DAXUEWULIXUEXIZHIDAO

魏有峰　罗中杰　主编

大学物理
学习指导

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书基本涵盖了大学物理(工科类)的诸多方面，包括力学、热学、振动与波、光学、电磁学、近代物理等．每章均由内容提要、典型题解、巩固练习三部分组成，内容提要力求做到简明扼要、概念准确、描述无误；典型题解所选例题经典而独特，对读者提高分析和解决问题的能力有较大帮助；巩固练习以基础练习和计算题为重点，是为学生学习本章后检查学习效果提供的一种手段．

本书可供工科院校师生使用，也可作为其他本专科非物理专业及成人自学考试的教学用书．

图书在版编目（CIP）数据

大学物理学习指导/魏有峰，罗中杰主编．－北京：科学出版社，2005

ISBN 7-03-016284-6

Ⅰ.大… Ⅱ.①魏…②罗… Ⅲ.物理学－高等学校－教学参考资料 Ⅳ.O4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 109636 号

责任编辑：江 兰 张颖兵

责任印制：高 嵘／封面设计：曹 刚 帅正兰

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉大学出版社印刷总厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

＊

2005 年 10 月第 一 版 开本：B5（720×1000）

2005 年 10 月第一次印刷 印张：26 3/4

印数：1～5 000 字数：525 000

定价：34.80 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

《大学物理学习指导》编委会

主　编： 魏有峰　罗中杰

副主编： 陈琦丽　唐吉玉　王　铬

编　委：（按姓氏笔画排序）

万珍珠　马远新　王　铬　王文汉　王希成　左小敏
左谨平　石铁钢　龙光芝　刘忠池　毕　洁　汤型正
杜秋皎　李铁平　张光勇　陈　刚　陈琦丽　苑新喜
周俐娜　罗中杰　姜大华　唐吉玉　黄宏伟　韩艳玲
程永进　蔡晓斌　谭季鹿　魏有峰

前　　言

大学物理课程是高等工科院校一门重要的基础理论课程，它以物理学基础知识为主要内容．工科大学生在学习大学物理课程时普遍感觉到物理学内容繁杂，分支多,抓不住重点，分不清难点．大多数同学听着明白，做起题来却无从下手，困难重重．这主要与物理学本身的内容体系和学生的学习方法有关．为了解决这一难题，本着删繁就简、突出重点的原则，我们编写了本书，以期帮助大学物理课程的学习者深入理解和掌握大学物理的基本概念、基本规律，进一步提高和增强分析问题和解决问题的能力，充分发挥大学物理学作为重要基础学科所应起到的重要作用．

全书共分为 20 章，基本涵盖了大学物理的全部内容，包括力学、热学、振动与波、光学、电磁学、近代物理等．每一章分为内容提要、典型题解、巩固练习三部分内容．内容提要力求做到概念、规律准确，重点、难点突出．典型题解所选例题既体现出大学物理学的基本思想，又达到举一反三、启迪智慧、提高解决实际问题能力的目的．巩固练习部分题型灵活,难易结合，为学习本章后检查学习效果提供了一种手段．总体来讲，本书注意把握物理学体系的基本框架；注重物理学思维方法的转变；着眼于实际应用能力的提高．

本书是各位编者结合多年的教学实践共同编写的一本大学物理学习指导教材．既供工科院校师生使用，也可作为其他本专科院校非物理专业及成人自学考试的教学用书和参考书．

本书由魏有峰、罗中杰任主编,参与编写的还有唐吉玉、陈绮丽、王铬等．限于编者的学识，书中定有不当之处，诚望读者批评指正．

编　者

2005 年 8 月

目　　录

第一章　质点运动学

一、内 容 提 要

1. 物质运动的绝对性与运动描述的相对性

世界是物质的，物质是运动的，运动是物质的根本属性和存在方式．从哲学的意义看来，运动是绝对的，而在自然界中，物体的运动又是相对的．通常所说的某物静止，某物以多大的速度运动总是相对于一定的参照物而言的．所选参照物不同，对同一物体运动的描述也不同，这称为运动描述的相对性．运动与静止的关系是符合对立统一规律的．

2. 参考系

描述物体运动时作为参考的其他物体和一套同步的钟．

3. 坐标系

固定于参考系之上的刚性杆架，用于定量描述运动物体的空间位置．常用的坐标系有直角坐标系、柱坐标系、极坐标系、球坐标系和自然坐标系等．

4. 运动函数

运动质点位置随时间变化关系式．直角坐标系下位置矢量和运动叠加原理：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$$

位移矢量

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)$$

5. 速度和加速度

速度 $\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$；加速度 $\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$．在直角坐标系下

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}\qquad \boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}$$

6. 运动学中的两类问题

已知物体的运动函数求物体的速度和加速度(微商)；已知物体的加速度求其运动规律(积分)．

7. 自然坐标系下平面曲线运动的描述

物体速度 $\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}$；加速度 $\boldsymbol{a}=\dfrac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}+\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}$．

8. 圆周运动

质点做圆周运动时，可引进角位移 $\Delta\boldsymbol{\theta}$、角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 和角加速度 $\boldsymbol{\beta}$ 来描述质点的运动．

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{d}t}\qquad \boldsymbol{\beta}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{d}t^2}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R}\boldsymbol{n} = \omega^2 R\boldsymbol{n} \qquad a_t = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} = \beta R\boldsymbol{\tau}$$

9. 相对运动

绝对速度等于相对速度与牵连速度的矢量和；在物体和动系都无转动的条件下，物体的绝对加速度等于相对加速度和牵连加速度的矢量和.

二、典型题解

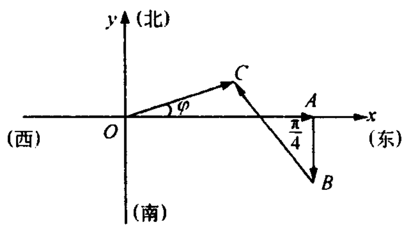

图 1.1

例 1.1 已知某人从一点出发，25s 内向东 30m，又 10s 内向南 10m，再 15s 向西北 18m，如图 1.1 所示. 试求：

(1) 合位移的大小和方向.

(2) 求每一分位移中的平均速度，合位移的平均速度及全路程的平均速率.

解 (1) 合位移

$$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BC} = 30\boldsymbol{i} + (-10)\boldsymbol{j} + 18\left(-\cos\frac{\pi}{4}\boldsymbol{i} + \sin\frac{\pi}{4}\boldsymbol{j}\right) = 12.27\boldsymbol{i} + 2.73\boldsymbol{j}$$

合位移的大小 $$|\overline{OC}| = \sqrt{12.27^2 + 2.73^2} = 17.48(\text{m})$$

合位移的方向 $$\varphi = \arctan\frac{2.73}{12.27} = 8.98° \quad (东偏北)$$

(2) $$\overline{\boldsymbol{v}_1} = \frac{\overline{OA}}{t_1} = \frac{30}{25}\boldsymbol{i} = 1.2\boldsymbol{i}\ (\text{m/s})$$

$$\overline{\boldsymbol{v}_2} = \frac{\overline{AB}}{t_2} = \frac{-10}{10}\boldsymbol{j} = -1.0\boldsymbol{j}\ (\text{m/s})$$

$$\overline{\boldsymbol{v}_3} = \frac{\overline{BC}}{t_3} = \frac{18\left(-\cos\frac{\pi}{4}\boldsymbol{i} + \sin\frac{\pi}{4}\boldsymbol{j}\right)}{15} = (-0.85)\boldsymbol{i} + 0.85\boldsymbol{j}\ (\text{m/s})$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{\overline{OC}}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{17.27\boldsymbol{i} + 2.73\boldsymbol{j}}{50} = 0.35\boldsymbol{i} + 0.06\boldsymbol{j}\ (\text{m/s})$$

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{30 + 10 + 18}{t_1 + t_2 + t_3} = 1.16\ (\text{m/s})$$

例 1.2 已知一质点在 xOy 平面内运动，运动方程为 $x = 2t$；$y = 19 - 2t^2$. 求：

(1) 质点的运动轨道，并绘图.

(2) 第 1 秒到第 2 秒质点的平均速度.

(3) 质点的速度和加速度.

(4) 在什么时刻位置矢量恰好和速度矢量垂直？这时它们的 x，y 分量各是多

少?

(5) 什么时刻质点离原点最近? 并算出这一距离.

解 (1) 已知质点运动方程

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 19 - 2t^2 \end{cases}$$

消去时间 t，得

$$y = 19 - \frac{1}{2}x^2$$

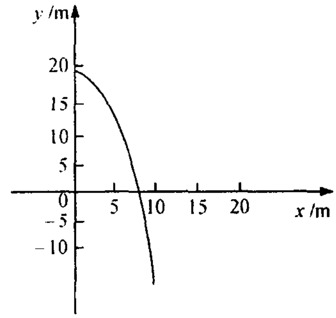

图 1.2

轨道为顶点 (0,19) 的抛物线，如图 1.2 所示.

(2) 位矢 $\boldsymbol{r} = 2t\boldsymbol{i} + (19 - 2t^2)\boldsymbol{j}$，第 1 秒到第 2 秒的平均速度

$$\overline{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{r}(2) - \boldsymbol{r}(1)}{2-1} = 2\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j}$$

大小

$$|\overline{\boldsymbol{v}}| = \sqrt{2^2 + 6^2} = 6.32\ (\text{m/s})$$

方向

$$\varphi = \arctan\frac{-6}{2} = -71.6° \quad (x\text{ 方向偏 } -y)$$

(3)

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} = 2\boldsymbol{i} - 4t\boldsymbol{j}\ (\text{m/s})$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (-4)\boldsymbol{j}\ (\text{m/s}^2)$$

(4) $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v} = 0$，即

$$[2t\boldsymbol{i} + (19 - 2t^2)\boldsymbol{j}] \cdot (2\boldsymbol{i} - 4t\boldsymbol{j}) = 0$$

解得

$$t = 0\text{s} \qquad t = 3\text{s} \qquad t = -3\text{s}\ \ (\text{舍去})$$

$t = 0$s 时，有

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 19\text{m} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x = 2\text{m/s} \\ v_y = 0 \end{cases}$$

$t = 3$s 时，有

$$\begin{cases} x = 6\text{m} \\ y = 1\text{m} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x = 2\text{m/s} \\ v_y = -12\text{m/s} \end{cases}$$

(5)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(2t)^2 + (19 - 2t^2)^2}$$

令

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{8t + 2(19 - 2t^2)(-4t)}{2r} = 0$$

解得

$$t = 0 \qquad t = 3\text{s} \qquad t = -3\text{s}\ \ (\text{舍去})$$

经判断知 $t = 3$s 时，r 有极小值且 $r_{\min} = 6.08$m .

例 1.3 一质点的曲线运动方程为 $x = R\cos\omega t; y = R\sin\omega t$，式中：$R, \omega$ 为常数. 求质点对坐标系的矢径、轨道方程、速度、加速度、切向加速度和法向加速度.

解 如图 1.3 所示，取直角坐标系 xOy.

(1) 位置矢量

$$\boldsymbol{r} = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} = (R\cos\omega t)\boldsymbol{i} + (R\sin\omega t)\boldsymbol{j}$$

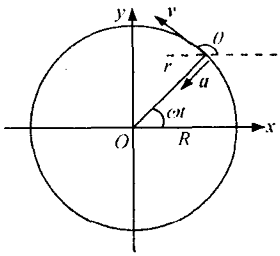

图 1.3

$$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2}=R$$

$$\tan\varphi=\frac{y}{x}=\frac{R\sin\omega t}{R\cos\omega t}=\tan\omega t$$

(2) 轨道方程为

$$x^2+y^2=R^2(\cos^2\omega t+\sin^2\omega t)=R^2$$

此轨道是一圆周线.

(3) $$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=(-R\omega\sin\omega t)\boldsymbol{i}+(R\omega\cos\omega t)\boldsymbol{j}$$

$$v=|\boldsymbol{v}|=\sqrt{R^2\omega^2\sin^2\omega t+R^2\omega^2\cos^2\omega t}=R\omega$$

$$\tan\theta=\frac{v_y}{v_x}=\frac{R\omega\cos\omega t}{-R\omega\sin\omega t}=-\cot\omega t$$

解得 $\theta=\omega t+\dfrac{\pi}{2}$，说明 $\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{r}$.

(4) $\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=(-R\omega^2\cos\omega t)\boldsymbol{i}+(-R\omega^2\sin\omega t)\boldsymbol{j}=-\omega^2\boldsymbol{r}$ ，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 反向.

$$a=|\boldsymbol{a}|=R\omega^2$$

(5) $$a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0 \qquad a_n=\frac{v^2}{R}=R\omega^2$$

上式说明：加速度不改变大小，仅改变方向.

例 1.4 长度为 a 的梯子 AB 静靠在垂直墙 OA 上，如图 1.4 所示. 若以匀速率 v_0 拉动梯脚 B.

(1) 证明梯子中点所描述的运动轨道是以 O 点为中心，半径为 $\dfrac{a}{2}$ 的圆弧.

(2) 求梯脚 B 离墙的距离为 $b(b<a)$ 的瞬间，梯子中点的速度和速率.

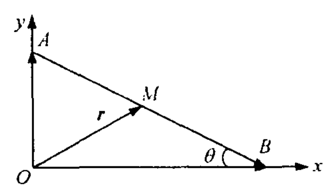

图 1.4

解 (1) 设 $\boldsymbol{r}$ 为 AB 中点 M 的位置矢量，则

$$\overline{OB}=a\cos\theta\boldsymbol{i} \qquad \overline{OA}=a\sin\theta\boldsymbol{j}$$

$$\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}=a\cos\theta\boldsymbol{i}-a\sin\theta\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{r}=\overline{OA}+\overline{AM}=\overline{OA}+\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}a(\cos\theta\boldsymbol{i}+\sin\theta\boldsymbol{j})$$

所以 $|\boldsymbol{r}|=\dfrac{1}{2}a$ ，即 M 点的运动轨迹是圆心在 O 点，半径为 $\dfrac{1}{2}a$ 的圆弧.

(2) 中点 M 的速度

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}a(\cos\theta\boldsymbol{i}+\sin\theta\boldsymbol{j})\right]=\frac{1}{2}a\left(-\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}\right)$$

对梯脚 B 的速度 v_B 有

$$v_B\boldsymbol{i}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{OB}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a\cos\theta\boldsymbol{i})=-a\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}$$

$$v_B=-a\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\quad 即\quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-\frac{v_B}{a\sin\theta}=\frac{-v_B}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

在 B 离墙的距离为 b 的瞬间

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

因此，所求 M 点的速度

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}v_B\left(\boldsymbol{i}-\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}\boldsymbol{j}\right)$$

速率
$$v=|\boldsymbol{v}|=\frac{av_B}{2\sqrt{a^2-b^2}}$$

例 1.5 高为 h 的平台上，有一质量为 m 的小车，用绳子跨过滑轮，在地面上以匀速度 v_0 向右拉动，如图 1.5 所示. 求当绳端 A 距平台距离为 x 时，小车的速度和加速度.

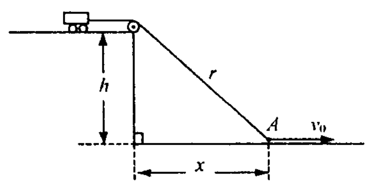

图 1.5

解 由图 1.5 可知

$$r^2=h^2+x^2$$

上式两边对时间 t 求导

$$2r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=v$，即为小车的速度. $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_0$，所以小车的速度

$$v=\frac{x}{r}v_0=\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}v_0$$

小车的加速度

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{v_0^2h^2}{(h^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

例 1.6 一质点由静止开始做直线运动，初始加速度为 a_0，其后加速度均匀增加，每经过 s 秒增加 a_0. 求质点的速度和位移.

解 由题意可知，加速度和时间的关系为 $a=a_0+\frac{a_0}{s}t$，代入加速度定义 $a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，分离变量并积分有

$$\int_0^v\mathrm{d}v=\int_0^t\left(a_0+\frac{a_0}{s}t\right)\mathrm{d}t$$

故质点速度

$$v = a_0 t + \frac{a_0}{2s} t^2 = \frac{dx}{dt}$$

由此知

$$\int_0^x dx = \int_0^t \left(a_0 t + \frac{a_0}{2s} t^2 \right) dt$$

故质点位移

$$x = \frac{a_0}{2} t^2 + \frac{a_0}{6s} t^3$$

例 1.7 大炮以 v_0 的初速率从山脚向仰角为 α 的斜坡发射时，若要射程最大，求瞄准角应满足的条件(不计空气阻力).

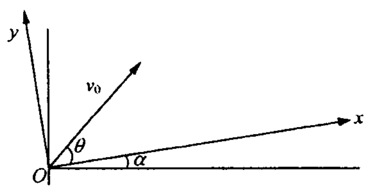

图 1.6

解 如图 1.6 所示，选取适当坐标系，可写出如下运动方程：

$$x = v_0 \cos\theta t - \frac{1}{2} g \sin\alpha t^2 \qquad (1)$$

$$y = v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2} g \cos\alpha t^2 \qquad (2)$$

令(2)式中 $y=0$，解得 $t = \frac{2v_0 \sin\theta}{g\cos\alpha}$，即完成射程所需时间. 将其代入(1)式，得

$$x = v_0 \cos\theta \frac{2v_0 \sin\theta}{g\cos\alpha} - \frac{1}{2} g \sin\alpha \left(\frac{2v_0 \sin\theta}{g\cos\alpha} \right)^2 = \frac{2v_0^2}{g\cos^2\alpha} [\cos(\theta+\alpha)\sin\theta]$$

令 $$\frac{dx}{d\theta} = \frac{2v_0^2}{g\cos^2\alpha} [-\sin(\theta+\alpha)\sin\theta + \cos(\theta+\alpha)\cos\theta] = \frac{2v_0^2}{g\cos^2\alpha} \cos(2\theta+\alpha) = 0$$

解得

$$2\theta + \alpha = \frac{\pi}{2} \qquad 2\theta + \alpha = \frac{3\pi}{2}\text{(舍去)}$$

即当 θ 满足 $\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ 时，射程最大.

例 1.8 一质点做抛体运动(忽略空气阻力)，如图 1.7 所示. 试讨论质点在运动过程中：

(1) $\frac{dv}{dt}$ 是否变化?

(2) $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ 是否变化?

(3) 求 A 点的曲率半径.

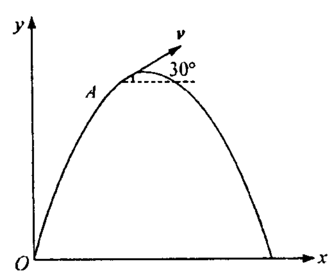

图 1.7

解 (1) 变化. $\frac{dv}{dt} = a_t = g\sin\alpha$. 其中 α 为重力加速度 $\boldsymbol{g}$ 与轨道法线的夹角，由于轨道上不同点所成的 α 角不同，所以 $\frac{dv}{dt} = a_t$ 也随之变化，即速率非均匀变化.

(2) 不变. $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{g}$ 为一常矢量.

(3) 轨道上 A 点处

$$a_t = -g\sin 30° = -\frac{g}{2} \qquad a_n = g\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}g$$

总加速度

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g} = \left(-\frac{g}{2}\right)\boldsymbol{\tau} + \frac{\sqrt{3}}{2}g\boldsymbol{n}$$

$$a_n = \frac{\sqrt{3}}{2}g = \frac{v^2}{\rho}$$

所以 A 点处轨道曲率半径

$$\rho = \frac{2\sqrt{3}v^2}{3g}$$

例 1.9 一个人扔石头的最大出手速率 $v = 25\text{m/s}$，他能击中一个与他的手水平距离 $L = 50\text{m}$ 而高 $h = 13\text{m}$ 的一个目标吗？在这个距离上他能击中的目标的最大高度是多少？

解 设初速度与水平面成 θ 角，则有

$$x = v_x t = v\cos\theta t \qquad y = v_y t - \frac{1}{2}gt^2 = v\sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2$$

当水平距离 $x = L$ 时，$t = \dfrac{L}{v\cos\theta}$，代入 y 中，有

$$y = L\tan\theta - \frac{1}{2}g\frac{L^2}{v^2\cos^2\theta} = L\tan\theta - \frac{gL^2}{2v^2}(\tan^2\theta + 1)$$

整理化简可得

$$\tan^2\theta - \frac{2v^2}{gL}\tan\theta + \frac{2v^2 y}{gL^2} + 1 = 0$$

以 $\tan\theta$ 为变量，一元二次方程的判别式

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(\frac{2v^2}{gL}\right)^2 - 4\left(\frac{2v^2 y}{gL^2} + 1\right)$$

令 $y = h = 13\text{m}$，代入上式得

$$\Delta = -0.14 < 0$$

$\tan\theta$ 无实数解，即不能击中题设目标．使判别式 $\Delta = 0$ 的 y 值为能击中目标的最大高度，据此可求出

$$y_{\max} = \frac{v^4 - g^2L^2}{2gv^2} = \frac{25^4 - 9.8^2 \times 50^2}{2 \times 9.8 \times 25^2} = 12.3\,(\text{m})$$

例 1.10 一质点从静止出发沿半径 $R = 3\text{m}$ 的圆周运动，已知切向加速度 $a_t = 3\text{m/s}^2$．求：

(1) 经多长时间总加速度恰好与半径成 45°角？

(2) 上述时间内质点经过的路程和角位移．

解 由题意知 $t = 0$，$v_0 = 0$，$a_t = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 3$，故有

$$\int_0^v \mathrm{d}v = \int_0^t 3\mathrm{d}t$$

得 $$v = 3t$$

则质点的法向加速度 $$a_{\mathrm{n}} = \frac{v^2}{R} = \frac{9t^2}{3} = 3t^2$$

所以质点总加速度 $$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{n}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{t}} = 3t^2\boldsymbol{n} + 3\boldsymbol{\tau}$$

(1) 总加速度与半径成 45°角时，$a_{\mathrm{n}} = a_{\mathrm{t}}$，即 $3t^2 = 3$，故 $t = 1\mathrm{s}$ 时总加速度恰好与半径成 45°角.

(2) 由速率定义 $v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$，且 $t = 0,\ s = 0$，有

$$\int_0^s \mathrm{d}s = \int_0^t 3t\mathrm{d}t$$

解得 $$s = \frac{3}{2}t^2$$

当 $t = 1\mathrm{s}$ 时，质点经过的路程 $s = \dfrac{3}{2} \times 1^2 = 1.5\,(\mathrm{m})$，角位移 $\Delta\theta = \dfrac{s}{R} = \dfrac{1.5}{3} = 0.5\,(\mathrm{rad})$.

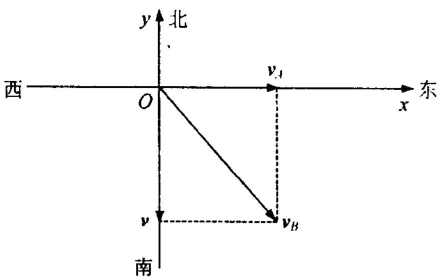

图 1.8

例 1.11 在湖面上以 3m/s 的速度向东行驶的 A 船上，看到 B 船以 4m/s 的速度从北面驶近 A 船. 求：

(1) 在湖岸上看，B 船速度如何?

(2) 如果 A 船的速度为 6m/s(方向不变)，在 A 船上看 B 船的速度又为多少?

解 (1) A 船相对于岸的速度 $\boldsymbol{v}_A = 3\boldsymbol{i}\,\mathrm{m/s}$，$B$ 船相对于 A 船的速度 $\boldsymbol{v} = (-4)\boldsymbol{j}\,\mathrm{m/s}$，用 $\boldsymbol{v}_B$ 表示 B 船相对于岸的速度，依据速度合成规律，有

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_A = 3\boldsymbol{i} + (-4)\boldsymbol{j}$$

故
$$v_B = |\boldsymbol{v}_B| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5\,(\mathrm{m/s})$$

$\tan\theta = \dfrac{-4}{3}$，$\theta = 53.1°$，即方向为东偏南 53.1°.

(2) 依题意 $\boldsymbol{v}_{A'} = 6\boldsymbol{i}\,\mathrm{m/s}$，此时 A 船上看 B 船的速度

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_B - \boldsymbol{v}_{A'} = [3\boldsymbol{i} + (-4)\boldsymbol{j}] - 6\boldsymbol{i} = (-3)\boldsymbol{i} + (-4)\boldsymbol{j}$$

故
$$v = |\boldsymbol{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5\,(\mathrm{m/s})$$

$\tan\theta = \dfrac{-4}{-3}$，$\theta = 53.1°$，即方向为西偏南 53.1°.

三、巩 固 练 习

(一) 基础题

1. 一物体在某瞬时，以初速度 v_0 从某点开始运动，在 Δt 时间内，经一长度

为 s 的曲线路径后，又回到出发点，此时速度为 $-v_0$，则在这段时间内：

(1) 物体的平均速率是__________.

(2) 物体的平均加速度是__________.

2. 一质点做半径为 0.1m 的圆周运动，其运动方程为：$\theta=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}t^2$，则其切向加速度 $a_t=$__________.

3. 质点沿半径为 R 的圆周运动，运动方程为 $\theta=3+2t^2$，则 t 时刻质点的法向加速度大小为 $a_n=$__________；角加速度 $\beta=$__________.

4. 一质点以 60° 仰角做斜上抛运动，忽略空气阻力. 若质点运动轨道最高点处的曲率半径为 10m，则抛出时初速度的大小为 $v_0=$__________.（重力加速度 g 按 $10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ 计.）

5. 已知质点运动方程为 $\boldsymbol{r}=\left(5+2t-\dfrac{1}{2}t^2\right)\boldsymbol{i}+\left(4t+\dfrac{1}{3}t^3\right)\boldsymbol{j}$，当 $t=2\mathrm{s}$ 时，$\boldsymbol{a}=$__________.

6. 一质点沿直线运动，其坐标 x 与时间 t 有如下关系：

$$x = A\mathrm{e}^{-\beta t}\cos\omega t \quad (A,\beta,\omega\text{ 皆为常数})$$

任意时刻 t 质点的加速度 $a=$__________；质点通过原点的时刻 $t=$__________.

7. 一质点从静止出发沿半径 $R=1\mathrm{m}$ 的圆周运动，其角加速度随时间 t 的变化规律是 $\beta=12t^2-6t$，则质点的角速度 $\omega=$____________；切向加速度 $a_t=$__________.

8. 一质点沿半径为 R 的圆周运动，其路程 s 随时间 t 变化的规律为 $s=bt-\dfrac{1}{2}ct^2$，式中：b，c 为大于零的常数，且 $b^2>Rc$. 质点运动的切向加速度 $a_t=$__________；法向加速度 $a_n=$__________；质点运动经过 $t=$__________时，$a_t=a_n$.

9. 有一水平飞行的飞机，速度为 v_0，在飞机上以水平速度 v 向前发射一颗炮弹，略去空气阻力并设发炮过程不影响飞机的速度. 则

(1) 以地球为参考系，炮弹的轨迹方程为__________.

(2) 以飞机为参考系，炮弹的轨迹方程为__________.

10. 一质点沿半径为 0.10m 的圆周运动，其角位置可用下式表示：$\theta=2+4t^3$.

(1) 当 $t=2s$ 时，切向加速度 $a_t=$__________.

(2) 当 a_t 的大小恰为总加速度大小的一半时，$\theta=$__________.

11. 一质点在 xOy 平面内运动，运动方程为 $x=2t$ 和 $y=19-2t^2$，则在第 2 秒内质点的平均速度大小 $v=$__________；2 秒末的瞬时速度大小 $v_2=$__________.

12. 有一旅客站在沿水平轨道匀速开行的列车最后一节车厢的平台上.

(1) 手拿石块，松手释放，则站在铁路路基旁的观察者所见石块的运动是___.

(2) 沿水平方向向车后掷出石块，使石块相对车的速度等于火车相对于地的速度，则站在铁路路基旁的观察者所见石块的运动是__________.

(二) 简答题

1. 描述质点加速度的物理量$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$，$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，$\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$有何不同？

2. 什么是矢径？矢径和位移矢量之间有何关系？怎样选取坐标原点才能够使两者一致？

(三) 证明题

一艘正在沿直线行驶的电艇，在发动机关闭后，其加速度方向与速度方向相反，大小与速度平方成正比，即$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv^2$，式中：$k$为常数. 试证明：电艇在关闭发动机后又行驶$x$距离时的速度$v=v_0\mathrm{e}^{-kx}$，式中：$v_0$是发动机关闭时的速度.

(四) 计算题

1. 一质点从静止开始做直线运动，开始加速度为a，此后加速度随时间均匀增加，经过时间τ后，加速度为$2a$，经过时间2τ后，加速度为$3a$，…. 求经过时间$n\tau$后，该质点的速度和走过的距离.

2. 球从高h处落向水平面，经碰撞后又上升到h_1处，如果每次碰撞后与碰撞前速度之比为常数，问球在n次碰撞后还能升多高？

3. 一飞机相对于空气以恒定速率v沿正方形轨道飞行，在无风天气其运动周期为T. 若有恒定小风沿平行于正方形的一对边吹来，风速$V=kv\ (k\ll 1)$. 求飞机沿原正方形(对地)飞行的周期的增加量.

4. 一物体悬挂在弹簧上做竖直振动，其加速度$a=-ky$，式中：k为常量；y是以平衡位置为原点所测得的坐标. 假定振动的物体在坐标y_0处的速度为v_0，试求速度v与坐标y的函数关系式.

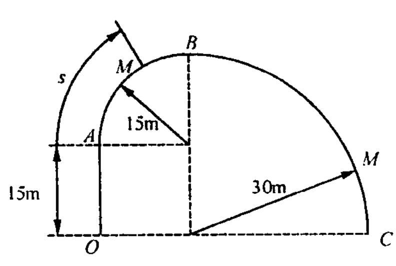

图 1.9

5. 质点M在水平面内运动轨迹如图1.9所示，OA段为直线，AB，BC段分别为不同半径的两个$\dfrac{1}{4}$圆周. 设$t=0$时，M在O点，已知运动方程为$s=30t+5t^2$，求$t=2\mathrm{s}$时，质点M的切向加速度和法向加速度.

6. 一飞机驾驶员想往正北方向航行，而风以60km/h的速度由东向西刮来，如果飞机的航速(在静止空气中的速率)为180km/h，试问驾驶员应取什么航