

长春市教育局教育教学研究室组编



全程绿色学习

系列丛书

教师用书

(与学生用书配套使用)

高二数学(下册)



吉林出版社

全程绿色学习

权威性

实用性

操作性

系列丛书

高二数学 (下册)

教师用书

(与学生用书配套使用)

长春市教育局教育教学研究室 组编

名题举例

题型设计与训练

华龄出版社

责任编辑 苏 辉
封面设计 倪 霞

图书在版编目 (CIP) 数据

全程绿色学习系列丛书·高二数学·下册/长春市教育局教育教学研究室组编.
—北京:华龄出版社,2005.12

教师用书

ISBN 7-80178-277-1

I. 全… II. 长… III. 数学课—高中—教学参考资料 IV. G633

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 151781 号

书 名: 全程绿色学习系列丛书·高二数学 (下册) 教师用书

作 者: 长春市教育局教育教学研究室组编

出版发行: 华龄出版社

印 刷: 遵化市印刷有限公司

版 次: 2005 年 12 月第 1 版 2005 年 12 月第 1 次印刷

开 本: 850×1168 1/16 印 张: 4.75

印 数: 1~3000 册

全套定价: 50.00 元 (共 9 册)

地 址: 北京西城区鼓楼西大街 41 号

邮 编: 100009

电 话: 84044445 (发行部)

传 真: 84039173

“高二数学(下册)教师用书”读者反馈表

您只要如实填写以下几项并寄给我们,将有可能成为最幸运的读者,丰厚的礼品等着您拿,数量有限(每学期50名)一定要快呀!

您最希望得到的**礼品** **100元以下** (请您自行填写)



A _____



B _____



C _____

您的个人资料



(请您务必填写详细,否则礼品无法送到您的手中)

姓名:	学校:	联系电话:
邮编:	通讯地址:	
职业:	教师 ☐	学生 ☐ 教研员 ☐
请在右栏列举3本您喜爱的教辅		
您发现的本书错误:		
您对本书的意见或建议:		

信寄: 吉林省长春市亚泰大街3658号 长春市教育教学服务中心
邮编: 130022 联系电话: 0431—8633939

前言

由北京大视野教科文化发展有限公司策划，长春市教育局教育教学研究室组织编写的《全程绿色学习系列丛书》和大家见面了。它作为师生的良师益友，将伴随师生度过高中宝贵的学习时光。

本丛书以人教社最新修订的高中教科书为蓝本，以展新《考试大纲》、《新课程教学大纲》和《新课程课程标准》为依据，集国内最先进的教学观念，精选近五年全国高考试题、近三年各省市的优秀模拟试题，并根据高考最新动向，精心创作了40%左右的原创题，使每道试题都伴现出了对高考趋势的科学预测。本丛书采用“一拖一”的编写模式，即一本教师用书，一本学生用书（学生用书包括同步训练和单元同步测试），两本书互为补充。学生用书“同步训练”的编写伴例为“名题举例”和“题型设计与训练”两部分，题型设计与训练部分编写适量的基础题及综合性、多元性的试题，意在培养学生的学科思想与悟性，使其对每个知识点的复习落到实处，从而达到“实战演练，能力提升”的目的，并单独装订成册，可作为学生课堂练习本，也可作为学生课后作业本，便于师生灵活使用；学生用书“单元同步测试”是对本单元教与学的总结和验收，既可供教师作考试之用，又可供学生作自我检测之用。教师用书既是教师教学的教案，又是学生学习的学案。教师用书对学生用书“名题举例”和“题型设计与训练”中的每道题进行了全析全解，并给出了“规范解答”，采用“网上机读解答”方式，使学生每做一道题，都是进行高考“实弹演习”。这是本套丛书的一大亮点，在全国教精用书上也是首次使用这种解答方式。它将有助于学生大幅度提高学习成绩。

《全程绿色学习系列丛书·高二数学（下册）教师用书》由长春市教育局教育教学研究室特级教师祝承亮任主编，东北师范大学附属中学李晓松任副主编。第九章直线、平面、简单几何体由长春艺术实验中学刘伯昌编写，第十章排列、组合和二项式定理由长春市第二中学苏静编写，第十一章概年由长春市实验中学吴普林编写。全书由长春市教育局教育教学研究室特级教师祝承亮统稿、审定。

长春市教育局教育教学研究室

2005年12月

编委会

主 编 陆建中

副主编 白智才 逯成文 刁丽英

编 委 (按姓氏笔画为序)

刁丽英 王 梅 王笑梅

白智才 孙中文 刘玉琦

许 丽 陆建中 陈 薇

张甲文 吴学荣 尚玉环

赵大川 祝承亮 逯成文

目 录

同步测试 1 摸底试卷	(1)
第九章 直线、平面、简单几何体	
同步训练 1 (9.3) 直线与平面平行的判定和性质(1)	(3)
同步训练 2 (9.3) 直线与平面平行的判定和性质(2)	(4)
同步训练 3 (9.4) 直线与平面垂直的判定与性质(1)	(6)
同步训练 4 (9.4) 直线与平面垂直的判定与性质(2)	(7)
同步训练 5 (9.4) 直线与平面所成的角	(8)
同步训练 6 (9.4) 三垂线定理	(10)
同步测试 2 直线与平面	(11)
同步训练 7 (9.5) 两个平面平行的判定和性质(1)	(14)
同步训练 8 (9.5) 两个平面平行的判定和性质(2)	(15)
同步训练 9 (9.6) 二面角	(17)
同步训练 10 (9.6) 两个平面垂直的判定和性质(1)	(20)
同步训练 11 (9.6) 两个平面垂直的判定和性质(2)	(22)
同步测试 3 平面与平面	(24)
同步测试 4 空间直线和平面	(28)
同步训练 12 (9.7) 棱柱	(29)
同步训练 13 (9.8) 棱锥	(31)
同步训练 14 (9.9) 多面体和正多面体	(33)
同步训练 15 (9.10) 球	(34)
同步测试 5 简单几何体	(36)
同步测试 6 第九章单元测试	(38)
同步测试 7 期中测试卷	(41)
第十章 排列、组合、二项式定理	
同步训练 16 (10.1) 分类计数原理与分步计数原理	(44)
同步训练 17 (10.2) 排列	(45)
同步训练 18 (10.3) 组合	(46)
同步训练 19 (10.4) 二项式定理(一)	(48)
同步训练 20 (10.5) 二项式定理(二)	(49)
同步测试 8 排列、组合、二项式定理	(50)
同步测试 9 第十章单元测试	(52)
第十一章 概 率	
同步训练 21 (11.1) 随机事件的概率	(54)
同步训练 22 (11.1) 等可能事件概率	(56)
同步训练 23 (11.2) 互斥事件有一个发生的概率	(58)
同步训练 24 (11.3) 相互独立事件同时发生的概率	(60)
同步训练 25 (11.3) 独立重复试验	(63)
同步测试 10 第十一章单元测试	(65)
同步测试 11 高二下学期期末测试	(66)

同步测试 1 摸底试卷

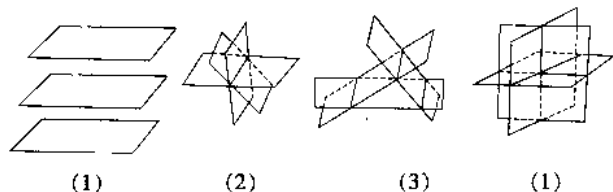
一、选择题(每小题 5 分,共 60 分)

1. [解析] 看不见的线要画成虚线, 本题主要考查画图、看图能力. 建立空间立体感, 易知(2)(3)(4)满足条件, 故应选 D.

[参考答案] D.

2. [解析] 空间三个平面可把空间分成的部分数分别为 4, 6, 7, 8, 如图所示, 部分数最多是 8 部分.

[参考答案] D.



(1)

(2)

(3)

(4)

3. [解析] 如图所示, 在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中, AB 与 $B'C'$ 异面, AA' 与 $B'C'$ 异面, 但 AB 与 AA' 共面, 命题(1)不对. AB 与 BB' 相交, $A'B'$ 与 BB' 相交, 但 AB 与 $A'B'$ 不相交, 命题(2)不对. AB 与 BB' 共面, AB 与 AD 共面, 但 AD 与 BB' 不共面, 命题(3)不对. 选 D.

[参考答案] D.

4. [解析] 分别在两相交平面内的两条直线可能相交, 可能平行, 也可能异面, 故应选 D.

[参考答案] D.

5. [解析] 若 a 与 b 平行, 则与 c, d 是异面直线相矛盾; 若 a 与 b 异面, 则由 a, b, c, d 可确定四个平面, 不满足条件, 所以 a 与 b 相交, 且交点在 c (或 d) 上, 恰可确定三个平面, 故应选 A.

[参考答案] A.

6. [解析] 如图, 连结 A_1C_1 , 则 $A_1C_1 \parallel AC$, 所以 $\angle A_1C_1B$ 即为异面直线 BC_1 与 AC 所成的角, 连结 A_1B , 则 $\triangle A_1BC_1$ 为等边三角形, 所以 $\angle A_1C_1B = 60^\circ$, 故应选 B.

[参考答案] B.

7. [解析] $\because EF \cap GH = O$,

$\therefore O \in EF$ 且 $O \in GH$.

又 $\because EF \subset \text{平面 } ABC, GH \subset \text{平面 } ADC$,

$\therefore O \in \text{平面 } ABC, O \in \text{平面 } ADC$,

又 $\text{平面 } ABC \cap \text{平面 } ADC = AC$,

$\therefore O \in AC$.

[参考答案] A.

8. [解析] 如图所示, 在 l 上任取一点 P , 则 $\angle APB$ 的两边与 $\angle AOB$ 的两边分别垂直, 但 $\angle AFB$ 大小不确定, 故应选 D.

[参考答案] D.

9. [解析] 易知 A, C 两图中四点共面, 对于 B 可取一棱中点即可, D 中直线 PS 与 QR 是异面直线.

[参考答案] D.

10. [解析] 取 AB 中点 E, CD 中点 F , 连结 EF , 则 EF 为异面直线 AB 和 CD 的公垂线, 连 AF, BF , 则 $AF = BF = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, 又 $AE = EB = \frac{1}{2}a$,

所以 $EF = \sqrt{AF^2 - AE^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

[参考答案] B.

11. [解析] 将平面的展开图还原成正方体如图所示:

AB 与 CD 异面,

AB 与 GH 异面,

EF 与 GH 异面,

共 3 对, 应选 C.

[参考答案] C.

12. [解析] 用一个平面截一正方体, 当平面与正方体六个面均有交线时所截得多边形边数最多, 最多为六边形.

[参考答案] C.

二、填空题(每小题 4 分,共 16 分)

13. [解析] 把异面直线平移成共面直线, 夹角不变, 考虑两个角平分线, 共有 3 条.

[参考答案] 3.

14. [解析] 连结 B_1C , 则 $MN \parallel B_1C$, $\angle AOC$ 即为异面直线 AO 和 MN 所成的角, $\because \triangle AB_1C$ 为等边三角形, $\therefore AO \perp B_1C$, 即 $\angle AOC = 90^\circ$.

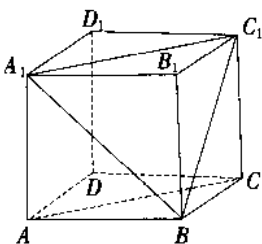
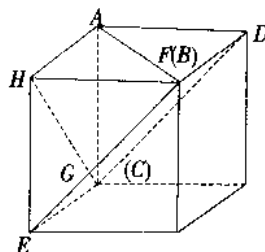
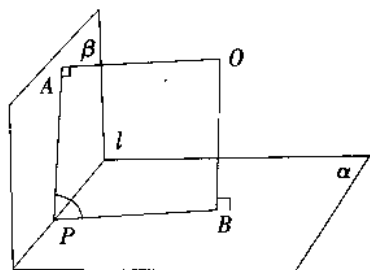
[参考答案] 90° .

15. [解析] 已知 $AC + BD = a, AC \cdot BD = b$, 则 $\frac{AC}{2} + \frac{BD}{2} = \frac{a}{2}$, $\frac{AC}{2} \cdot \frac{BD}{2} = \frac{b}{4}$. $\therefore EF + EH = \frac{a}{2}$ (中位线), $EF \cdot EH = \frac{b}{4}$, $\therefore EF^2 + EH^2 = (EF + EH)^2 - 2EF \cdot EH = \frac{a^2}{4} - \frac{b}{2}$.

[参考答案] $\frac{a^2}{4} - \frac{b}{2}$.

16. [解析] 到两平行线 m 与 n 距离相等的所有点均在一个平面 β 内, 且 $m \parallel \beta, n \parallel \beta$, 且 m, n 到平面 β 距离相等, 若平面 α 与平面 β 相交, 则(1)正确; 若 α 与 β 重合, 则(2)正确; 若 α 与 β 平行, 则(4)正确.

[参考答案] (1)(2)(4)



三、解答题(17~21 题每题 12 分,22 题 14 分)

17. [解析] 画法如右: 连结 Q, R 并延长, 分别与 $C_1 B_1, C_1 D_1$ 延长线交于 E, F 两点; 连结 EP 交 BB_1 于 M 点, 连结 FP 交 DD_1 于 N 点; 再连结计算如下:

RM, QN , 则五边形 $PMRQN$ 为过三点 P, Q, R 的截面. 由 Q, R 是中点知 $\triangle QRA_1 \cong \triangle ERB_1$,

$$\therefore B_1 E = QA_1 = \frac{1}{2}a.$$

由 $\triangle EB_1 M \sim \triangle EC_1 P$, 知 $EM : EP = B_1 M : C_1 P = 1 :$

$$3, MP = \frac{2}{3} EP = \frac{2}{3} \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + \left(\frac{3}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{3}a.$$

同理 $FN = PM = \frac{\sqrt{10}}{3}a$, 易求 $RM = QN = \frac{\sqrt{13}}{6}a, QR =$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

$$\therefore \text{五边形 } PMRQN \text{ 周长为 } \frac{1}{6}(4\sqrt{10} + 2\sqrt{13} + 3\sqrt{2})a.$$

18. [解析] 边结 AD' , 则 $\angle D'AB'$ 即为异面直线 AB' 与 BC' 所成的角, 设 $AB = a, BC = b, AA' = c$,

$$\text{则 } \sin \alpha = \frac{BB'}{AB'} = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \sin \beta = \frac{CC'}{BC'} = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

$$\begin{aligned} \cos \angle D'AB' &= \frac{(AD')^2 + (AB')^2 - (B'D')^2}{2AD' \cdot AB'} \\ &= \frac{b^2 + c^2 + a^2 + c^2 - (a^2 - b^2)}{2\sqrt{b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a^2 + c^2}} \\ &= \frac{c^2}{\sqrt{b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a^2 + c^2}} = \sin \alpha \cdot \sin \beta \end{aligned}$$

19. [解析] 取 AC 的中点 M , 连结 ME, MF , 则 $ME \parallel BC$, $MF \parallel AD$, $\therefore \angle EMF$ (或其补角) 是直线 AD 与 BC 所成的角.

$$\text{在 } \triangle EMF \text{ 中, } ME = \frac{1}{2}BC = a,$$

$$MF = \frac{1}{2}AD = a, EF = \sqrt{3}a,$$

$$\therefore \cos \angle EMF = \frac{a^2 + a^2 - 3a^2}{2a^2} = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle EMF = 120^\circ.$$

$$\therefore AD, BC \text{ 所成的角为 } 60^\circ.$$

20. [解析] (1) 线段 AD 是 SA 和 CD 的公垂线段, $AD = \sqrt{3}a$; (2) 线段 AB 是 SB 和 AD 的公垂线段, $AB = \frac{a}{2}$.

21. [解析] (1) 连 BC_1 和 BA_1 , 则 $\angle C_1 B A_1$ 为 BO_1 和 AD_1 所成角, $\angle C_1 B A_1 = \frac{1}{2} \angle A$; $BC_1 = 30^\circ$, 因此 BO_1 和 AD_1 所成角为 30° . (2) $O_1 C_1$ 是 BO_1 和 CC_1 的公垂线段, $O_1 C_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

22. [解析] 求异面直线所成角的关键是作出角, 转化为可解三角形的内角.

方法 1: 平移法.

连接 BD 交于 AC 于 E , 取 DD' 的中点 F , 连接 EF , 则 EF

$$\parallel \frac{1}{2} D'B$$

$\angle FEA$ 是 $D'B$ 和 AC 所成的角.

$$\therefore AE = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2},$$

$$\therefore EF = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}, AF = \frac{\sqrt{4b^2 + c^2}}{2},$$

$\therefore \triangle FEA$ 中,

$$\begin{aligned} \cos \angle FEA &= \frac{EF^2 + AE^2 - AF^2}{2EF \cdot AE} \\ &= \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2 + c^2)}} \end{aligned}$$

方法 2: 补形法.

在长方体的一旁, 补一个全等的长方体.

则 $BE \parallel AC$, $\angle D'BE$ (或其补角) 是 $D'B$ 和 AC 所成的角.

$$\therefore D'B = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2},$$

$$BE = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$D'E = \sqrt{4a^2 + c^2},$$

$$\therefore \text{在 } \triangle D'BE \text{ 中, } \cos \angle D'BE = \frac{D'E^2 + BE^2 - D'B^2}{2D'B \cdot BE}$$

$$= \frac{-a^2 + b^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 + c^2)}} < 0,$$

故 $D'B$ 与 AC 所成角的余弦值为

$$\frac{a^2 - b^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 + c^2)}} < 0.$$

方法 3: 向量法.

以 D 为原点, DA, DC, DD' 分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立空间直角坐标系, 则

$$A(b, 0, 0), B(b, a, 0), C(0, a, 0), D'(0, 0, c),$$

$$\therefore \vec{AC} = (-b, a, 0), \vec{BD'} = (-b, -a, c)$$

设 $D'B$ 与 AC 所成角为 α , 则

$$\cos \alpha = \cos \langle \vec{AC}, \vec{BD'} \rangle = \left| \frac{\vec{AC} \cdot \vec{BD'}}{|\vec{AC}| \cdot |\vec{BD'}|} \right|$$

$$= \left| \frac{b^2 - a^2}{\sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2 + c^2)}} \right|$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2 + c^2)}}$$

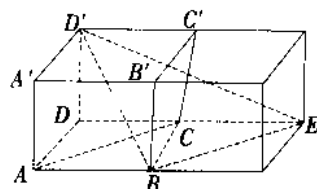
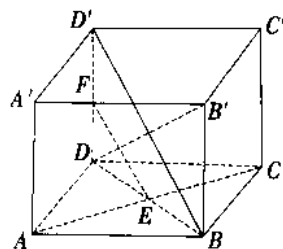
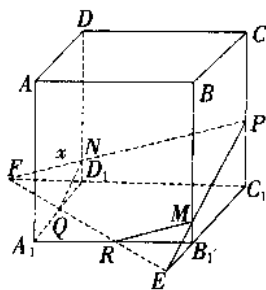
[方法提炼] 求异面直线所成的角的一般步骤:

① 构造: 根据异面直线定义, 一般是平移法作异面直线所成的角, 把立体几何问题转化为平面几何问题.

② 认定: 证明作出的角就是要求的角.

③ 计算: 求角值, 常利用三角形.

注: 向量法应熟练掌握, 注意区别开两异面直线所成角的范围是 $(0, \frac{\pi}{2}]$, 两向量夹角的范围是 $[0, \pi]$.



第九章 直线、平面、简单几何体

同步训练 1 (9.3) 直线与平面平行的判定和性质(1)

名题举例

〔例 1〕

〔规范解答〕

(1) 证法一: 连结 AF 并延长交 BC 于点 M , 连结 B_1M

则 $\triangle AFD \sim \triangle MFB$, $AF:FM = FD:FB$, 又 $AB_1 = BD$, $B_1E = BF$, 故

$$FD:FB = AE:EB_1,$$

$$\therefore AF:FM = AE:EB_1, \text{ 故 } EF \parallel B_1M.$$

又 $B_1M \subset \text{平面 } BC_1$, $EF \not\subset \text{平面 } BC_1$,

$$\therefore EF \parallel \text{平面 } BC_1.$$

证法二 作 $FF_1 \parallel CD$ 交 BC 于 F_1 , 作 $EE_1 \parallel AB$ 交 BB_1 于 E_1 , 连结 E_1F_1 , $\because FF_1:DC = BF:BD$, $EE_1:AB = B_1E:B_1A$, 又 $AB = CD$, $BD = B_1A$, $BF = B_1E$,

$$\therefore FF_1 \parallel EE_1, \text{ 又由平行公理易知 } FF_1 \parallel EE_1,$$

$\therefore EE_1F_1F$ 是平行四边形, $EF \parallel E_1F_1$, 又 $E_1F_1 \subset \text{平面 } BC_1$, $EF \not\subset \text{平面 } BC_1$, 故 $EF \parallel \text{平面 } BC_1$.

$$(2) \because B_1E = \frac{\sqrt{2}}{3}a, \therefore B_1E_1 = B_1E \cdot \cos 45^\circ = \frac{a}{3}, BE_1 = \frac{2}{3}a, \because BF_1 = BF \cos 45^\circ = \frac{1}{3}a, \therefore EF = E_1F_1 = \sqrt{BE_1^2 + BF_1^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}a.$$

〔解后反思〕证线面平行的常用方法是应用线面平行的判定定理, 即设法在平面 BC_1 内找一条直线 (B_1M 或 E_1F_1) 与已知直线 EF 平行, 另外, 利用面面平行也是一种方法, 即过 EF 构造一个平面平行于平面 BC_1 .

〔例 2〕

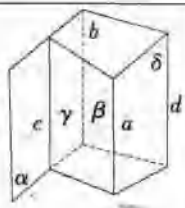
〔思路点拨〕充分地运用直线与平面平行的判定和性质是解决本题的关键.

〔规范解答〕

已知: $\alpha \cap \beta = b, a \parallel \alpha, \beta \parallel a$.

求证: $a \parallel b$.

证明: 过 a 作平面 $\gamma \cap \alpha = c$, 由 $a \parallel \alpha$ 得 $a \parallel c$, 同理过 a 作平面 $\delta \cap \beta = d$, 则 $a \parallel d$, 于是 $c \parallel d$. 又 $c \subset \beta, d \subset \beta, \therefore c \parallel \beta$, 又 $\alpha \cap \beta = b, c \subset \alpha, \therefore c \parallel b$. 又 $a \parallel c, \therefore a \parallel b$.



〔例 3〕

〔规范解答〕

解: (1) $\because EH \parallel FG, \therefore EH \parallel \text{平面 } BCD$,

又 $EH \subset \text{平面 } ACD$, 平面 $ACD \cap \text{平面 } BCD = CD$,

$$\therefore EH \parallel CD, \therefore CD \parallel \text{平面 } EFGH.$$

(2) $\because EH \parallel CD, EF \parallel AB$,

$\therefore \angle FEH$ 就是 AB 与 CD 所成的角.

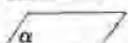
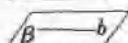
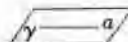
由已知 $\angle FEH = 90^\circ$,

$\therefore AB$ 与 CD 所成的角为 90° .

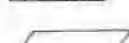
题型设计与训练

一、选择题

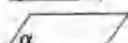
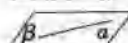
1. 〔解析〕如下图甲、乙、丙所示.



甲



乙



丙

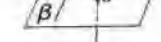
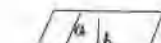
平行、相交、异面均有可能, 故应选 D.

〔参考答案〕D.

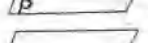
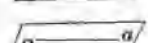
2. 〔解析〕如下图甲、乙、丙所示.



甲



乙



丙

$b \subset \alpha, b \cap \alpha = A, b \parallel \alpha$ 均有可能, 故应选 D.

〔参考答案〕D.

3. 〔解析〕若 $a \parallel \alpha, b \parallel \alpha$, 则 a 与 b 平行、相交、异面均有可能, 故①错.

若 $a \parallel b, a \parallel \alpha$, 则 $b \parallel \alpha$ 或 $b \subset \alpha$, 故②错.

若 $a \parallel \alpha$, 则 a 平行于 α 内过 a 的平面与 α 的交线, 故③错.

若 a 平行于 α 内无数条直线, 则 $a \parallel \alpha$ 或 $a \subset \alpha$, 故④错.

〔参考答案〕A.

4. 〔解析〕根据线面平行及判定定理可得 $a \parallel l$.

〔参考答案〕B.

5. 〔解析〕A 错误, a 可能在 α 内; B 错误, a 可能与 α 相

交;C 错误, a 可能在 α 内;D 正确.

〔参考答案〕D.

6.〔解析〕根据线面平行的判定与性质及定义可知:

(1) 正确 (2) 错误 (3) 正确 (4) 错误

〔参考答案〕(1)(3)

二、填空题

7.〔参考答案〕无数, 1, 1

8.〔参考答案〕 $b \parallel \alpha$ 或 $b \subset \alpha, b \parallel \alpha$ 或 $b \cap \alpha = B$, 平行、相交或 b 在 α 内

9.〔参考答案〕1 个或 0 个

10.〔参考答案〕平行

三、解答题

11.〔解析〕连结 $DF, CE, \because AO \parallel CD, AO \parallel EF, \therefore OM : MD = AO : CD = AO : EF = ON : NF, \therefore MN \parallel$

DF , 同理 $MN \parallel CE$.

又 $MN \not\subset$ 平面 $ADF, MN \not\subset$ 平面 BCE ,

$\therefore MN \parallel$ 平面 $ADF, MN \parallel$ 平面 BCE .

12.〔解析〕证明: 取 A_1D_1, AB 的中点 G, H , 连结 $FG, GH, HE, A_1C_1, AC, FG, EH$ 分别交 B_1D_1, BD 于 O_1, O 在 $\triangle ABC$ 中, EH 为中位线, $\therefore EH \parallel \frac{1}{2}AC$, 且 O 为 EH 中点, 同理可知

$FG \parallel \frac{1}{2}A_1C_1$, 又 $AC \parallel A_1C_1$,

$\therefore EH \parallel FG$, 且 O_1 为 FG 中.

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 为平行四边形.

连结 OO_1 , 则 $OO_1 \parallel EF$. 而 $OO_1 \subset$ 平面 BDD_1B_1 ,

$\therefore EF \parallel$ 平面 BDD_1B_1 .

同步训练 2 (9.3) 直线与平面平行的判定和性质(2)

名题举例

〔例 1〕

〔思路点拨〕利用中位线的性质寻求线与线平行, 然后转化成线面平行, 在立几的证明中要充分利用这种“转化”的思想.

〔规范解答〕

如答图所示, 连结 AC , 交 BD 于点 O , 连结 OM .

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

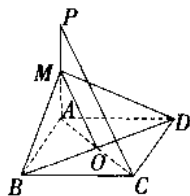
$\therefore OA = OC$.

$\because OM$ 为 $\triangle APC$ 的中位线,

$\therefore OM \parallel PC$.

$\because OM \subset$ 平面 $MBD, PC \not\subset$ 平面 MBD ,

$\therefore PC \parallel$ 平面 MBD .



〔例 2〕

〔思路点拨〕首先利用三角形中位线性质证明出线线平行, 然后利用线面平行的判定定理来证明.

〔规范解答〕

连结 AC 与 BD , 交于点 O , 连结 PQ .

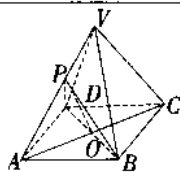
在 $\triangle ACV$ 中,

$\because VP = PA, AO = OC$,

$\therefore OP \parallel VC$.

$\because OP \subset$ 平面 $PBD, VC \not\subset$ 平面 PBD ,

$\therefore VC \parallel$ 平面 PBD .



〔例 3〕

〔思路点拨〕充分利用直线与平面平行的判定定理是解决本题的关键.

〔规范解答〕

证法 1: 如答图, 连结 AM 并延长, 交 CD 于点 G , 连结 GE .

$\because AB \parallel CD$,

$\therefore \frac{AM}{MG} = \frac{BM}{MD}$.

$\therefore \frac{AM}{AM+MG} = \frac{BM}{BM+MD}$.

即 $\frac{AM}{AG} = \frac{BM}{BD}$.

又 $\because BD = AE$, 且 $AN = BM$,

$\therefore \frac{AM}{AG} = \frac{AN}{AE}$.

$\therefore MN \parallel GE$.

$\because EG \subset$ 平面 $CDE, MN \not\subset$ 平面 CDE ,

$\therefore MN \parallel$ 平面 CDE .

证法 2: 如答图, 在平面 $ADEF$ 内作 $NH \parallel DE$, 交 AD 于 H 点, 连结 MH .

$\because NH \parallel DE$,

$\therefore \frac{AH}{HD} = \frac{AN}{NE}$.

又 $\because BD = AE, AN = BM$,

$\therefore NE = MD$.

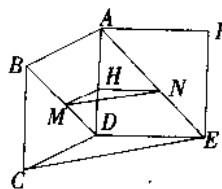
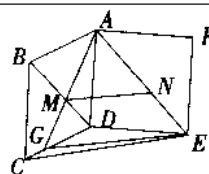
$\therefore \frac{BM}{MD} = \frac{AN}{NE} = \frac{AH}{HD}$.

$\therefore MH \parallel AB$.

又 $\because AB \parallel CD$,

$\therefore HM \parallel CD$.

$\because MH \cap NH = H, CD \cap DE = D$,



且 $MH \subset \text{平面 } MNH, NH \subset \text{平面 } MNH,$
 $CD \subset \text{平面 } CDE, DE \subset \text{平面 } CDE,$
 $\therefore \text{平面 } MNH \parallel \text{平面 } CDE.$
 $\therefore MN \subset \text{平面 } MNH,$
 $\therefore MN \parallel \text{平面 } CDE.$

证法 3: 如答图, 作 $MM_1 \perp CD$, 交 CD 于点 M_1 , 作 $NN_1 \perp DE$, 交 DE 于 N_1 , 连结 M_1N_1 .

$\therefore AD \perp CD, AD \perp DE, CD \cap DE = d,$

$\therefore AD \perp \text{平面 } CDE.$

又 $AD \subset \text{平面 } ABCD, AD \subset \text{平面 } ADEF,$

$\therefore \text{平面 } ABCD \perp \text{平面 } CDE.$

$\therefore MM_1 \perp CD,$

$\therefore MM_1 \perp \text{平面 } CDE.$

同理 $NN_1 \perp DE.$

$\therefore NN_1 \perp \text{平面 } CDE.$

$\therefore MM_1 \parallel NN_1.$

又 $\because BD = AE, BM = AN,$

$\therefore MD = NE.$

$\therefore \text{Rt} \triangle MDM_1 \cong \triangle NEN_1.$

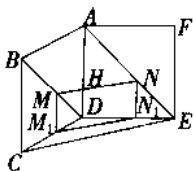
$\therefore MM_1 = NN_1.$

$\therefore \text{四边形 } MM_1N_1N \text{ 为平行四边形.}$

$\therefore MN \parallel M_1N_1.$

$\therefore M_1N_1 \subset \text{平面 } CDE, MN \not\subset \text{平面 } CDE,$

$\therefore MN \parallel \text{平面 } CDE.$



6. [解析] 考查学生空间想象能力; 解此题的角度可以认为两异面直线不动, 面点有三种情况: ①在其中一条异面直线上; ②在两条异面直线内部; ③在过其中一条异面直线且平行于另一条异面直线的平面内.

[参考答案] D.

二、填空题

7. [解析] 考查学生对线面平行判定定理的理解.

[参考答案] $a \parallel \alpha$ 或 $a \subset \alpha$

8. [解析] 考查线面平行的判定定理与性质定理.

$EF \parallel GH$
 $EF \not\subset \text{面 } ACD$
 $GH \subset \text{面 } ACD$
 $\left. \begin{array}{l} EF \parallel GH \\ EF \not\subset \text{面 } ACD \\ GH \subset \text{面 } ACD \end{array} \right\} \Rightarrow EF \parallel \text{面 } ACD$
 $\left. \begin{array}{l} \text{面 } ACD \cap \text{面 } ABC = AC \\ EF \subset \text{面 } ABC \end{array} \right\} \Rightarrow EF \parallel AC$

[参考答案] 平行

9. [解析] 平移两条异面直线 a, b 中的一条 a , 使之与 b 相交于 O , 则由公理三的推论三知, 两条相交直线确定一个平面 α , 再由线面平行的判定定理知 $a \parallel \alpha$.

[参考答案] 1.

10. [解析] 取 AA_1 与 CC_1 中点 E, F , 连 $EBFD_1$ 即为过 D_1B 且平行于 AC 的截面. $S = EF \cdot BD_1 = \sqrt{2}a \cdot \sqrt{3}a = \sqrt{6}a^2.$

[参考答案] $\sqrt{6}a^2$

三、解答题

11. [解析] $\because M$ 为 PC 中点,

$\therefore OM$ 为 $\triangle PAC$ 中位线,

$\therefore PA \parallel OM,$

$OM \subset \text{面 } BMD,$

$\therefore PA \parallel \text{面 } BMD,$

又 $\because \text{面 } PGHA \cap \text{面 } BMD = GH,$

$\therefore PA \parallel GH.$

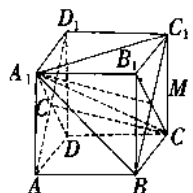
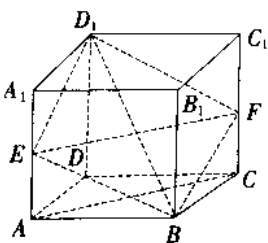
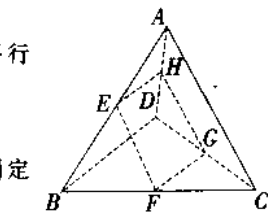
12. [解析] 证明: 如图所示, 连接 B_1C 交 BC_1 于 M 点, 连接 A_1M .

$\therefore A_1B_1 \parallel CD,$

$\therefore A_1M \parallel OC.$

$\therefore OC \not\subset \text{平面 } A_1BC_1, A_1M \subset \text{平面 } A_1BC_1,$

$\therefore OC \parallel \text{平面 } A_1BC_1.$



题型设计与训练

一、选择题

1. [解析] 本题主要考查学生的空间想象能力, 学生容易漏掉一种情况.

[参考答案] D.

2. [解析] 本题考查直线和平面平行判定定理, 与学生的立体感.

[参考答案] A.

3. [解析] A 答案少 l 与 α 相交的情况

C 答案中直线 l 与 α 内直线平行或异面.

D 答案中直线 l 与 α 内直线平行或相交.

[参考答案] B.

4. [参考答案] B.

5. [解析] 很明显, 在 α 内有无数多条直线与 m 平行, 主要考查学生的空间想象能力.

[参考答案] C.

同步训练 3 (9.4) 直线与平面垂直的判定与性质(1)

名题举例

〔例 1〕

〔思路点拨〕利用直线与平面垂直的判定定理即可得证.

〔规范解答〕

设 $AC \cap BD = O$, $\because ABCD$ 为菱形, $\therefore AC \perp BD$.

又 $MA = MC$, O 是 AC 中点, $\therefore MO \perp AC$,

$\therefore AC \perp$ 平面 BDM .

〔例 2〕

〔思路点拨〕充分利用“转化”的思想是解此题的关键.

〔规范解答〕

证明: $PA \perp$ 平面 ABC , $\therefore BC \perp PA$, 又 $BC \perp AC$,

$\therefore BC \perp$ 平面 PAC , 又 $ACC \subset$ 平面 PAC , $\therefore AF \perp BC$.

又 $AF \perp PC$, $\therefore AF \perp$ 平面 PBC ,

$\therefore AF \perp PB$, 又 $AE \perp PB$, 且 $AE \cap AF = A$, $\therefore PB \perp$ 平面 AEF .

〔例 3〕

〔思路点拨〕充分利用线面垂直的判定定理是解本题的关键.

〔规范解答〕

如图, 连结 AH, PE ,

$\because PH \perp$ 面 ABC , H 为

$\triangle ABC$ 垂心,

$\therefore AH \perp BC$, $PH \perp BC$,

$\therefore BC \perp$ 面 AHP , 得 PA

$\perp BC$.

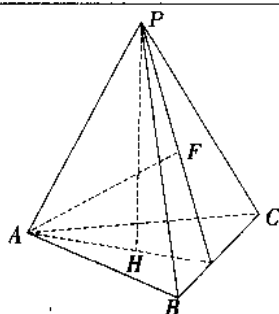
又 $AF \perp$ 面 PBC ,

$\therefore BC \perp AF$,

$\therefore BC \perp$ 面 APF ,

$\therefore BC \perp PF$, 得 $PF \perp BC$,

同理 $BF \perp FC$, $\therefore F$ 为 $\triangle PBC$ 的垂心.



题型设计与训练

一、选择题

1. 〔解析〕弄清“无数多”与“任意”的区别, 掌握线面垂直的判定定理.

〔参考答案〕C.

2. 〔解析〕考查线面垂直的判定定理.

〔参考答案〕D.

3. 〔解析〕取 AB 中点 M , 连 CM 与 DM 利用线面垂直的判定定理得证.

〔参考答案〕D.

4. 〔解析〕分两种情况来考虑.

〔参考答案〕D.

5. 〔解析〕答案 D 应用 $a \parallel b$ 或 a 与 b 异面.

〔参考答案〕D.

6. 〔解析〕易证 $EF \perp$ 面 A_1C_1D , $BD_1 \perp$ 面 A_1C_1D , $\therefore EF \parallel BD_1$.

〔参考答案〕B.

二、填空题

7. 〔解析〕利用实例会使结果更加明显.

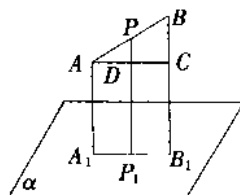
〔参考答案〕相交或异面

8. 〔解析〕(1) 过 D 点作 $DO \perp$ 平面 ABC , 取 DO 中点 E , 过 E 作平面 ABC 的平行平面, 这样的平面符合题设, 这类平面共有 4 个. (2) 作异面直线 AB, CD 的公垂线段, 取其中点作与 AB, CD 平行的平面也符合题设, 这类平面共有 3 个. 由 (1), (2) 可知共有 7 个平面符合题设.

〔参考答案〕7

9. 〔参考答案〕平行

10. 〔解析〕过点 A, B 分别作 AA_1, BB_1 垂直平面 α , 垂足分别为 A_1, B_1 , 则 $A_1A = a, B_1B = b$, 过点 A 作 $AC \perp BB_1$, 交 BB_1 于 C , 交 PP_1 于 D .



在 $\triangle ABC$ 中,

$$\frac{PD}{BC} = \frac{AP}{AB},$$

$$\text{即 } \frac{PD}{b-a} = \frac{m}{m+n},$$

$$\therefore PD = \frac{m(b-a)}{m+n},$$

$$\because DP_1 = a,$$

$$\therefore PP_1 = \frac{m(b-a)}{m+n} + a = \frac{mb+na}{m+n}.$$

$$\text{〔参考答案〕} \frac{mb+na}{m+n}$$

三、解答题

11. 〔解析〕证明: 过 A 作 $AA' \parallel MN$, 连 CA' 并延长至 D' , 使 $CA' = A'D'$, 连 DD', AD' , 则 $DD' \parallel AB$, $\therefore AD' = BD$.

又 MN 为 AB, CD 的公垂线, $AA' \parallel MN$.

$$\therefore AA' \perp AB, AA' \perp CD.$$

$$\text{又 } DD' \parallel AB, \therefore AA' \perp DD'.$$

$$\therefore AA' \perp \text{平面 } CD'D, \therefore AA' \perp CD',$$

$$\therefore AC = AD' = BD.$$

同理可证, $BC = AD$.

12. 〔解析〕实际上 PC 在面 PAB 的射影为 $\angle APB$ 的角平分线, 可求得 PC 和平面 PAB 所成角的余弦值是 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

同步训练 4 (9.4) 直线与平面垂直的判定与性质(2)

名题举例

【例 1】

【思路点拨】利用正弦定理可解三角形 ABC , 从而求出 $\angle ACB=90^\circ$

【规范解答】

(1) $\because PA \perp$ 平面 ABC ,
 $\therefore \angle PCA$ 是 PC 与平面 ABC 所成的角, 则 $\angle PCA=30^\circ$.

$\because PA=a, \therefore AC=\sqrt{3}a$.

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC=60^\circ, BC=a$, 由正弦定理, 得

$$\frac{a}{\sin \angle CAB} = \frac{\sqrt{3}a}{\sin 60^\circ},$$

$$\therefore \sin \angle CAB = \frac{1}{2}.$$

$\therefore \angle BAC=30^\circ$, 从而 $\angle ACB=90^\circ$,

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形.

(2) $\because PA \perp$ 平面 $ABC, \therefore PA \perp BC$, 又 $AC \perp BC$,

$\therefore BC \perp$ 平面 PAC , 从而 $\angle BPC$ 是 PB 与平面 APC 所成的角.

$$\text{在 } \triangle BPC \text{ 中 } \tan \angle BPC = \frac{BP}{PC} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}.$$

【例 2】

【思路点拨】充分利用线面垂直的判定与性质定理是解决本题的关键.

【规范解答】

证明: $\because O$ 为 $\triangle ABC$ 的中心, 且 $OP \perp$ 平面 ABC , 易知 $PB=PC, \therefore PE \perp BC$ (E 为 DH 延长线与 BC 交点),

$\therefore BC \perp$ 平面 PHD .

$\because AB \perp OP$, 且 $OC \perp AB, \therefore AB \perp$ 平面 $POC, \because CH \subset$ 而 POC

$\therefore CH \perp AB$.

又 $PA \perp$ 平面 $DBC, \therefore CH \perp PA, \therefore CH \perp$ 平面 DAB .

$\therefore CH \perp AB$, 从面 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心.

【例 3】

【规范解答】

(1) 取 AB 的中点 Q , 连 $PQ, QQ, \because CB \perp$ 平面 PAB ,
 $\therefore CB \perp PQ, \because PA=PB, \therefore PQ \perp AB$,

从而 $PQ \perp$ 平面 $ABC, \therefore \angle PQC=90^\circ$. 又 $\because \angle PBC=90^\circ, M$ 为 PC 的中点, $\therefore MQ=MP=MB$, 而 N 为 BQ 中点, $\therefore MN \perp AB$.

(2) $\angle APB=90^\circ, BC=2, AB=4$ 时, $PB=2\sqrt{2}, PC=2\sqrt{3}, \therefore MB=\frac{1}{2}PC=\sqrt{3}, \therefore MN=\sqrt{2}$.

题型设计与训练

一、选择题

1. [参考答案] C.

2. [参考答案] C.

3. [解析] 如果垂直时, 则成角为 90° .

[参考答案] A.

4. [参考答案] D.

5. [参考答案] C.

6. [解析] 利用线面垂直的判定与性质定理可得结论.

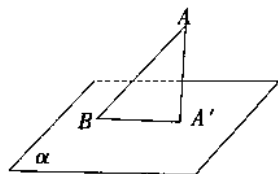
[参考答案] B.

二、填空题

7. [解析] 分两种位置关系来讨论.

[参考答案] 一个三角形或一条线段

8. [解析] 如图 BA' 为 AB 在 α 内射影, 则 $\angle ABA'$ 为线段 AB 与面 α 成角. 设 $BA'=1$, 则 $AB=3, AA'=2\sqrt{3}, \therefore \sin \angle ABA' = \frac{AA'}{AB} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.



[参考答案] $\frac{2}{3}\sqrt{3}$

9. [解析] 利用 $\cos \theta = \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2$ 可得.

[参考答案] $\frac{\sqrt{2}}{2}$

10. [解析] 分两种情况讨论.

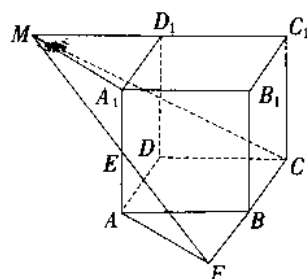
第一, A, B 两端点在面 α 同侧;

第二, A, B 两端点在面 α 异侧.

[参考答案] 5cm 或 $\sqrt{73}$ cm

三、解答题

11. [解析] 如图所示, 连结 MC, MA_1, AF .



$\because FC \perp$ 平面 CC_1D_1D , 且 MCC 平面 CC_1D_1D ,

$\therefore FC \perp MC$.

$\because$ 点 E 为 A_1A 的中点,

$\therefore Rt \triangle EA_1M \cong \triangle EAF$.

$\therefore A_1M=AF$.

又 $\because \angle MD_1A_1 = \angle ABF$ (等角定理),

$\therefore \text{Rt}\triangle MA_1D_1 \cong \triangle AFB$.

$\therefore FC=FB+BC=2a$.

$MC^2 = C_1C^2 + (C_1D_1 + D_1M)^2 = a^2 + (2a)^2 = 5a^2$.

$\therefore MF = \sqrt{MC^2 + FC^2} = \sqrt{5a^2 + 4a^2} = 3a$.

12. [解析] 证明: (1) $\because PA \perp$ 平面 $ABC, BC \subset$ 平面 ABC ,

$\therefore PA \perp BC$.

又 AB 为斜边,

$\therefore BC \perp AC, PA \cap AC = A$,

$\therefore BC \perp$ 平面 PAC .

(2) $\because BC \perp$ 平面 $PAC, AN \subset$ 平面 PAC ,

$\therefore BC \perp AN$.

又 $AN \perp PC$, 且 $BC \cap PC = C$,

$\therefore AN \perp$ 平面 PBC .

$\because PB \subset$ 平面 PBC ,

$\therefore AN \perp PB$.

又 $PB \perp AM, AN \cap AM = A$,

$\therefore PB \perp$ 平面 AMN .

(3) 在 $\text{Rt}\triangle PAB$ 中, $PA=AB=4$, 则 $PB=4\sqrt{2}$.

又 $AM \perp PB, \therefore AM = \frac{1}{2}PB = 2\sqrt{2}, PM=BM=2\sqrt{2}$.

又 $\because PB \perp$ 平面 $AMN, MN \subset$ 平面 AMN ,

$\therefore PB \perp MN$.

在 $\text{Rt}\triangle PMN$ 中,

$MN = PM \cdot \tan\theta = 2\sqrt{2}\tan\theta$.

$\because AN \perp$ 平面 $PBC, MN \subset$ 平面 PBC ,

$\therefore AN \perp MN$.

$AN = \sqrt{AM^2 - MN^2}$

$= \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 8\tan^2\theta}$

$= \sqrt{8(1 - \tan^2\theta)}$,

$\therefore S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2}AN \cdot MN$

$= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \sqrt{1 - \tan^2\theta} \cdot 2\sqrt{2}\tan\theta$

$= 4\sqrt{-\left(\tan^2\theta - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}$,

当 $\tan^2\theta = \frac{1}{2}$, 即 $\tan\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $S_{\triangle AMN}$ 取得最大值 2.

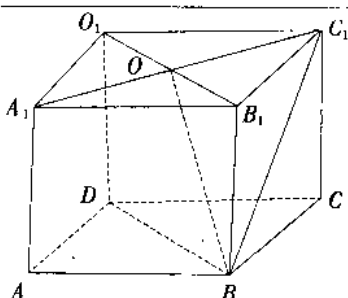
同步训练 5 (9.4) 直线与平面所成的角

名题举例

[例 1]

[思路点拨] 关键找到 BC_1 在对角面 BB_1D_1D 内的射影.

[规范解答]



连 A_1C_1 , 设 $A_1C_1 \cap B_1D_1 = O$, 则 $A_1C_1 \perp B_1D_1$.

又 $\because BB_1 \perp$ 面 $A_1B_1C_1D_1$,

$A_1C_1 \subset$ 面 $A_1B_1C_1D_1$,

$\therefore A_1C_1 \perp B_1B$,

$\therefore A_1C_1 \perp$ 面 BB_1D_1D .

连 OB , 则 OB 为 BC_1 在面 BB_1D_1D 内射影,

$\therefore \angle C_1BO$ 即为 BC_1 与面 BB_1D_1D 所成的角

设 $AA_1 = a$, 则 $BC_1 = \sqrt{2}a, OC_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}a$,

$\therefore \angle C_1BO = 30^\circ$.

[例 2]

[思路点拨] 解此题的关键是找 CE 在平面 BCD 上的射影, 取与已知条件相联系的特殊点 E , 过 E 作 $EF \perp$ 平面 BCD , 则 $EF \parallel AO$, 并且由已知条件 E 为 AD 中点, 可得 $EF = \frac{1}{2}AO$, 这样在 $\text{Rt}\triangle EFC$ 中, 可求得 EC 与平面 BCD 所成的角.

[规范解答]

作 $EF \perp$ 平面 BCD ,
 F 为垂足, 连 FC , 则 FC
 为 EC 在平面 BCD 上的
 射影,

$\therefore \angle ECF$ 为 CE 与
 平面 BCD 所成的角.

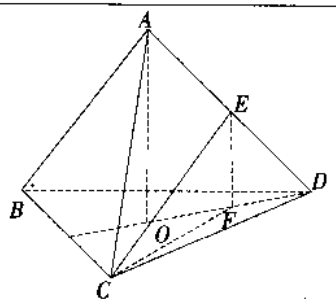
作 $AO \perp$ 平面 BCD ,
 O 为垂足, $\because AB = AC =$
 AD ,

$\therefore O$ 为正三角形 BCD 的外心.

设棱长为 a , 则 $OA = \frac{\sqrt{6}}{3}a$,

又 $EF \parallel OA$, E 为 AD 中点,

$\therefore EF = \frac{1}{2}OA = \frac{\sqrt{6}}{6}a$, 而 $CE = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.



$$\text{在 Rt}\triangle ECF \text{ 中, } \sin \angle ECF = \frac{EF}{CE} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{6}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$\therefore CE$ 与平面 BCD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

〔例 3〕

〔思路点拨〕把线面角转化为线线角.

〔规范解答〕

解: 连接 B_1D_1 , 过点 F 作 $FG \parallel B_1D_1$ 交 A_1C_1 于 G 点.

连接 GE , 则 $CF \perp$ 平面 A_1C_1CA , $\angle CEF$ 为 EF 与对
角面 A_1C_1CA 所成的角.

设正方体棱长为 1, 则 $EF = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $FG = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $\angle FGE = 90^\circ$.

$$\sin \angle GEF = \frac{FG}{EF} = \frac{1}{2}, \therefore \angle GEF = 30^\circ.$$

题题设计与训练

一、选择题

1. [参考答案] D.

2. [参考答案] D.

3. [解析] 利用最小角定理.

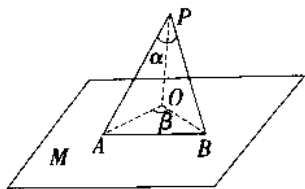
[参考答案] D.

4. [参考答案] D.

5. [解析] 利用 $\cos \theta = \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2$.

[参考答案] B.

6. [解析] 如图易知 $\beta > \alpha$.



[参考答案] C.

二、填空题

7. [参考答案] $0^\circ < \theta < 90^\circ$

8. [解析] $\text{Rt} \triangle BB'A$

中, $\angle BAB' = 30^\circ$, $BB' = AB$

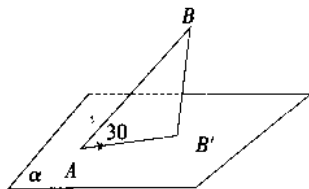
$$\therefore \sin 30^\circ = \frac{1}{2} AB$$

[参考答案] $\frac{1}{2}$, 90° .

9. [参考答案] 45° .

10. [解析] 过 A 作 $AD \perp BC$ 于 D , 连 FD , 由三垂线定理得 PD 即为 P 到 B 距离.

[参考答案] 35



三、解答题

11. [解析] 作 $AO \perp$ 平面 M 于 O , O 为垂足, 连 BO, DO , CO , $\angle ABO, \angle ACO$ 分别是直线 AB, AC 和平面 M 所成的角, 即 $\angle ABO = 30^\circ$, $\angle ACO = 45^\circ$, $\therefore \angle ADO$ 是 AD 和平面 M 所成的角.

设 $AO = x$, 易知 $CO = x$, $AB = 2x$, $AC = \sqrt{2}x$.

在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $BC = \sqrt{6}x$,

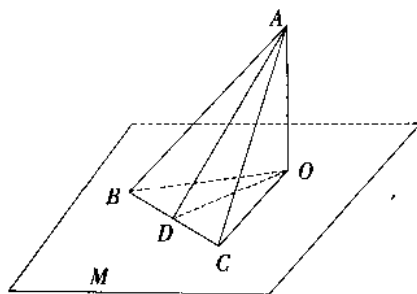
$$\text{又 } \because AD \perp BC, \therefore AD = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{2}{\sqrt{3}}x.$$

$$\text{在 Rt} \triangle AOD \text{ 中, } \sin \angle ADO = \frac{AO}{AD} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

又 $\because 0^\circ \leq \angle ADO \leq 90^\circ$,

$\therefore \angle ADO = 60^\circ$,

即 AD 和平面 M 成角为 60° .



12. [解析] $\because AO = OB = OC = a$,

$\angle AOB = \angle AOC = 60^\circ$

$\therefore \triangle AOB, \triangle AOC$ 为正三角形

$\therefore AB = AC = a$

$\because BC = \sqrt{2}a, \therefore AB^2 + AC^2 = BC^2$

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形.

同理 $\triangle BOC$ 也为 $\text{Rt} \triangle$.

过 A 作 $AH \perp$ 平面 α 于 H , 连 OH ,

$\because AO = AB = AC, \therefore OH = BH = CH$,

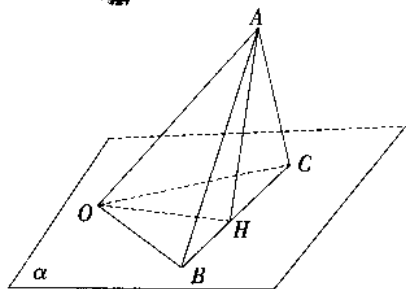
H 为 $\triangle BOC$ 的外心,

$\therefore$ 在 $\text{Rt} \triangle AOH$ 中, $AH = \frac{\sqrt{2}}{2}a$,

$$\therefore \sin \angle AOH = \frac{AH}{AO} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$\therefore \angle AOH = 45^\circ$,

即 AO 与平面 α 成角为 45° .



同步训练 6 (9.4) 三垂线定理

名题举例

〔例 1〕

〔思路点拨〕此题是证明平面内的直线和平面外的一条斜线垂直的问题,显然可以尝试用三垂线定理去证明,即证 BD 和 AC 在平面 BCD 上的射影垂直. 在应用三垂线定理时,关键是找出平面的垂线或作出平面的垂线,从而作出斜线的射影.

〔规范解答〕

作 $AH \perp$ 平面 BCD , H 为垂足,连 BH 、 DH , 则 BH 和 DH 分别是 AB 、 AD 在平面 BCD 上的射影.

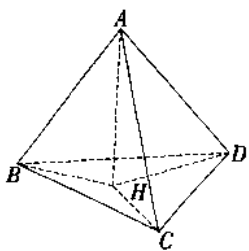
$\because AB \perp CD, AD \perp BC,$

$\therefore BH \perp CD, DH \perp BC,$

$\therefore H$ 为 $\triangle BCD$ 的垂心.

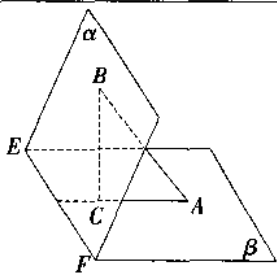
连结 CH , 则 $BD \perp CH$.

又 $\because CH$ 为 AC 在平面 BCD 上的射影, 由三垂线定理可知 $BD \perp AC$.



〔例 2〕

〔规范解答〕



证法一: $\because AB \perp \alpha, EF \subset$ 平面 $\alpha, \therefore EF \perp AB.$

$\because BC \perp \beta, EF \subset$ 平面 $\beta, \therefore EF \perp BC.$

面 BC 和 AC 为平面 ABC 内两相交直线,

$\therefore EF \perp$ 平面 $ABC.$

又 $\because AC \subset$ 平面 $ABC,$

$\therefore EF \perp AC.$

证法二: $\because BC \perp \beta,$

$\therefore AC$ 为 BA 在平面 β 内的射影.

又 $\because AB \perp \alpha, EF \subset \alpha, \therefore AB \perp EF.$

由三垂线定理的逆定理, 得 $EF \perp AC.$

〔例 3〕

〔规范解答〕

假设 H 是 $\triangle BCD$ 的垂心, 则 $BH \perp DC.$

$\because AH \perp$ 面 $DBC, \therefore DC \perp AH,$

$\therefore DC \perp$ 平面 $ABH, \therefore AB \perp DC,$

又 $\because DA \perp$ 面 $ABC, \therefore AB \perp DA,$

$\therefore AB \perp$ 面 $DAC, \therefore AB \perp AC,$

与已知 $\angle BAC = 60^\circ$ 矛盾,

$\therefore$ 假设不成立.

故 H 不可能是 $\triangle BCD$ 的垂心.

题型设计与训练

一、选择题

1. [参考答案] A.

2. [参考答案] B.

3. [解析] 由射影定理及三垂线定理可得结果.

[参考答案] C.

4. [解析] 作 $PD \perp BC$, 垂足为 D , 连 PD , 由三垂线定理知 $PD \perp BC, \therefore PD$ 即为 P 到 BC 的距离. 在 $Rt \triangle ADC$ 中, $AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = 4$, 在 $Rt \triangle PAD$ 中, $PD = \sqrt{PA^2 + AD^2} = 4\sqrt{5}.$

[参考答案] D.

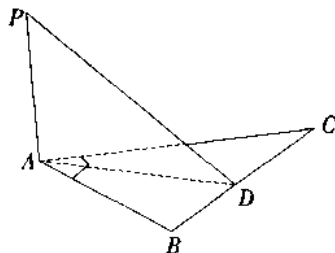
5. [参考答案] D.

6. [参考答案] C.

二、填空题

7. [参考答案] 垂心

8. [解析] 过 A 作 $AD \perp BC$, 交 BC 于 D , 连 PD , 由三垂线定理知 $PD \perp BC, \therefore PD$ 是 P 到 BC 的距离, 在 $Rt \triangle ABC$ 中, $AD = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{12}{5}$, 在 $Rt \triangle PAD$ 中, $PD = \sqrt{PA^2 + AD^2} = \frac{13}{5}.$



[参考答案] $\frac{13}{5}$

9. [解析] 作 $CD \perp AB$ 于 D , 连 PD , 由三垂线定理知 PD 为所求. $PD = 2\sqrt{7}.$