（高教版）

微积分

导教·导学·导考

DAOJIAO DAOXUE DAOKAO

卢恩双 史美英 王经民 主编

■内容提要
■知识结构图
■教学要求、重点、难点及考点
■典型题解析
■课后习题选解
■学习效果测试及答案

农林 NONG LIN SAN DAO 三导丛书

西北工业大学出版社

农林三导丛书

微 积 分

（高教版）

导教·导学·导考

主编 卢恩双 史美英 王经民

西北工业大学出版社

【内容简介】 全书共分8章，每章均设了6个板块，即按照内容提要，知识结构图，教学要求、重点、难点及考点，典型题解析，课后习题选解，学习效果测试及答案等6个部分来编写，旨在帮助读者掌握课程重点、难点，学会分析方法，提高解题能力，为考研的读者提供帮助，同时可为教师教学提供参考。

本书可作为高等农林院校各专业本、专科生的课程辅导及应试参考书，也可作为报考硕士研究生的考生进行强化训练的指导书。

图书在版编目（CIP）数据

微积分导教·导学·导考/卢恩双，史美英，王经民主编．—西安：西北工业大学出版社，2006.8

（农林三导）

ISBN 7-5612-2110-X

Ⅰ.微… Ⅱ.①卢… ②史… ③王… Ⅲ.微积分—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第085391号

出版发行：西北工业大学出版社

通信地址：西安市友谊西路127号 **邮编**：710072

电　　话：(029)88493844　88491757

网　　址：www.nwpup.com

印 刷 者：陕西丰源印务有限公司

开　　本：787 mm×960 mm 1/16

印　　张：14.375

字　　数：386千字

版　　次：2006年8月第1版　2006年8月第1次印刷

定　　价：20.00元

出版说明

2006 年 2 月 15 日，胡锦涛同志在新农村专题研讨班上的重要讲话中指出，建设社会主义新农村，是我们党在深刻分析当前国际国内形势、全面把握我国经济社会发展阶段性特征的基础上，从党和国家事业发展的全局出发确定的一项重大历史任务。同时，他也指出，重视农业、农村、农民问题是我们党的一贯战略思想。“三农”问题始终是关系党和人民事业发展的全局性和根本性问题，农业丰则基础强，农民富则国家盛，农村稳则社会安。在新世纪新阶段，我们必须始终不渝地高度重视并认真解决好“三农”问题，不断开创“三农”工作的新局面。

中国是个农业大国，农民多，市场广阔，特别是经过 20 多年的发展，许多人致了富。美国著名财经杂志《福布斯》评出的“2005 年福布斯中国富豪榜”显示，中国排名前 10 名的富豪中，排名第五、第六的是刘永行、刘永好兄弟，谁都知道，他们是从事农业的。而曾任《福布斯》杂志中国地区调研员的胡润更是语出惊人：中国最热的行业是农业，赚钱最多的民营企业也是农业。我国农业科技和农业发展与世界相比，还存在较大的差距，并面临着严峻挑战，这无疑需要大量的农业人才。目前，我国农业改革已进入关键时期，教学、科研、管理等方面农业人才的需求呈现出强劲势头。

从报考研究生的人数和录取比例来看，农林院校不再是冷门，甚至一些专业颇受考生的青睐。2003 年以来，农林院校的研究生报考人数持续增长，有的院校报考人数增长率甚至超过当年全国研究生报名人数的平均增长率。一般情况下，农林院校研究生的录取比率在 3：1 左右，部分专业竟达到了 8：1 甚至 10：1，如生物学、食品安全、农药检测、公共卫生等专业。这些专业正是伴随着近年来的社会热点事件如 SARS 疫情、禽流感的出现及人们公共卫生意识的增强而日益火爆起来的。

随着经济建设的快速发展、“十一五”规划战略的实施和科教兴国战略、人才强国战略的进一步实施，社会对高素质专业人才的需求更加迫切。为了配合全国各农林院校加强高素质、知识型人才的培养，西北工业大学出版社精心策划和组织编写了“农林三导”丛书，首批推出 9 种公共基础课辅导用书。

本套丛书具有以下 4 大特点。

1. 选题新颖，独树一帜

根据市场需求，2001 年西北工业大学出版社在全国首家有针对性、有计划性地推出整套农林院校课程的辅导学习用书——“农林提高与应试”丛书，填补了市场空白，一改广大农林院校学生找不到相关辅导书的尴尬局面，引起全国农林院校师生的良好社会反响，体现了很好的

社会效益与经济效益。而今，根据广大师生的需求，再次重拳出击，推出“农林三导”丛书，涵盖导教、导学、导考三个层面，更好地体现“贴近读者，贴近需求，贴近实际”。

2. 紧扣大纲，严把尺度

丛书紧紧围绕国家教育部制定的教学大纲和研究生入学考试大纲，以全国通用的主流教材为蓝本，按照“内容提要—知识结构图—教学要求、重点、难点及考点—典型题解析—课后习题选解—学习效果测试及答案”的主线，把握课程内容的主旨和要害，使读者按照由浅入深、循序渐进，从感性认知、实际应用到理性认知的科学认知规律最快捷、最有效地掌握本门课程。

3. 重视能力，提高技巧

丛书严格遵从不管是课程学习还是过关考试，其最终目的都是为了提高学生分析问题、解决问题、举一反三的能力这一主旨，重在通过简明扼要的基础要点、独具特色的知识结构图以及绝对经典的典型题解析来引导学生掌握学习理论知识和解决实际问题的方法与技巧，以提高个人的综合素质和综合能力，为今后个人的良好发展奠定坚实的基础。

4. 一流作者，更胜一筹

参加丛书编写的作者，均是全国重点农林院校从事相关课程教学的资深骨干教师。他们教学经验丰富，对于课程相当熟识，深谙教学、学习和考试的规律及关键所在，因此，在丛书内容的取舍、材料的选编以及文字表述等方面能更胜一筹，使丛书详略得当，重点突出，内容精益求精，分析一针见血，讲解简明扼要，注释切中要害。

本套丛书的出版得到了广大师生读者的支持和关心，西北农林科技大学、中国农业大学、东北农业大学、华中农业大学、华南农业大学、南京农业大学、西南大学等单位的有关人士也为丛书的出版出谋划策，提出了许多建设性的意见和建议。84 岁高龄的中国工程院院士、西北农林科技大学李振岐①教授，献身教育事业 50 余年，德高望重，学识渊博，他自 2001 年在百忙之中出任“农林提高与应试”丛书的编委会主任以来，一直十分关注农林方面的教材、教辅出版工作。为此，我们一并表示衷心的感谢。

我们坚信，这套丛书将为广大农林院校的师生提供有力的帮助，也必将成为在知识海洋中遨游的学子们不断搏击、获取胜利的力量源泉。

丛书编委会

2006 年 6 月

① 李振岐，男，1922 年生，中国工程院院士，植物病理学家和小麦锈病专家，我国小麦锈病研究和植物免疫学教学的主要奠基人之一，主编了我国第一部《植物免疫学》全国统编教材。现为西北农林科技大学植物保护学院教授、博士生导师，西北农林科技大学学术委员会常委，陕西省委省政府特邀咨询委员。

前 言

微积分是农林院校一门重要的基础课,是许多专业的学生学好后继课程的必需条件,而且也是农林院校有关专业硕士研究生入学考试的必考内容。

为了加强学生对所学内容的深入理解,帮助他们了解解题规律,掌握解题的方法与技巧,提高应试解题能力,强化技能训练,我们根据农林院校的教学特点,编写了"农林三导"丛书之一的《微积分导教·导学·导考》一书。

本书涵盖了教学大纲和研究生考试大纲涉及的全部内容,并突出了重点和难点内容。本书内容共分 8 章,每章均设计了 6 个板块。

(1)*内容提要*。简要介绍本章内容,列出基本概念、重要定理和公式,突出考点的核心知识。

(2)*知识结构图*。用框图形式列出本章的主要内容,并指出了各知识点的有机联系。

(3)*教学要求、重点、难点及考点*。包括教学基本要求,重点、难点指南,考点指南 3 块,言简意赅。其目的是使读者明确本章的重点、难点和考点以及应掌握的程度,并将其内容加以细化和归纳,使学生能够正确把握教学、学习和考试的要求。

(4)*典型题解析*。从历年本科生期末试题和历年研究生入学考试题以及各教材综合题中精选出典型题目,通过对典型题的解题分析,归纳出微积分中一些问题的解决方法和技巧,使读者可以举一反三、触类旁通。这也是本章的主要部分。

(5)*课后习题选解*。由于篇幅所限,对高等教育出版社"面向 21 世纪课程教材"《微积分》(王乃信主编)的部分课后习题作了详细解答,希望读者在学习过程中先独立思考,自己动手解题,然后再对照检查,不要依赖解答。

(6)*学习效果测试及答案*。根据微积分课程考试和考研内容,精选了适当的自测题,并附有答案和部分提示。读者可以通过这些测试题进一步掌握解题要领,巩固和加深对基本概念的理解,增强解决问题的能力,并检验自己对所学知识掌握的程度。

本书从指导课程教学、学习和考试、考研的角度,通过对大量涉及内容广、类型多、技巧性强的习题的解答,揭示了微积分的解题方法、解题规律和解题技巧,对于提高读者分析问题的能力,理解基本概念和理论,开拓解题思路,全面增强综合素质,会收到良好的效果。

本书可作为高等农林院校各专业本、专科生的课程辅导及应试参考书,也可作为报考硕士研究生的考生进行强化训练的指导书,同时可为教师教学提供参考。

本书的第 1～3 章由卢恩双编写,第 4～6 章由史美英编写,第 7～8 章由王经民编写,单青

松参加了部分内容的编写工作。全书由卢恩双负责统稿和定稿。在此,对西北农林科技大学应用数学系的全体老师致以诚挚的谢意,对本书选用的参考文献的作者表示衷心的感谢。

由于编者水平所限,不当之处在所难免,诚请广大读者批评指正。

编　者

2006 年 5 月

目 录

第 1 章　函数、极限、连续

1.1　内容提要

1.1.1　函数的概念与性质

1. 函数的定义

设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，如果对于每个数 $x \in D$，变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y = f(x)$. 数集 D 叫做这个函数的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量.

2. 复合函数

设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 U，$u = \varphi(x)$ 的定义域为 D，值域为 U^*，且 $U^* \subset U$，则称 $y = f[\varphi(x)]$ 为定义在 D 上的复合函数，u 称为中间变量.

3. 反函数

在一定条件下，如果能由 $y = f(x)$ 确定出函数 $x = \varphi(y)$，这时 y 成了自变量，而 x 成了因变量，则称 $x = \varphi(y)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数，$f(x)$ 称为直接函数.

4. 分段函数

如果一个函数在其定义域内，对应于不同的区间段有着不同的表达形式，则该函数称为分段函数.

5. 初等函数

由基本初等函数与常数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤构成，且能用一个解析式子表示的函数，称为初等函数.

6. 函数的性质

(1) 奇偶性　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对于任意给定的 $x \in D$ 有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；若对于任意给定的 $x \in D$，有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

(2) 有界性　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在 $M > 0$，使得对于任意给定的 $x \in D$，有 $|f(x)| \leqslant M$，则称 $f(x)$ 有界，或称 $f(x)$ 为有界函数，反之，称 $f(x)$ 为无界函数.

(3) 周期性　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若 $T \neq 0$，使得对于任给的 $x \in D$，有 $x + T \in D$，且 $f(x+T) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 为周期.

(4) 单调性　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，对于任意的 $x_1, x_2 \in D$，当 $x_1 < x_2$ 时，若 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调增加；若 $f(x_1) < f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 D 上严格单调增加；当 $x_1 < x_2$ 时，若 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 D 上单调减少；若 $f(x_1) > f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 D 上严格单调减少.

1.1.2 极限概念

1. 数列极限定义

如果数列$\{x_n\}$与常数A有下列关系:对于任意给定的正数ε,总存在正数N,使得当$n>N$时$|x_n-A|<\varepsilon$成立,则称A为数列$\{x_n\}$的极限,记作$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

2. 函数极限定义

设函数$f(x)$在点x_0的某一去心邻域内有定义,如果对于任意给定的正数ε,总存在正数δ,使得适合不等式$0<|x-x_0|<\delta$的一切x,对应的函数值$f(x)$满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称常数A为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限,记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

设函数$f(x)$当$|x|$大于某一正数时有定义,如果对于任意给定的ε,总存在着正数X,使得对于适合不等式$|x|>X$的一切x,对应的函数值$f(x)$都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称常数A为函数$f(x)$当$x\to\infty$时的极限,记作$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

3. 左右极限

对任给$\varepsilon>0$,总存在$\delta>0$,当$x-x_0>\delta$(或$x_0-x>\delta$)有$|f(x)-A|<\varepsilon$,就称A为函数$f(x)$当$x\to x_0^+$(或$x\to x_0^-$)时的右(或左)极限,记作$f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$(或$f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$).

类似可定义$x\to+\infty$和$x\to-\infty$时函数的极限.

4. 函数$f(x)$有极限的充要条件

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x_0+0)=f(x_0-0)=A$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=A$$

5. 极限的性质

设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则

(1) 唯一性　极限存在,A唯一.

(2) 有界性　$f(x)$是局部有界的,即存在$\delta>0,M>0$,使得当$0<|x-x_0|<\delta$时,有$|f(x)|\leqslant M$.

(3) 保号性　若$A>0$(或$A<0$),则存在$\delta>0$,当$0<|x-x_0|<\delta$时,有$f(x)>0$(或$f(x)<0$).若存在$\delta>0$,当$0<|x-x_0|<\delta$时,有$f(x)>0$(或$f(x)<0$),则$A\geqslant0$(或$A\leqslant0$).

(4) 单调性　若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,则

① 若$A>B$,则存在$\delta>0$,当$0<|x-x_0|<\delta$时$f(x)>g(x)$;

② 若存在$\delta>0$,当$0<|x-x_0|<\delta$时$f(x)>g(x)$,则$A\geqslant B$.

(5) 夹挤性　若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$,且存在$\delta>0$,当$0<|x-x_0|<\delta$时有$f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)$,则有$\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$.

6. 极限四则运算法则

设$\lim f(x)=A$,$\lim g(x)=B$,则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$.

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$.

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}(\lim g(x)=B\neq 0)$.

1.1.3 无穷小量与无穷大量

1. 无穷小量与无穷大量概念

把极限为零的量称为无穷小量;绝对值无限增大的变量称为无穷大量.

2. 无穷小比较

设 α,β 均为无穷小.

(1) 若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$,则称 β 是比 α 高阶的无穷小.

(2) 若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$,则称 β 是比 α 低阶的无穷小.

(3) 若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=C$(常数 $C\neq 0$),则称 β 与 α 是同阶无穷小.

(4) 若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$,则称 β 与 α 是等价无穷小.

(5) 若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=C$(常数 $C\neq 0$),则称 β 为 α 的 k 阶无穷小.

3. 无穷小的性质

(1) 有限个无穷小的和、差、积仍为无穷小.

(2) 有界函数与无穷小的乘积为无穷小.

(3) 如果 $f(x)$ 是无穷大,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷小;如果 $f(x)$ 是无穷小,且 $f(x)\neq 0$,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷大.

(4) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则 $f(x)=A+\alpha$(α 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小);反之,若 $f(x)-A=\alpha$ 是无穷小,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

1.1.4 函数的连续性

1. 连续性概念

函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义,且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 或 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$,称 $f(x)$ 在 x_0 点连续.

(1) 单侧连续　若 $f(x_0+0)=f(x_0)$(或 $f(x_0-0)=f(x_0)$),则称函数在 x_0 点右(左)连续.

(2) 函数在一点连续的充要条件　左右连续.

(3) 区间上的连续函数　函数在区间上处处连续.

(4) 函数在一点间断　函数在 x_0 点不连续就称函数在 x_0 间断. 若 $f(x_0+0)$ 与 $f(x_0-0)$ 都存在,称 x_0 为第一类间断点;特别当 $f(x_0+0)=f(x_0-0)$ 时,称 x_0 为 $f(x)$ 的可去间断点. 除了第一类间断点的间断点都称为第二类间断点;特别当 $f(x_0+0)$ 或 $f(x_0-0)$ 为无穷大时,称 x_0 为 $f(x)$ 的无穷间断点.

2. 连续函数的运算性质

(1) 有限多个连续函数之和、差、积仍是连续函数,两个连续函数的商当分母上的函数不为零时,仍是连

续函数，连续函数的复合函数仍是连续函数．在某区间上单调连续函数的反函数在对应区间上单调连续．

(2) 基本初等函数在其定义域内是连续的，初等函数在其定义区间上是连续的．

3. 闭区间上连续函数的性质

设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续．

(1)（最大值最小值定理） $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上至少取得最大值和最小值各一次．

(2)（介值定理） 对任一介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的常数 μ 至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi)=\mu$；特别当 $f(a)\cdot f(b)<0$ 时，至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi)=0$．

1.2 知识结构图

- 函数、极限、连续
  - 函数
    - 函数定义（定义域，对应规则）
    - 复合函数（中间变量，复合函数的分解）
    - 反函数
    - 分段函数
    - 初等函数
    - 函数的性质（奇偶性、有界性、周期性、单调性）
  - 极限
    - 极限定义
      - 数列极限（$\varepsilon - N$ 定义）
      - 函数极限（$\varepsilon - X$ 定义，$\varepsilon - \delta$ 定义）
    - 极限存在准则
      - 单调有界准则
      - 夹挤准则
    - 两个重要极限
      - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$
      - $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$
    - 无穷小与无穷大
      - 定义
      - 性质
      - 阶的比较
  - 连续
    - 连续的定义
    - 间断点的分类
    - 闭区间连续函数的性质

1.3 教学要求、重点、难点及考点

1.3.1 教学基本要求

(1) 理解函数的概念，掌握函数的表示方法，了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性．

(2) 了解反函数的概念，理解复合函数和分段函数的概念，熟练掌握复合函数的分解和复合过程．

(3) 掌握基本初等函数的性质及图形．

(4) 会建立简单实际问题中的函数关系.

(5) 理解极限的概念,了解左、右极限的概念及极限存在与左右极限之间的关系.

(6) 了解极限的性质,掌握极限四则运算法则,了解极限存在的两个准则(夹挤准则和单调有界准则),会用两个重要极限求函数的极限.

(7) 理解无穷小量的概念,会对无穷小量的阶进行比较,掌握无穷小量的运算法则及函数极限与无穷小量的关系的定理.

(8) 理解函数连续性的概念,会判断函数间断点的类型.

(9) 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质.

1.3.2 重点、难点指南

重点:函数的概念(函数的表示法、函数的性质、反函数、复合函数、分段函数、应用题函数关系式的建立),极限概念(求极限的方法、两个重要极限),函数连续概念(连续的定义、间断点的分类、连续函数的性质).

难点:既要准确理解极限的概念和极限存在的充要条件,又要能正确求出各种极限,特别是求极限的方法很多;并且会在综合题中用到极限和闭区间连续函数的性质.

1.3.3 考点指南

(1) 直接计算给定的极限或给定极限值反过来确定式子中的常数.

(2) 讨论函数的连续性,判断间断点的类型.

(3) 讨论分段函数的极限问题.

(4) 无穷小的比较.

(5) 讨论连续函数在给定区间的零点或方程在给定区间有无实根.

(6) 常见的题型为填空题、选择填空题、计算题、证明题等.

1.4 典型题解析

例 1.1 判别下列各组函数是否相等.

(1) 函数 $f(x) = \lg x^2$ 与 $g(x) = 2\lg x$;

(2) 函数 $f(x) = \sqrt{x^2}$, $g(x) = |x|$ 与 $h(x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$.

解 (1) 由于 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,而 $g(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,故 $f(x) \neq g(x)$.

(2) 由于 $f(x)$,$g(x)$,$h(x)$ 的定义域均为 $(-\infty, +\infty)$,且对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$ 均有 $f(x) = g(x) = h(x) = |x|$,故 $f(x) = g(x) = h(x)$.

【评注】 当且仅当给定的函数,其定义域和对应关系完全相同时,才表示同一函数,否则表示不同的函数.

例 1.2 已知 $f(\sin \frac{x}{2}) = 1 + \cos x$,求 $f(\cos \frac{x}{2})$.

分析 对 $f(x) = 1 + x$ 求 $f(\cos \frac{x}{2})$,读者并不感到困难,只须将 x 换成 $\cos \frac{x}{2}$ 即可. $f(\cos \frac{x}{2}) =$

$1+\cos\frac{x}{2}$. 此题的关键是先将 $f(\sin\frac{x}{2})=1+\cos x$ 进行变形，变成我们熟悉的形式．

解法 1 变外面

$$f(\sin\frac{x}{2})=1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}=2(1-\sin^2\frac{x}{2})$$

得到

$$f(\sin\frac{x}{2})=2(1-\sin^2\frac{x}{2})$$

于是

$$f(\cos\frac{x}{2})=2(1-\cos^2\frac{x}{2})=2\sin^2\frac{x}{2}=1-\cos x$$

解法 2 变里面

$$f(\cos\frac{x}{2})=f[\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2})]=f(\sin\frac{\pi-x}{2})$$

由 $f(\sin\frac{x}{2})=1+\cos x$ 就可得到

$$f(\sin\frac{\pi-x}{2})=1+\cos(\pi-x)=1-\cos x$$

即

$$f(\cos\frac{x}{2})=1-\cos x$$

【评注】 两种方法的核心是“变形”，变形的目的是向自己熟悉的形式靠近，从而达到解决问题的目的．

例 1.3 求 $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{\lg\cos x}$ 的定义域.

解 只有 $\sqrt{4-x^2}$，$\lg\cos x$ 同时有意义，且分母不为 0 的 x 才是 $f(x)$ 的定义域，即

$$\begin{cases}4-x^2\geqslant 0\\ \cos x>0\\ \cos x\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2\\ 2n\pi-\frac{\pi}{2}<x<2n\pi+\frac{\pi}{2}\quad(n=0,\pm 1,\cdots)\\ x\neq n\pi\end{cases}$$

上述不等式组的解为 $(-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2})$，因此 $f(x)$ 的定义域为 $(-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2})$.

【评注】 求复杂函数的定义域，就是求解由简单函数的定义域所构成的不等式组之解集．

例 1.4 求 $y=\frac{2x-3}{3x+2}$ 的反函数．

解 $x=\frac{2y-3}{3y+2}$，$3xy+2x=2y-3$，$2y-3xy=2x+3$，$y=\frac{3+2x}{2-3x}$，即为所求的反函数.

【评注】 求反函数的步骤是：将原函数中的 y 换成 x，x 换成 y，再求出 y 即可.

例 1.5 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 2\\ 2, & |x|>2\end{cases}$，求 $f[g(x)]$.

解 $f[g(x)]=\begin{cases}1, & |g(x)|\leqslant 1\\ 0, & |g(x)|>1\end{cases}$ 对于 $|g(x)|\leqslant 1$，由

$$\{x\,|\,|2-x^2|\leqslant 1\}\cap\{x\,|\,|x|\leqslant 2\}$$

得

$$x\in[-\sqrt{3},-1]\cup[1,\sqrt{3}]$$

对于 $|g(x)|>1$，由

$$D_1=\{x\,|\,|2-x^2|>1\}\cap\{x\,|\,|x|\leqslant 2\}$$

及 $D_2=\{x \mid |2-x^2|>1\} \cap \{x \mid |x|>2\}$，得

$$x \in D_1 \cup D_2=\{(-2,-\sqrt{3}) \cup (-1,1) \cup (\sqrt{3},2)\} \cup \{(-\infty,-2) \cup (2,+\infty)\}=$$
$$(-\infty,-\sqrt{3}) \cup (-1,1) \cup (\sqrt{3},+\infty)$$

于是
$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & x \in [-\sqrt{3},-1] \cup [1,\sqrt{3}] \\ 0, & x \in (-\infty,-\sqrt{3}) \cup (-1,1) \cup (\sqrt{3},+\infty)\end{cases}$$

【评注】 用两分段函数构造复合函数时，应把中间变量各分段部分依次“代入”到另一函数各分段部分自变量的位置，然后考察各分段部分的定义域．解题中易出现简单地将 $u=g(x)$ 代入 $f(u)$ 中，只考虑对应分段上 x 的取值范围，而忽略 $g(x)$ 各分段上对 x 的要求，从而导致错误的结论．

例 1.6 下列函数中哪些是奇函数？哪些是偶函数？哪些既不是奇函数也不是偶函数？

(1) $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$；　　(2) $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$；

(3) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；　　(4) $f(x)=(x^2+x)\sin x$.

解 (1) $f(-x)=\lg\dfrac{1-(-x)}{1+(-x)}=\lg\dfrac{1+x}{1-x}=-\lg\dfrac{1-x}{1+x}$，故有 $f(-x)=-f(x)$，则 $f(x)$ 是奇函数．

(2) $f(-x)=\dfrac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$，故有 $f(x)=f(-x)$，则 $f(x)$ 是偶函数．

(3) $f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\ln\dfrac{(-x+\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}}=$

$$\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

故有 $f(-x)=-f(x)$，则 $f(x)$ 是奇函数．

(4) $f(-x)=-(x^2-x)\sin x$，它不满足 $f(x)=f(-x)$ 也不满足 $f(-x)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 既不是偶函数也不是奇函数．

例 1.7 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0 \\ x^2+x, & x>0\end{cases}$，则下式中正确的是(　　).

A. $f(-x)=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 0 \\ -(x^2+x), & x>0\end{cases}$　　B. $f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0 \\ x^2-x, & x>0\end{cases}$

C. $f(-x)=\begin{cases}-(x^2+x), & x<0 \\ -x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$　　D. $f(-x)=\begin{cases}x^2-x, & x<0 \\ x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$

解法 1 当 $x\geqslant 0$ 时，$-x\leqslant 0$，由 $f(x)$ 的定义，$f(-x)=(-x)^2=x^2$. 当 $x<0$ 时，$-x>0$，则 $f(-x)=(-x)^2+(-x)=x^2-x$，即 D 项正确．

解法 2 令 $y=-x$，则当 $x\leqslant 0$ 时，$y\geqslant 0$；$x>0$ 时，$y<0$，代入 $f(x)$ 的表达式得

$$f(-y)=\begin{cases}(-y)^2, & y\geqslant 0 \\ (-y)^2+(-y), & y<0\end{cases}$$

即有
$$f(-y)=\begin{cases}y^2-y, & y<0 \\ y^2, & y\geqslant 0\end{cases}$$

这与 D 项中的函数是相同的．

【评注】 此题也可利用 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 的图像关于 y 轴对称的道理，直接从图形上判断 D 项是正确的．

例 1.8 设 $f(x)=\frac{1}{2}(x+|x|)$，$g(x)=\begin{cases}e^{-x},x<0\\x^2,x\geqslant 0\end{cases}$，则 $f[g(x)]=$ ________，$g[f(x)]=$ ________.

解 答案为

$$f[g(x)]=\begin{cases}e^{-x}, & x<0\\x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$$

$$g[f(x)]=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0\\0, & x<0\end{cases}$$

分析 由 $g(x)\geqslant 0$，得

$$f[g(x)]=\frac{1}{2}[g(x)+|g(x)|]=g(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x<0\\x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$$

由 $f(x)\geqslant 0$，得

$$g[f(x)]=f^2(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0\\0, & x<0\end{cases}$$

【评注】 本题主要考查分段函数的复合.要求两个分段函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 的复合函数 $y=f[\varphi(x)]$，实际上就是将 $u=\varphi(x)$ 代入 $y=f(u)$.而这里的关键是要搞清 $u=\varphi(x)$ 的函数值 $\varphi(x)$ 落在 $y=f(u)$ 的定义域的哪一部分.

例 1.9 若函数 $f(x)$ 在其定义域上的一切 x 恒有 $f(x)=f(2a-x)$，则称函数 $f(x)$ 对称于 $x=a$，证明：如果函数对称于 $x=a$ 及 $x=b(a\neq b)$，则函数 $f(x)$ 是周期函数.

证 不妨假设 $b>a$，因函数 $f(x)$ 对称于 $x=a$ 及 $x=b$，所以有恒等式

$$f(x)=f(2a-x) \tag{1.1}$$

及

$$f(x)=f(2b-x) \tag{1.2}$$

在式(1.2)中将 x 换为 $2a-x$ 得

$$f(2a-x)=f(2b-2a+x)$$

再利用式(1.1)得恒等式

$$f(x)=f[(2b-2a)+x]$$

所以函数 $f(x)$ 是以 $2b-2a>0$ 为周期的周期函数.

例 1.10 设 $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$，求 $f[f(x)]$，$f\left[\frac{1}{f(x)}\right]$.

解

$$f[f(x)]=\frac{1}{1-f^2(x)}=\frac{1}{1-\frac{1}{(1-x^2)^2}}=\frac{(1-x^2)^2}{x^2(x^2-2)}$$

$$f\left[\frac{1}{f(x)}\right]=\frac{1}{1-\left(\frac{1}{f(x)}\right)^2}=\frac{f^2(x)}{f^2(x)-1}=\frac{\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2}{\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2-1}=\frac{1}{x^2(2-x^2)}$$

例 1.11 证明：定义在对称区间 $(-L,L)$ 上的任意函数 $f(x)$ 可表示为一个奇函数与一个偶函数的和.

证 令

$$F(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$$

$$G(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$$

因为