 = 0, x_2 = 1$, 各质量的受力如图 1-7 所示。

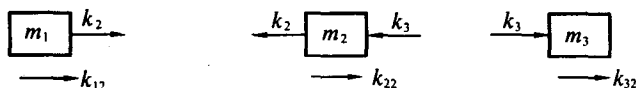


图 1-7

由各质量的平衡方程可得

$$\begin{aligned}k_{12} &= -k_2 = -2k \\k_{22} &= k_2 + k_3 = 2k + 3k = 5k \\k_{32} &= -k_3 = -3k\end{aligned}$$

设 $x_1 = x_2 = 0, x_3 = 1$, 各质量的受力如图 1-8 所示。

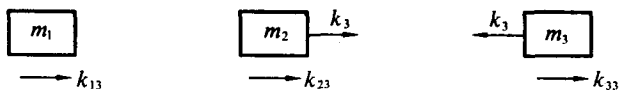


图 1-8

由各质量的平衡方程可得

$$\begin{aligned}k_{13} &= 0 \\k_{23} &= -k_3 = -3k \\k_{33} &= k_3 = 3k\end{aligned}$$

由此得到系统的刚度阵为

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3k & -2k & 0 \\ -2k & 5k & -3k \\ 0 & -3k & 3k \end{pmatrix}$$

系统的质量阵为

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & 3m \end{pmatrix}$$

系统的动力学方程为

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

或

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & 3m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3k & -2k & 0 \\ -2k & 5k & -3k \\ 0 & -3k & 3k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

事实上由计算可以看出刚度阵 $\mathbf{K}$ 是对称的, 只需计算出上三角或下角阵的元素即可。

一般用影响系数法建立链式系统的质量矩阵和刚度矩阵很简单。如图 1-9 所示系统, $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{K}$ 分别为

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_n \end{pmatrix} \quad (1-3-25)$$

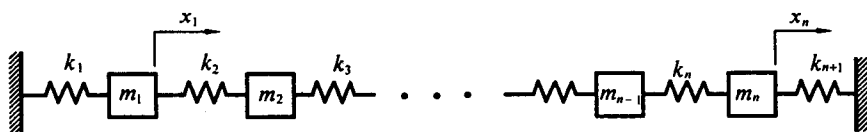


图 1-9

$$K = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_{n-1} & k_{n-1} + k_n & -k_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -k_n & k_n + k_{n+1} \end{pmatrix}$$

(1-3-26)

质量阵是对角阵,刚度阵是三对角线的带状阵。如果系统左端无约束,则 $k_1 = 0$; 右端无约束,则 $k_{n+1} = 0$ 。

例 1-2 试用刚度影响系数建立图 1-10 所示系统的动力学方程。已知 $k_1 = k_2 = \cdots = k_6 = k, m_1 = m_3 = 2m, m_2 = m_4 = m$ 。

解 令 $x_1 = 1, x_2 = x_3 = x_4 = 0$, 则

$$k_{11} = k_1 + k_2 + k_4 + k_6 = 4k$$

$$k_{21} = -k_2 = -k = k_{12}$$

$$k_{31} = -k_6 = -k = k_{13}$$

$$k_{41} = -k_4 = -k = k_{14}$$

令 $x_2 = 1, x_1 = x_3 = x_4 = 0$, 则

$$k_{22} = k_2 + k_3 = 2k$$

$$k_{32} = -k_3 = -k = k_{23}$$

$$k_{42} = 0 = k_{24}$$

令 $x_3 = 1, x_1 = x_2 = x_4 = 0$, 则

$$k_{33} = k_3 + k_6 = 2k$$

$$k_{43} = 0 = k_{34}$$

令 $x_4 = 1, x_1 = x_2 = x_3 = 0$, 则

$$k_{44} = k_4 + k_5 = 2k$$

故系统的刚度阵为

$$K = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 + k_4 + k_6 & -k_2 & -k_6 & -k_4 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ -k_6 & -k_3 & k_3 + k_6 & 0 \\ -k_4 & 0 & 0 & k_4 + k_5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{对} \\ \text{称} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 4k & -k & -k & -k \\ -k & 2k & -k & 0 \\ -k & -k & 2k & 0 \\ -k & 0 & 0 & 2k \end{pmatrix}$$

系统的质量阵为对角阵,即

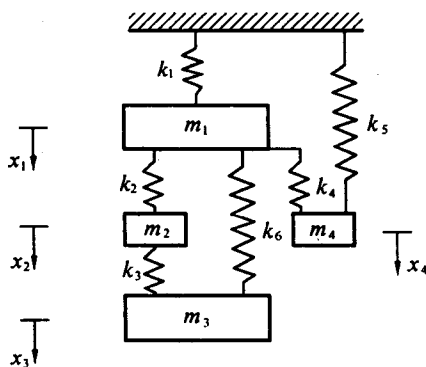


图 1-10

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

系统的动力学方程为

$$M \ddot{x} + Kx = 0$$

由此例题可以总结建立系统刚度阵的规律如下,进而直接写出刚度阵。

(1) 刚度阵(或阻尼阵)中的对角元素 k_{ii} (或 c_{ii}) 为联结在质量 m_i 上的所有弹簧刚度(或阻尼系数)的总和。

(2) 刚度阵中的非对角元素 $k_{ij} = k_{ji}$ 为联结 m_i 和 m_j 的弹簧的刚度的负值,若两者间无弹簧直接联结,则为零。阻尼阵的情况也完全相同。

(3) 刚度阵(或阻尼阵)是对称的,不需计算全部刚度阵的非对角元素,只要计算出上三角或下三角元素即可。

例 1-3 用柔度影响系数建立图

1-11 所示系统的动力学方程。已知 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k$, $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m$ 。

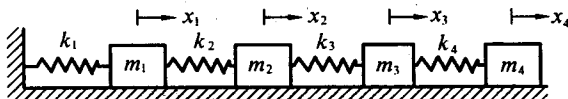


图 1-11

解 令单位力 $F_1 = 1$ 作用在 m_1 上, 其余各质量上无主动力作用。因此弹簧 k_1 将产生变形, 而其余三个弹簧无变形。

$$\delta_1 = \frac{F_1}{k_1} = \frac{1}{k_1} = \frac{1}{k}, \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = 0$$

如图 1-12 所示,各质量的位移分别为

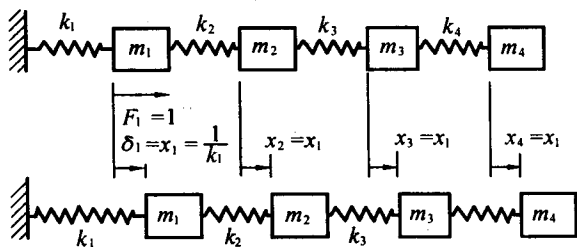


图 1-12

$$d_{11} = x_1 = \delta_1 = \frac{1}{k_1} = \frac{1}{k}$$

$$d_{21} = x_2 = x_1 = \delta_1 = \frac{1}{k_1} = \frac{1}{k}$$

$$d_{31} = x_3 = x_2 = x_1 = \delta_1 = \frac{1}{k_1} = \frac{1}{k}$$

$$d_{41} = x_4 = x_3 = x_2 = x_1 = \delta_1 = \frac{1}{k_1} = \frac{1}{k}$$

令单位力 $F_2 = 1$ 作用于 m_2 上,

其余各质量上无主动力作用,由于弹簧 k_1 的左端受到约束,在 m_2 上加单位力 $F_2 = 1$ 后,弹簧 k_1 和 k_2 均产生变形。

$$\delta_1 = \frac{F_2}{k_1} = \frac{1}{k_1} = \frac{1}{k}$$

$$\delta_2 = \frac{F_2}{k_2} = \frac{1}{k_2} = \frac{1}{k}$$

其余各弹簧无变形, $\delta_3 = \delta_4 = 0$ 。因此各质量的位移如图 1-13 所示,为

$$d_{12} = x_1 = \delta_1 = \frac{F_2}{k_1} = \frac{1}{k_1} = \frac{1}{k}$$

$$d_{22} = x_2 = \delta_1 + \delta_2 = \frac{F_2}{k_1} + \frac{F_2}{k_2} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{2}{k}$$

$$d_{32} = x_3 = x_2 = \delta_1 + \delta_2 = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{2}{k}$$

$$d_{42} = x_4 = x_3 = x_2 = \delta_1 + \delta_2 = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{2}{k}$$

令单位力 $F_3 = 1$ 作用于 m_3 上, 其余各质量上无主动力作用。此时, 弹簧 k_1 、 k_2 、 k_3 均受到单位力的作用, 产生变形

$$\delta_1 = \frac{1}{k_1} = \frac{1}{k}$$

$$\delta_2 = \frac{1}{k_2} = \frac{1}{k}$$

$$\delta_3 = \frac{1}{k_3} = \frac{1}{k}$$

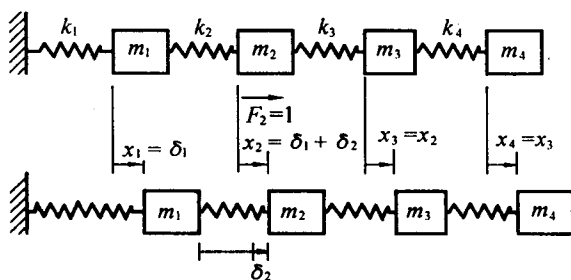


图 1-13

弹簧 k_4 没有变形, $\delta_4 = 0$ 。因此各质量的位移如图 1-14 所示, 为

$$d_{13} = x_1 = \delta_1 = \frac{1}{k_1} = \frac{1}{k}$$

$$d_{23} = x_2 = \delta_1 + \delta_2 = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{2}{k}$$

$$d_{33} = x_3 = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{3}{k}$$

$$d_{43} = x_4 = x_3 = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{3}{k}$$

令单位力 $F_4 = 1$ 作用于 m_4 上, 其余各质量上无主动力作用, 此时 4 个弹簧均受到单位力的作用, 产生变形

$$\delta_1 = \frac{1}{k_1} = \frac{1}{k}$$

$$\delta_2 = \frac{1}{k_2} = \frac{1}{k}$$

$$\delta_3 = \frac{1}{k_3} = \frac{1}{k}$$

$$\delta_4 = \frac{1}{k_4} = \frac{1}{k}$$

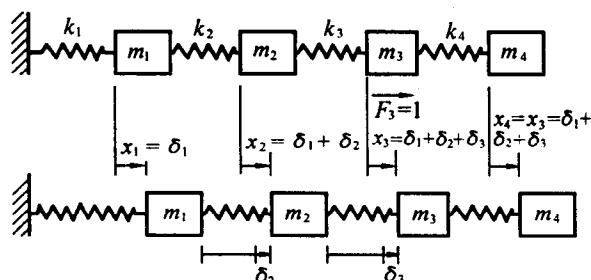


图 1-14

各质量的位移如图 1-15 所示, 为

$$d_{14} = x_1 = \delta_1 = \frac{1}{k_1} = \frac{1}{k}$$

$$d_{24} = x_2 = \delta_1 + \delta_2 = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{2}{k}$$