数理方程

Equations of Mathematical Physics

车向凯　谢彦红　缪淑贤　编著

高等教育出版社

数理方程

Equations of Mathematical Physics

车向凯　谢彦红　缪淑贤　编著

高等教育出版社

内容提要

本书共分六章，内容包括经典数学物理方程的建立，偏微分方程的分类，特殊函数及定解问题的求解。本书着重讨论了求解数学物理问题的典型方法及与之相应的各种定解问题。

本书可作为非数学专业的理工科本科生及研究生的教学用书或教学参考书，也可作为科研及工程技术人员的参考书或自学用书。

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程/车向凯，谢彦红，缪淑贤编著.—北京：高等教育出版社，2006.5

ISBN 7-04-019381-7

Ⅰ.数... Ⅱ.①车...②谢...③缪... Ⅲ.数学物理方程-高等学校-教材 Ⅳ.O175.24

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 036993 号

策划编辑 杨 波 **责任编辑** 张耀明 **封面设计** 李卫青 **责任绘图** 朱 静
版式设计 马静如 **责任校对** 杨凤玲 **责任印制** 尤 静

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网 址**	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	北京四季青印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开 本	787×960 1/16	**版 次**	2006 年 5 月第 1 版
印 张	13.5	**印 次**	2006 年 5 月第 1 次印刷
字 数	250 000	**定 价**	18.70 元

物料号 19381-00

前 言

本书是为非数学专业的理工科高年级本科生和工科研究生的数学物理方程课程而编写的教材。考虑到使用本书的读者的数学基础和应用需要，编写本书的指导思想是力求将数学物理方程和解题方法与物理实际结合起来。本书的特点是突出解题方法的讲授，而不过分地追求数学理论的严谨性。编者尽量“软化”教材的理论部分，“弱化”技巧，除个别小节外，读者只要具备高等数学的知识及部分线性代数的知识，即可无大障碍地阅读本书。

本书每节后一般都留有一定量的习题，这些习题是为巩固该节知识和检验知识掌握程度而设置的。读者即使不做出全部的题目，也应做出部分题目。为了教师的授课方便和学生自我检查的方便，我们一般都给出了习题的答案，对于较难的题目还给出了简略的解答。

本书作为教材用书，内容取舍受到学时的限制，数学物理方程有很多精彩的内容，甚至经典的内容本书没有包含在内，这是很遗憾的事情。对于本书未及展开的部分，有兴趣的读者可查阅书后所列的参考书。

本书从酝酿到出版全仰赖东北大学理学院院长张庆灵教授和高等教育出版社李艳馥社长的策划和支持，编者在此表示深深的谢意。

由于编者水平所限，错误和不当之处在所难免，敬请读者和同行不吝指正。

编者

2005 年 3 月 10 日

目　录

第 1 章　方程的建立与方程的一般概念 …… 1
1.1　方程的一般概念 …… 1
1.2　经典方程的导出 …… 4
1.3　定解条件与定解问题 …… 12
1.4　二阶线性偏微分方程的分类 …… 19
习题 1 …… 25
第 2 章　行波法 …… 28
2.1　一维齐次波动方程的 Cauchy 问题 …… 28
2.2　反射波法 …… 34
2.3　一维非齐次波动方程的 Cauchy 问题 …… 38
2.4　三维波动方程的 Cauchy 问题 …… 40
2.5　二维波动方程的 Cauchy 问题 …… 43
2.6　Poisson 公式的物理意义 …… 46
习题 2 …… 48
第 3 章　固有值问题与特殊函数 …… 51
3.1　二阶常微分方程的级数解 …… 51
3.2　正交函数系及广义 Fourier 级数 …… 53
3.3　Sturm - Liouville 问题 …… 58
3.4　Bessel 函数 …… 65
3.5　Legendre 函数 …… 78
习题 3 …… 83
第 4 章　分离变量法 …… 86
4.1　波动方程 …… 86
4.2　热传导方程 …… 92
4.3　非齐次问题的处理 …… 98
*4.4　Laplace 方程 Dirichlet 问题解的唯一性和稳定性 …… 105
4.5　二维 Laplace 方程及 Poisson 方程的边值问题 …… 107
4.6　三维 Laplace 方程的 Dirichlet 问题 …… 123
习题 4 …… 129
第 5 章　积分变换法 …… 134
5.1　δ-函数 …… 134

5.2 Fourier 变换 …… 137
5.3 Fourier 变换的应用 …… 146
5.4 Laplace 变换 …… 152
5.5 Laplace 变换的应用 …… 160
习题 5 …… 164
第 6 章 Green 函数 …… 168
6.1 Green 公式 …… 168
6.2 Green 函数 …… 170
6.3 Laplace 方程的 Dirichlet 问题 …… 176
6.4 波动方程的 Cauchy 问题的基本解 …… 183
6.5 热传导方程的 Cauchy 问题的基本解 …… 186
习题 6 …… 188
参考书目 …… 190
附录 A Laurent 级数 留数 …… 191
附录 B Fourier 变换表 …… 194
附录 C Laplace 变换表 …… 195
习题答案 …… 200

第1章 方程的建立与方程的一般概念

我们这里所讲的数学物理方程指的是从物理学、力学、工程技术等问题中导出的二阶线性偏微分方程. 从广义上讲，数学物理方程还包括高阶线性偏微分方程，非线性偏微分方程，积分方程等等. 二阶线性偏微分方程包括弦振动方程(波动方程)，热传导方程(扩散方程)及位势方程，这三类方程在自然科学及工程技术领域中有着广泛的应用. 完整地处理一个数学物理方程问题包括三个方面：把物理问题化为数学上的定解问题；解定解问题；对得到的解作物理解释. 本书重点研究第二方面的问题.

本章首先介绍偏微分方程的一些基本概念，进而应用物理学中的一些定律，如 Newton 第二定律、Fourier 热传导定律及其他守恒定律或变分原理等方法，从一些物理问题中归结出三类典型方程. 通过这些典型的数学物理方程的建立，使读者了解方程导出的过程，并掌握从物理、力学及工程技术问题中抽象出数学问题，建立数学物理方程的基本方法.

1.1 方程的一般概念

一个含有多元未知函数及其偏导数的方程，称为偏微分方程. 其一般形式为

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n,u,u_{x_1},\cdots,u_{x_n},u_{x_1x_1},u_{x_1x_2},\cdots)=0, \tag{1.1.1}$$

其中 u 为多元未知函数，F 是 $x_1,x_2,\cdots,x_n,u$ 以及 u 的有限个偏导数的已知函数. 例如

$$u_t=a(x,t)u_{xx}+b(x,t)u_x+c(x,t)u+f(x,t), \tag{1.1.2}$$

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0, \tag{1.1.3}$$

$$u+kuu_x+u_{xxx}=0, \tag{1.1.4}$$

$$u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})+f(x,y,z,t), \tag{1.1.5}$$

$$(u_x)^2+u=3, \tag{1.1.6}$$

$$u_t+uu_x=0, \tag{1.1.7}$$

都是偏微分方程，其中 k,a 为常数，$a(x,t),b(x,t),c(x,t),f(x,t),f(x,y,z,t)$ 为已知函数，u 为未知函数. 注意，在偏微分方程中可以不含有未知函数 u，但必须含有未知函数 u 的偏导数.

偏微分方程中未知函数的最高阶偏导数的阶数称为偏微分方程的阶. 如果

一个偏微分方程对于未知函数及其各阶导数来说都是一次的，其系数仅依赖于自变量，就称之为**线性偏微分方程**，否则就称之为**非线性偏微分方程**. 如方程(1.1.4)为三阶；方程(1.1.2)，(1.1.3)，(1.1.5)为二阶；(1.1.6)，(1.1.7)为一阶. 方程(1.1.2)，(1.1.3)，(1.1.5)为**线性偏微分方程**；而(1.1.4)，(1.1.6)，(1.1.7)为**非线性偏微分方程**.

在非线性偏微分方程中，如果关于未知函数的最高阶导数是线性的，则称之为**拟线性偏微分方程**. 进而，在拟线性偏微分方程中，当未知函数的最高阶导数的系数不含未知函数及其低阶偏导数而仅依赖于自变量时，则称之为**半线性偏微分方程**. 如方程(1.1.4)，(1.1.7)为拟线性偏微分方程；而(1.1.4)为半线性偏微分方程.

本书重点研究二阶线性偏微分方程，它的一般形式为

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f(x_1, \cdots, x_n), \tag{1.1.8}$$

记

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c,$$

称 L 为二阶线性偏微分算子.

(1.1.8)又可表示为

$$Lu = f. \tag{1.1.9}$$

方程中，不含有未知函数及其导数的项称为自由项，含有非零自由项的方程称为**非齐次方程**，自由项恒等于零的方程称为**齐次方程**. 如方程(1.1.3)，(1.1.4)，(1.1.7)为齐次方程；而(1.1.2)，(1.1.5)，(1.1.6)为非齐次方程.

最后讲一下数学物理方程的解的问题. 一般总是假定在 $\mathbf{R}^n$ 空间的某个区域 Ω 内讨论方程的解. 如果定义在 Ω 内的函数 $u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 具有方程中出现的各阶偏导数，且恒满足方程，即将 u 及其偏导数代入方程后，使其成为恒等式，则称函数 u 为该**方程的解**. 如果方程的解还满足某些附加条件，则称其为**特解**.

例 1.1.1 证明除了点(x_0, y_0, z_0)外，函数

$$u(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}$$

满足方程

$$\Delta_3 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, \tag{1.1.10}$$

其中 Δ 为 Laplace 算子，简称拉氏算子，(1.1.10)式称为 Laplace 方程.

证明 设 $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$，则 $u = \frac{1}{r}$，

$$u_x = -\frac{x-x_0}{r^3}, \quad u_{xx} = -\frac{1}{r^3} + 3\frac{(x-x_0)^2}{r^5},$$

同理可求：

$$u_{yy}=-\frac{1}{r^3}+3\frac{(y-y_0)^2}{r^5},\quad u_{zz}=-\frac{1}{r^3}+3\frac{(z-z_0)^2}{r^5},$$

所以，
$$\Delta u=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0.$$

在常微分方程的求解中，一般是先求出通解再求出特解. 偏微分方程的求解中能否也先求通解再求出特解呢？一般来看是不能的. 一方面是因为偏微分方程的通解形式较复杂，很难求出，甚至根本求不出通解；另一方面是因为即使求出了通解，也很难由通解来确定特解，由通解来求特解之难甚于直接求特解. 更何况有的问题由通解根本就无法确定特解. 下面给出几个简单的求解偏微分方程的例子.

例 1.1.2 求方程 $u_x=\cos x$ 的通解.

解 方程两边对 x 积分，得

$$u=\sin x+\varphi(y),$$

这里 $\varphi(y)$ 是 y 的任意函数.

例 1.1.3 求方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\mathrm{e}^x$ 的通解.

解 将上面方程改写为

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\mathrm{e}^x,$$

两边对 y 积分，得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\int\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathrm{d}y=\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}y=y\mathrm{e}^x+\varphi(x),$$

这里 $\varphi(x)$ 为 x 的任意函数.

上式两边再对 x 积分得方程的通解

$$u=y\mathrm{e}^x+g(x)+h(y),$$

其中 $g(x),h(y)$ 为两个任意的一次可微函数.

例 1.1.4 求方程 $t\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+2\frac{\partial u}{\partial x}=2xt$ 的通解.

解 设 $\frac{\partial u}{\partial x}=v$，原方程变为

$$t\frac{\partial v}{\partial t}+2v=2xt,$$

即
$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{2}{t}v=2x,$$

将 x 看作参数，v 看作 x 的一元函数，解得

$$\begin{aligned}v&=\exp\left\{-\int\frac{2}{t}\mathrm{d}t\right\}\left[\int 2x\exp\left(\int\frac{2}{t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t+c(x)\right]\\&=\frac{2}{3}xt+c(x)t^{-2},\end{aligned}$$

再对 x 积分，得

$$u=\frac{1}{3}x^2t+t^{-2}h(x)+g(t),$$

其中 $h(x)$，$g(t)$ 为两个任意一次可微函数.

上面这些例子告诉我们，一个偏微分方程的解是无穷多的. 一般地，一个一阶偏微分方程的通解一般依赖于一个任意函数，一个二阶偏微分方程的通解一般依赖于两个任意函数.

1.2 经典方程的导出

本节我们将通过几个不同的物理模型推导出数学物理方程中三大类典型的方程. 通过对经典方程的导出，一方面对读者进行建立数学物理方程的有益的训练，另一方面也可以使读者了解几种典型方程的物理背景.

一、弦的振动方程

这是一个古老而简单的，同时又是一个很重要的物理问题，它经常出现在数学物理的很多分支领域中. 考察一条长为 l，两端固定拉紧的柔软均匀的有弹性的细弦. 提出的问题是，给定弦一个初始位移和初始速度，弦作微小的横振动，试确定弦上各点的运动规律. 即建立描述弦上任一点处在任意时刻 t，位移所满足的方程.

假定弦的运动发生在同一平面内，且弦上各点的位移与平衡位置垂直. 首先建立坐标系，取弦的平衡位置为 x 轴，弦固定的左端点为原点. 在弦运动的平面内，过原点作 u 轴垂直于 x 轴，且满足右手系. 这样在任意时刻 t，弦上各点的位移为

$$u=u(x,t).$$

在弦上任取一个 $\widehat{AB}$ 微元，从 x 到 $x+\Delta x$(图 1.2.1). 将这一微元放大，如图 1.2.2，并考虑其上的受力情况，微元 $\widehat{AB}$ 所受的 u 轴方向的张力的分力之和为

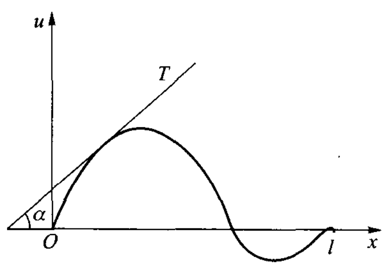

图 1.2.1

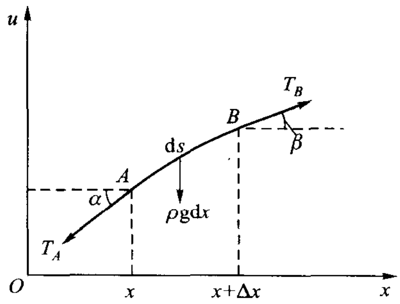

图 1.2.2

$$|T_B|\sin\beta-|T_A|\sin\alpha. \tag{1.2.1}$$

由于弦做微小的振动，弦的一微元伸长很小，故可假定张力的大小(模)是个常量，记为 T. 于是张力在 u 轴方向的分力之和可写为

$$T\sin\beta-T\sin\alpha. \tag{1.2.2}$$

设作用在弦上的外力密度为 $F(x,t)$，外力在微元$\widehat{AB}$上的合力为

$$\int_x^{x+\Delta x}F(x,t)\mathrm{d}x. \tag{1.2.3}$$

由 Newton 第二定律

$$T\sin\beta-T\sin\alpha+\int_x^{x+\Delta x}F(x,t)\mathrm{d}x=\int_x^{x+\Delta x}\rho u_{tt}\mathrm{d}x, \tag{1.2.4}$$

其中 $\rho=\rho(x)$是弦的线密度.

由于 α,β 很小，故有 $\sin\alpha\sim\tan\alpha$, $\sin\beta\sim\tan\beta$，而 $\tan\alpha=u_x(x,t)$, $\tan\beta=u_x(x+\Delta x,t)$，于是(1.2.4)可写成

$$Tu_x(x+\Delta x,t)-Tu_x(x,t)+\int_x^{x+\Delta x}F(x,t)\mathrm{d}x=\int_x^{x+\Delta x}\rho u_{tt}\mathrm{d}x. \tag{1.2.5}$$

再假定 $F(x,t)$和 ρu_{tt}是连续的，由积分中值定理，有

$$\int_x^{x+\Delta x}F(x,t)\mathrm{d}x=F(\xi_1,t)\Delta x, \tag{1.2.6}$$

$$\int_x^{x+\Delta x}\rho u_{tt}\mathrm{d}x=\rho(\xi_2)u_{tt}(\xi_2,t)\Delta x, \tag{1.2.7}$$

其中 ξ_1,ξ_2 介于 x 与 $x+\Delta x$ 之间.

将上两式代入(1.2.5)，(1.2.5)两端同时除以 Δx，再令 $\Delta x\to0$，得

$$\rho u_{tt}=Tu_{xx}+F(x,t). \tag{1.2.8}$$

令 $a^2=\dfrac{T}{\rho}$, $f(x,t)=\dfrac{F}{\rho}$，则有

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t). \tag{1.2.9}$$

(1.2.9)称为弦的强迫振动方程，也称为一维非齐次波动方程.

若 $F\equiv0$，则有

$$u_{tt}=a^2u_{xx}. \tag{1.2.10}$$

(1.2.10)称为弦的自由振动方程，也称为一维齐次波动方程.

二、传输线方程

由电路中的 kirchhoff 定律，对于直流电或低频交流电来说，同一条支路中的电流相等，但对于较高频率的交流电，由于电路中导线的自感和电容的作用，同一条支路中的电流未必相等.

1. 物理问题

考虑两条平行的高频传输线(图 1.2.3)，(沿 x 方向)电流 i 和电压 v 是位置 x 和时间 t 的函数，记作 $i(x,t)$, $v(x,t)$，研究这种导体内电流的流动规律.

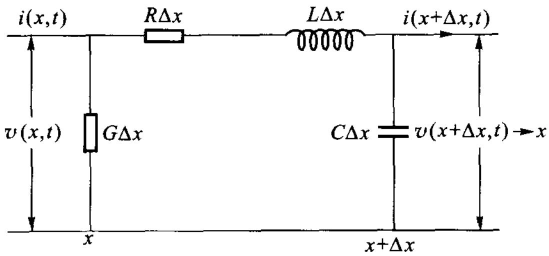

图 1.2.3

2. 假设

(1) R,L,C,G 分别表示单位长度导线上的电阻，自感系数，电容系数，电漏系数；

(2) 单位时间内导线上每一点电量的损失与该点的电压成正比；

(3) 周围介质对电磁振荡的影响可以忽略.

3. 方程的建立

寻找导体内电流的流动规律，即求出函数 $i(x,t)$，$v(x,t)$ 所满足的方程，这里仍然采用微元法.

在导线上任取一段导线 $[x,x+\Delta x]$（图 1.2.3），在时间 Δt 内流进这段导线的电量为

$$[i(x,t)-i(x+\Delta x,t)]\Delta t.$$

由于能量守恒，它等于这段导线充电所需要的电量与漏掉的电量的和，即

$$[i(x,t)-i(x+\Delta x,t)]\Delta t=C[v(x,t+\Delta t)-v(x,t)]\Delta x+Gv\Delta x\Delta t, \tag{1.2.11}$$

这段导线的电位差等于电动势的和，即

$$\left(Ri+L\frac{\partial i}{\partial t}\right)\Delta x=v(x,t)-v(x+\Delta x,t). \tag{1.2.12}$$

(1.2.11)式两边同除 $\Delta x\Delta t$，(1.2.12)式两边同除 Δx，并令 $\Delta x\to0$，$\Delta t\to0$ 得

$$\begin{cases} C\dfrac{\partial v}{\partial t}+\dfrac{\partial i}{\partial x}+Gv=0, \\ L\dfrac{\partial i}{\partial t}+\dfrac{\partial v}{\partial x}+Ri=0. \end{cases} \tag{1.2.13}$$

在(1.2.13)中消去 v 或 i，即可得到 i 或 v 满足的偏微分方程.

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}=LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}+(RC+GL)\frac{\partial i}{\partial t}+GRi, \tag{1.2.14}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+(RC+GL)\frac{\partial v}{\partial t}+GRv. \tag{1.2.15}$$

方程(1.2.14)，(1.2.15)称为传输线方程(电报方程).

在高频传输的情况下，电阻很小，电漏也可忽略不计. 即可令 $G=0, R=0$，方程(1.2.14)，(1.2.15)化简为

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}=LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}, \tag{1.2.16}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \tag{1.2.17}$$

令 $a=\sqrt{\frac{1}{LC}}$. 则

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}, \tag{1.2.18}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \tag{1.2.19}$$

它们都是弦振动方程.

三、热传导方程

1. 物理问题

一块均匀的各向同性的空间物体，该物体内各点的温度不全相同. 实验表明：在物体内有热量传递，而且热量由温度高处流向温度低处. 设物体的密度为 ρ，比热为 c，占有的空间区域为 Ω，物体内热源强度为 $f(x,y,z,t)$，研究物体内各点的温度分布情况，即研究物体内任意一点 (x,y,z) 在任意时刻 t 的温度 $u(x,y,z,t)$ 所满足的关系式.

从物理学知道，当温度不为常数时，热的流动遵循 Fourier 定律.

Fourier 定律：物体在无穷小时段 dt 内流过一个包含点 (x,y,z) 的任意一个小的面积微元 dS 的热量 dQ 与物体温度沿曲面 dS 的单位法线方向的方向导数 $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$ 成正比，即

$$dQ=-k(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial n}dSdt,$$

也可写成

$$dQ=-k(x,y,z)\operatorname{grad} u\cdot n dSdt.$$

2. 方程的建立

因为假定物体是均匀的且各向同性，所以物体的密度 ρ，热传导系数 k 及物体的比热 c 均为常数.

在 Ω 内任取一小块闭区域 V，它的边界曲面为 S(图 1.2.4)，在任意时间段 $[t_1,t_2]$ 内这一小块物体温度升高所需要的热量为

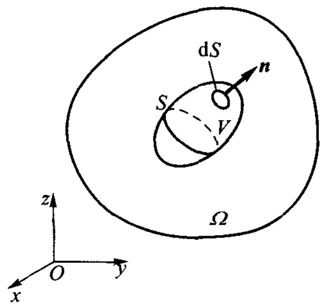

图 1.2.4

$$Q_1 = \iiint_V c\rho[u(x,y,z,t_2) - u(x,y,z,t_1)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{1.2.20}$$

在曲面 S 上取微元 $\mathrm{d}S$,由 Fourier 定律知,从时刻 t_1 到时刻 t_2 之间,从曲面 S 的外部流进 V 内的全部热量为

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} \left[\oiint_S k \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S\right]\mathrm{d}t. \tag{1.2.21}$$

由高斯公式:通过 V 的边界曲面 S 流入 V 的热量

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} \left[\iiint_V \mathrm{div}(k\,\mathrm{grad}\, u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}t. \tag{1.2.22}$$

另外,这段时间内这一小块物体中热源放出的热量为

$$Q_3 = \int_{t_1}^{t_2} \left[\iiint_V f(x,y,z,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}t. \tag{1.2.23}$$

由热量守恒定律:Q_3+Q_2 恰为物体温度由 $u(x,y,z,t_1)$ 变为 $u(x,y,z,t_2)$ 所需要的热量 Q_1,即

$$Q_3 + Q_2 = Q_1.$$

即

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\iiint_V \left(c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - f(x,y,z,t) - \mathrm{div}(k\,\mathrm{grad}\, u)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}t = 0.$$

由于$[t_1,t_2]$,V 都是任意的,得

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{div}(k\,\mathrm{grad}\, u) - f = 0. \tag{1.2.24}$$

设 $a=\sqrt{k/c\rho}$,则(1.2.24)可表示为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{c\rho}f. \tag{1.2.25}$$

这就是三维热传导方程.如果物体内部没有热源,则有三维齐次热传导方程.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right). \tag{1.2.26}$$

如果考虑的是稳定温度场,这时温度只是空间坐标的函数,不依赖于时间,即$\frac{\partial u}{\partial t}=0$,就得到三维 Laplace 方程

$$-\Delta u = 0.$$

在有热源的情形下,就得到 Poisson 方程

$$-\Delta u = \frac{1}{k}f(x,y,z).$$

Laplace 方程,Poisson 方程统称为位势方程.

考虑各向同性的均匀细杆的热传导问题.取细杆为 x 轴,设在每一个垂直于 x 轴的断面上温度相同,细杆的侧表面与周围介质没有热交换,且在杆内没有热源,这样就得到一维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad (a=\sqrt{k/c\rho}),$$

其中 c 为比热,k 为热传导系数,ρ 为杆的密度.

注意:

(1) 液体和半导体材料中杂质的扩散问题仍然满足热传导方程;

(2) 若物体为一金属薄板,上下两面与外界没有热交换,这时(1.2.25)就变成二维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+F(x,y,t). \tag{1.2.27}$$

四、极小曲面问题

1. 问题　给定空间曲线

$$L:x=x(t),y=y(t),z=z(t),0\leqslant t\leqslant T.$$

L 在 xOy 面上的投影为闭曲线

$$l:x=x(t),y=y(t),z=0,0\leqslant t\leqslant T.$$

设曲线 l 充分光滑,l 所围的区域为 Ω.我们的问题是,在所有定义在 Ω 上以曲线 L 为边界的曲面中,求曲面面积最小者.显然,这是一个变分问题,也就是一个泛函求极值的问题.解决这个变分问题需应用变分学基本引理.

2. 变分学基本引理

设 D 为平面区域,∂D 为 D 的边界.$f(x,y)\in C(D)$.若 $\forall\,\eta(x,y)\in C^1(\overline{D})$ 且 $\eta|_{\partial D}=0$,均有

$$\iint_D f(x,y)\eta(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

则

$$f(x,y)\equiv 0,\quad \forall\,(x,y)\in D.$$

证明　用反证法.不妨假设存在$(x_0,y_0)\in D$,使得 $f(x_0,y_0)>0$.由函数的连续性知存在 $\delta>0$,使在

$$(x,y)\in D_\delta=\{(x,y)\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\}$$

时 $f(x,y)>0$.作函数

$$\eta(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)\in D/D_\delta,\\ [(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-\delta^2]^2, & (x,y)\in D_\delta.\end{cases}$$

显然,$\eta(x,y)\in C^1(D)$,且 $\eta|_{\partial D}=0$.

于是

$$\iint_D f(x,y)\eta(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_\delta} f(x,y)[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-\delta^2]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0.$$

这与假设矛盾. 从而 $f(x,y)\equiv 0,(x,y)\in D$.

定义 1.2.1 函数集合

$$M=\{v\mid v\in C^1(\overline{\Omega}),v|_{\partial\Omega}=\varphi\}.$$

其中 $\varphi(x,y)$是由曲线 L 的方程所确定的函数,即

$$Z(t)=\varphi[x(t),y(t)],\quad 0\leqslant t\leqslant T.$$

曲面 v 的面积为

$$J[v]=\iint_\Omega \sqrt{1+v_x^2+v_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad v\in M. \tag{1.2.28}$$

设 $u\in M$ 是变分问题的解,即

$$J(u)=\min_{u\in M} J(v). \tag{1.2.29}$$

记 $M_0=\{v_0\mid v_0\in C^1(\overline{\Omega}),v_0|_{\partial\Omega}=0\}$,则对 $\varepsilon\in(-\infty,\infty)$, $u+\varepsilon v_0\in M$,且任一 $v\in M$,均可表示成 $v=u+\varepsilon v_0$ 的形式. 设

$$J(\varepsilon)=J[u+\varepsilon v_0]=\iint_\Omega \sqrt{1+(u_x+\varepsilon v_{0x})^2+(u_y+\varepsilon v_{0y})^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因 $J(0)=J[u]$是 $J[v]$的最小值,故 $J'(0)=0$.

$$J'(\varepsilon)=\iint_\Omega \frac{(u_x+\varepsilon v_{0x})v_{0x}+(u_y+\varepsilon v_{0y})v_{0y}}{\sqrt{1+(u_x+\varepsilon v_{0x})^2+(u_y+\varepsilon v_{0y})^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

令 $\varepsilon=0$,则

$$J'(0)=\iint_\Omega\left[\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}v_{0x}+\frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}v_{0y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{1.2.30}$$

再假定 $u\in C^2(\overline{\Omega})$,由 Green 公式

$$\begin{aligned}
&\oint_{\partial\Omega}\frac{v_0}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s\\
=&\iint_\Omega\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{v_0u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{v_0u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right]\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&\iint_\Omega\left[\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}v_{0x}+\frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}v_{0y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\\
&\iint_\Omega\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right]\right\}v_0\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

因 $v_0|_{\partial\Omega}=0$,有

$$\oint_{\partial\Omega}\frac{v_0}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=0.$$

再由(1.2.30)得