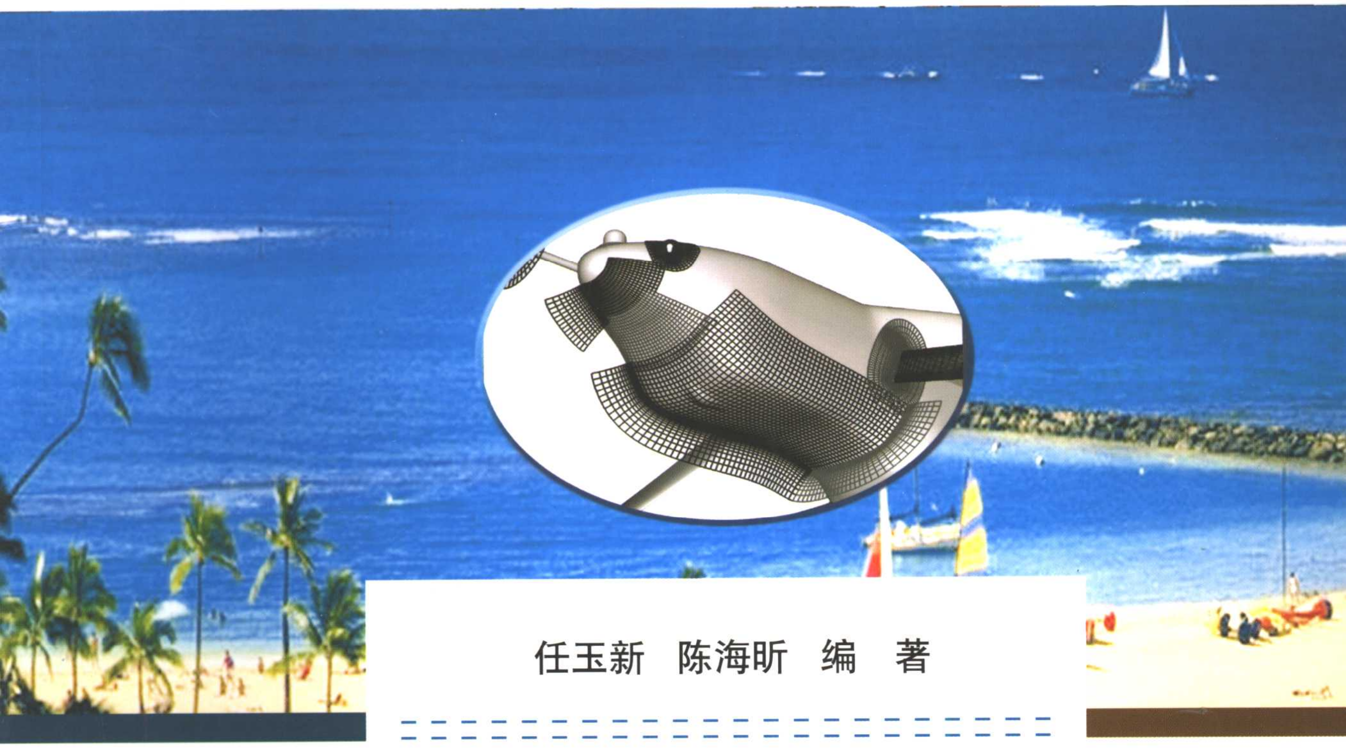

任玉新　陈海昕　编　著

计算流体力学基础

清华大学出版社

计算流体力学基础

任玉新　陈海昕　编著

清华大学出版社
北　京

内 容 简 介

本书以有限差分和有限体积方法为主线，系统地介绍了计算流体力学的基础知识。主要内容包括：计算流体力学的特点和意义、流体力学基本方程及其分类(第 1 章)；发展型偏微分方程有限差分和有限体积方法的基本概念、重要性质和典型算法(第 2、3 章)；贴体网格生成基础(第 4 章)；激波的数值计算理论、可压缩流动的典型计算方法(第 5、6 章)；不可压缩流动的数值计算方法初步(第 7 章)。本书以清华大学航天航空学院本科生“计算流体力学”课程讲义为基础整理而成，旨在为力学类专业的高年级本科生、其他专业的研究生和对计算流体力学感兴趣的读者提供一本篇幅适中但又有一定深度的计算流体力学入门读物。

图书在版编目(CIP)数据

计算流体力学基础/任玉新，陈海昕编著. —北京：清华大学出版社，2006.6

ISBN 7-302-13004-3

Ⅰ.计…　Ⅱ.①任…②陈…　Ⅲ.计算流体力学—高等学校—教材　Ⅳ.O35

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 051051 号

出 版 者：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**客户服务**：010-62776969
组稿编辑：刘建龙
文稿编辑：宋延清
封面设计：陈刘源
排版人员：李　欣
印 刷 者：北京鑫海金澳胶印有限公司
装 订 者：三河市新茂装订有限公司
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　本：185×260　**印张**：13.5　**字数**：315 千字
版　次：2006 年 6 月第 1 版　2006 年 6 月第 1 次印刷
书　号：ISBN 7-302-13004-3/O・542
印　数：1～4000
定　价：19.80 元

前　言

计算流体力学(Computational Fluid Dynamics，CFD) 是一门发展迅速的学科。与此学科相关的新的理论、算法和软件层出不穷。作为一门独立的学科，计算流体力学出现于20世纪60年代，经过几十年的发展，已经成为流体科学领域中与理论流体力学和实验流体力学鼎足而立的重要学科。计算流体力学作为大规模科学计算学科群的一员，将在21世纪继续得到迅速发展。计算流体力学是一门交叉性很强的学科。它的理论基础是理论流体力学和计算数学，它的实现依赖于适当的计算机软硬件环境，而它的应用则遍及所有与流动现象有关的学科及工业领域。

本书以有限差分和有限体积方法的基本概念、基本理论和部分典型数值方法作为介绍的重点，以使读者对计算流体力学的基础有深入、系统的了解，并具备初步的分析和解决计算流体力学问题的能力。为了使读者在学习本书以后具备一定的计算流体力学程序设计能力，我们也在部分章节比较集中地讨论了数值方法和边界条件实施的一些具体方案。但是，这些方案绝不是惟一的或者最佳的。我们希望读者能够通过自己的调研和实践，探索适合于特定问题的数值格式和实施方案。限于篇幅，本书没有涉及新型的高精度、高分辨率差分格式(如 ENO、WENO、紧致格式)、非结构网格的生成及其中的数值格式、加速收敛技术(如多重网格方法)、自适应网格方法、重叠和对接网格技术、区域分解方法等重要内容(其中的部分内容，在我们为研究生开设的“高等计算流体力学”课程中有比较系统的介绍)。但我们相信，以本书为基础，读者容易通过自学了解和掌握这些内容。

在写作过程中，我们力图使本书具有下面几个特点：①简明易懂。在总体风格上保持简单明了的同时，我们对计算流体力学最基础的内容进行了比较详细的介绍，以使初学者能够在不过多借助其他参考文献的条件下理解本书的内容。②注重基本概念和原理。在讲解有关概念和原理时，我们的原则是，尽量用容易理解的严格数学方式进行描述和分析，因为这是准确阐明概念和方法的最佳途径；如果在数学上比较复杂或者尚无定论，我们就以直观的方式引入这些概念和方法，并着重介绍其物理背景和应用条件。③注重实践和内容的扩展。在总的习题量比较少的情况下，我们安排了较多的编程计算习题，使读者在掌握基本概念的同时，学会应用 CFD 解决简单的问题。由于篇幅的限制，很多重要问题在书中不能进行介绍。为此，我们在书中的各个部分安排了部分标题“提示”的小节，对一些较深入的问题稍加说明，并给出参考文献。

本书旨在为力学类专业的高年级本科生、其他专业的研究生和对计算流体力学感兴趣的读者提供一本篇幅适中但又有一定深度的计算流体力学入门读物。

本书是在为清华大学航天航空学院本科生开设的“计算流体力学”课程讲义的基础上整理而成的。全书由任玉新主编，陈海昕编写了第4章的部分内容并对其他章节提出了改进意见。由于作者水平所限，书中还有很多错误和不足之处，希望读者批评指正。

编者

2006年4月

目　录

第 1 章　绪　　论

导读

本章介绍计算流体力学的概念及意义，流体力学的基本方程，流体力学方程组的类型判别等基础知识。本章的重点是双曲型方程的特征分析，偏微分方程的分类，双曲型、抛物型和椭圆型偏微分方程的主要特点，以及典型流体力学方程的类型判别等内容。

1.1　计算流体力学的概念与意义

1.1.1　什么是计算流体力学

任何流体的运动都遵循以下 3 个基本定律：①质量守恒定律；②动量守恒定律(Newton 第二定律)；③能量守恒定律。通过这些基本定律以及相关的本构模型和状态方程，流体的运动一般可由偏微分方程(方程组)或积分形式的方程(方程组)来描述，我们称这些方程为流体运动的**控制方程**(governing equations)。随着流体力学的发展，流体运动的数学物理模型，包括适用于各种不同性质的流体和流体的不同流动状态的控制方程已经建立并日臻完善。然而，流体的运动是自然界最为复杂的运动形态之一，主要表现为控制方程的高度非线性和流动区域几何形状的复杂性等。这种复杂性决定了我们对科学和工程中感兴趣的绝大多数流动问题无法得到其解析解。高速电子计算机的出现，使得通过数值计算的方法求解流体运动问题成为可能，并逐渐形成了一个独立的新学科：**计算流体动力学**(Computational Fluid Dynamics，CFD)。在国内，我们习惯上把 CFD 称作**计算流体力学**。

计算流体力学是通过数值方法求解流体力学控制方程，得到流场的离散的定量描述，并以此预测流体运动规律的学科。在 CFD 中，把流体运动控制方程中的积分、微分项近似地表示为离散的代数形式，使得积分或微分形式的控制方程转化为代数方程组；然后，通过电子计算机求解这些代数方程组，从而得到流场在离散的时间/空间点上的**数值解**(numerical solution)。CFD 有时也称流场的数值模拟、数值计算、或数值仿真等。

在流体力学控制方程的微分和积分项中包括时间/空间变量(自变量)以及物理变量(因变量)，这些变量分别对应着时间/空间求解域和定义在求解域上的流动问题的解。要把这些积分或者微分项用离散的代数形式代替，必须首先把求解域表示为离散形式。在不同的离散方法中，求解域或者被近似为一系列**网格点**(grid points)的集合，或者被划分为一系列**控制体或单元体**(control volume，cell)。因变量定义在网格点上或者控制体的中心、顶点或其他特征点上。在每一个网格点或者控制体上，流体运动方程中的积分或者微分项被近似地表示为离散分布的因变量和自变量的代数函数，并由此得到作为微分或积分型控制方程近

似的一组代数方程，这个过程称为控制方程的**离散化**(discretization)，其中所采用的离散化方法称为**数值方法**或者**数值格式**。这组代数方程的解(即数值解)给出了离散点上流场的定量描述。显然，为了得到流场结构的比较精细的描述，网格点或者单元体的数量必须足够多。对于科学和工程中的一些常见的流动问题，网格的数目常常需要数万到数百万甚至更多(有人曾经使用十亿以上的网格进行湍流的直接数值模拟)。因此，不借助于高速电子计算机，我们就无法有效地求解这些代数方程组。在实用中，人们采用各种程序设计语言把求解过程编制成计算机程序，通过在计算机上运行这些程序得到数值解。

CFD 可以应用于所有与流体运动相关的领域。无论在哪个领域中，为了获得问题的满意答案，CFD 的研究通常应该遵循以下步骤：

第一，问题的界定和流动区域的几何描述。应明确要解决的问题中流场的几何形状、流动条件和对于数值模拟的要求。几何形状通常来源于对已有流动区域的测量或者新的产品和工程的设计结果。流动条件包括流动的雷诺数、马赫数、边界处的速度、压力等。对于数值模拟的要求包括：数值模拟的精度和所花费的时间，所感兴趣的流动参数等。

第二，选择控制方程和边界条件。在问题确定后，必须选择流动的控制方程和边界条件。一般认为，在牛顿流体范围内，所有的重要流动现象都可以用 Navier-Stokes(纳维-斯托克斯)方程来描述。但是，为了提高计算的效率，有时可以选择经过简化的数学模型(如果这种简化模型仍能体现所研究的流动现象的物理本质，满足对数值模拟的精度要求的话)。简化模型包括势流方程，Euler(欧拉)方程，边界层方程，薄层近似的 Navier-Stokes 方程等。根据问题的特点，可以考虑定常或非定常、可压或不可压的流动模型。边界条件通常有固体壁面条件，来流、出流条件，周期性条件，对称条件等。边界条件通常依赖于控制方程，如在固体壁面上，Euler 方程要求采用不可穿透条件，而 Navier-Stokes 方程则要求满足无滑移条件。在很多情况下，我们还需要采用一些附加的物理模型，最典型的例子就是湍流模型。虽然 Navier-Stokes 方程可以描述湍流流动，但是直接采用原始的 Navier-Stokes 方程计算工程中的湍流流动(称为直接数值模拟，Direct Numerical Simulation，DNS)要求网格点的数量非常多，因而计算量非常大，这是目前的计算机所不能承受的。所以人们通常采用经过 Reynolds(雷诺)平均的 Navier–Stokes 方程，为了封闭这个方程就必须采用某种湍流模式。其他的物理模型根据所研究问题的性质包括化学反应、燃烧、辐射、多相流模型等。

第三，确定网格划分策略和数值方法。在 CFD 中，网格划分可以有各种不同的策略，如结构网格、非结构网格、组合网格、重叠网格等。网格可以是静止的，也可以是运动的(动网格)，还可以根据数值解动态调整(自适应网格)。CFD 中的数值方法有有限差分、有限体积、有限元、谱方法等。数值方法和网格划分策略是相互关联的。例如，如果采用有限差分方法，通常要选用结构化网格；而有限体积方法和有限元方法则可以适用于结构和非结构网格。

第四，程序设计和调试。在网格划分策略和数值方法的基础上，编制、调试数值求解流体运动控制方程的计算机程序或软件。编制大型的软件要遵循软件工程的方法、原则以及相关的行业标准；即使是编制小型的专用或实验程序，也要养成良好的程序设计习惯。采用良好的程序调试工具和调试方法，可以提高程序设计的效率。

第五，程序验证和确认。在程序设计和调试完成后，还应通过一系列精心设计的典型算例对软件进行**验证**(verification)，以确保软件实现了设计者的初衷。同时，必须看到，任

何程序都是基于特定的数学物理模型、数值方法和网格划分策略。显然，程序的准确性和可靠性必然依赖于这些因素，从而具有一定的局限性。所以，在应用计算程序解决某一领域的实际问题之前，必须通过计算一系列具有实际意义的算例并和实验数据进行对比，以弄清程序的准确度、预测能力和适用范围，这一过程称为程序的**确认**(validation)。CFD 程序或者软件的验证和确认目前得到了高度的重视，是计算流体力学研究的重要内容之一。当前，市场上已经出现了多种商用的 CFD 软件。采用这些软件求解工程中的流体力学问题已经成为一些企业和研究单位进行工程设计和产品研发的常规手段。商业软件的出现促进了 CFD 的普及，节约了很多繁琐的程序设计工作。但到目前为止，商业 CFD 软件的发展还不够成熟，无法保证在任何情况下得到的数值解都是准确可靠的。所以，根据应用领域和所求解问题的特点对商业 CFD 软件进行确认研究也是非常必要的。

第六，数值解的显示和评价。在得到数值解后，对数值解进行显示和分析是 CFD 中非常重要的环节，一般称为**后处理**(post-processing)。后处理包括计算感兴趣的力、力矩；包括应用流场可视化的软件对于流场进行显示、分析；包括对于数值方法和物理模型的误差进行评估等。与之对应的，对所求解的问题的界定和网格划分等，称为**前处理**(pre-processing)。

提示： 为了进一步了解 CFD 程序和软件的验证和确认的准确含义，在这里我们给出 AIAA(American Institute of Aeronautics and Astronautics)关于验证和确认的定义[①]：

Verification: The process of determining that a model implementation accurately represents the developer's conceptual description of the model and the solution to the model.

Validation: The process of determining the degree to which a model is an accurate representation of the real world from the perspective of the intended uses of the model.

1.1.2 计算流体力学的地位和特点

自从 1687 年 Newton(牛顿)发现宏观物体运动的基本定律以来，直到 20 世纪 50 年代初，研究流体运动规律的主要方法有两种：实验研究和理论研究。随着流体力学研究的进展，实验研究和理论研究各自的优势和困难逐渐为人们所认识。实验研究的优点是可以借助各种先进仪器设备，给出多种复杂流动的准确、可靠的观测结果，这些结果对于流动机理的研究和与流体运动有关的机械和飞行器的设计具有不可替代的作用。但是，实验研究通常费用高昂，周期很长；而且有些流动条件难以通过实验手段来模拟(如航天飞行器周围的高速、高温流动)。理论研究的优点是可以给出具有一定适用范围的简洁明了的解析解或近似解析解。这些解析解对于分析流动的机理和预测流动随参数的变化非常有用。其缺点是一般只能研究简单流动问题。由于流体的运动具有强非线性，所研究问题的数学模型有时需

① AIAA. Guide for the Verification and Validation of Computational Fluid Dynamics Simulations. American Institute of Aeronautics and Astronautics, AIAA-G-077-1998, Reston, VA, 1998.

要经过很大的简化，在这种条件下得到的解析解的适用范围非常有限，而且能够得到解析解的问题也为数不多，远远不能满足工程设计的需要。

随着高速电子计算机的出现，研究流体运动规律的“第三种方法”——计算流体力学(CFD)应运而生。CFD 产生于第二次世界大战前后，在 20 世纪 60 年代左右逐渐形成了一门独立的学科。由于 CFD 作为一门独立学科的历史还比较短，所以，我们不打算对 CFD 的发展历史作具体的描述。但是很显然，发展 CFD 的主要动机是利用高速电子计算机这一新的工具，克服理论研究和实验研究的缺点，深化对于流体运动规律的认识并提高解决工程实际问题的能力。CFD 得到的是某一特定流体运动区域内，在特定边界条件和参数的特定取值下的离散的数值解。因而，通过一次计算，我们无法预知参数变化对于流动的影响和流场的精确的分布情况。因此，它提供的信息不如解析解详尽、完整。在这一点上，它与实验测量相近，所以，用 CFD 研究流动的过程也称为**数值实验**。但是，与理论流体力学相比，CFD 的突出优点是它原则上可以研究流体在任何条件下的运动。在 CFD 中采用简化数学模型的目的在于提高计算效率以及和计算机硬件水平相适应；如果计算机条件允许，我们在求解任意复杂的流动问题时，都可以采用最适合流动物理本质的数学模型。因此，CFD 使得我们研究流体运动的范围和能力都有了本质的扩大和提高。在模拟极端条件下的流体运动的方面，和实验测量相比，CFD 也显示了明显的优势。同实验研究相比，CFD 还具有费用少，周期短的优点。今天，CFD 已经取得了和实验流体力学及理论流体力学同等重要的地位，流体力学的研究呈现出“三足鼎立”之势。

CFD 作为一个比较新的学科，还有其他一些鲜明的特点：

第一，CFD 的发展及应用与计算机技术的发展直接相关。CFD 发展的一个基本条件是高速、大容量的电子计算机。随着对 CFD 的了解和应用的不断深入，我们将对这一点有越来越清楚的认识。今天，计算机技术的迅速发展，已经使得采用 CFD 方法研究一些工程实际问题成为可能。例如，通过求解三维 Reynolds 平均的 Navier-Stokes 方程进行部件与系统的流体力学分析和设计正在成为航空航天和其他工业领域的新的研究手段。最近 10 年以来，计算流体运动的商业 CFD 软件不断涌现，极大地促进了 CFD 在工业领域的应用。但是，还有很多问题，如高 Reynolds 数条件下湍流的直接数值模拟和某些计算气动声学问题，由于对于计算机速度和容量的要求极高，目前和近期还无法完全用 CFD 方法解决。所以，计算机技术的发展，已经为 CFD 的广泛应用提供了一定可能，而 CFD(和其他基于大规模数值计算的学科)的发展还不断对计算机技术的进一步发展提出新的要求。

第二，CFD 与应用数学有密切的联系。CFD 中，要把流体力学基本方程中的积分和微分运算化为离散的代数运算，这样，就产生了一系列的数学问题。①离散的代数方程逼近原来的积分或微分方程的程度如何？数值解逼近微分或积分方程精确解(如果存在的话)的程度如何？这些就是所谓 CFD 方法的精度和误差估计问题。②当离散点的数量趋近于无穷大，间距趋近于无穷小时，数值解是否趋近于精确解？这就是所谓数值方法的收敛性问题。③在计算机上，数值计算是以有限的字长(有效数字)进行的，例如计算机不能无限精确地表示一个无理数，因此，计算机得到的数值解是“近似的”数值解。由于机器字长有限产生的误差称为“舍入误差”。舍入误差对于数值计算结果的影响如何，会不会无穷增长以至于得不到有意义的数值解？这就是数值方法的稳定性问题。④在可压缩流动中，会出现激波等间断现象。为了正确描述这一现象，必须对微分方程连续可微解的定义进行扩充，

扩充后的解称为广义解或弱解。那么，广义解和物理上的真实解是什么关系，要保证广义解是有物理意义的真实解必须满足什么条件？这些问题以及未列出的其他众多相关问题，都是应用数学研究的重要内容，也是 CFD 研究的中心内容。一方面，这些问题的研究已经取得了很大进展，并促进了 CFD 的迅速发展。另一方面，流体运动的基本方程是非线性的，数值方法也必须体现非线性的特点；而涉及非线性的许多问题目前还没有很好地解决。比如非线性问题的稳定性、收敛性和误差估计，一般意义下如何获得对应于物理真实的广义解等问题还是 CFD 和应用数学研究的难点问题。由于 CFD 在理论上还不甚成熟，CFD 方法的发展很大程度上依靠研究者的经验和直觉。同时，由于一些涉及非线性的关键理论问题还没有解决，人们对于 CFD 计算结果的可靠性还有所怀疑，这也在一定程度上妨碍了 CFD 的广泛应用。

第三，CFD 的发展在很大程度上依赖于实验和理论流体力学的发展。由于缺乏数值解误差估计的严格理论，CFD 计算结果的确认通常依赖于和实验结果的对比。CFD 研究原则上可以采用各种数学模型，而这些数学模型则是理论流体力学研究的直接成果。例如，湍流流动的数值计算，在大多数情况下要引入所谓“湍流模式”，而这些模式，无论是基于 Reynolds 平均方程的湍流模式还是最近得到迅速发展的“大涡模拟”中的亚网格尺度模式，都是理论流体力学研究中非常活跃的课题。对湍流流动的准确预测，与这些模式的有效性密切相关。因此，CFD 的发展不能取代理论或实验流体力学，它们之间是一种相互补充，相互促进的关系。

第四，CFD 研究呈现出明显的学科交叉性。CFD 的生命力在于广泛应用于各个工业领域，解决其中涉及的与流体运动相关的问题。为了解决这些问题，CFD 研究必须和这些领域的研究密切交叉和融合。

1.1.3 计算流体力学的意义

计算流体力学作为一个独立的学科，经过数十年的迅速发展，已经成为流体力学科学研究和工程分析设计的重要手段。

1. CFD——流体力学研究的工具

理论流体力学提供了描述流体运动的丰富的数学、物理模型；而实验流体力学发现了流体运动中许多奇妙和有重要意义的现象。CFD 则架起了从数理模型到流动现象之间的桥梁，成为流体力学研究的重要手段。前面提到，CFD 与实验研究有类似之处，流场的数值模拟也常常被称为“数值实验”；另一方面，CFD 可以提供比实验研究更为丰富的流动细节。CFD 直接处理的是描述流动的微分或积分形式的方程组及其边界条件，而流动的方程和边界条件又是理论流体力学研究的重要内容。利用 CFD 的这些特点，有可能建立理论流体力学和实验流体力学之间的“数值关联”。具体地说，如果 CFD 可以再现实验中发现的某些现象，我们根据对 CFD 采用的数学物理模型的分析，就可以发现这种现象的数学、物理机制，以及产生、演化的条件和方式。从而加深对于这种流动现象机理的认识。

不仅如此，由于 CFD 对于流动的预测能力，使得 CFD 也可以发现一些新的流动现象和机理。例如，Campbell 和 Mueller 等人在数值实验中，发现了亚声速斜坡绕流中的分离

现象，以后他们在风洞实验中得到了证实；又如 Kim 和 Moin 等人在数值计算中发现了倒马蹄涡，后来的实验研究也验证了他们的发现。综上所述，CFD 已经成为流体力学研究的重要工具。事实上，今天无论是从事理论研究还是实验研究，数值模拟这一工具都是不可或缺的。

2. CFD——工程设计和分析的工具

CFD 的最早的成功应用是在航空航天领域。在 20 世纪六、七十年代，CFD 成功地解决了对于航天飞机和洲际弹道导弹等再入飞行器的设计具有重要意义的超音速和高超音速钝体绕流问题。在七、八十年代，研制了基于全位势方程和 Euler/边界层方程的整架飞机流场数值模拟程序，这些程序已经在新型飞机的研制中发挥了重要作用。目前，基于求解 Reynolds 平均的 Navier-Stokes 方程的整机流场数值模拟程序也已经出现，经过在湍流模式和计算效率方面的进一步改进后，有可能成为新一代的飞机气动设计方法。CFD 在飞机设计中当前要解决的问题主要包括：增升装置性能预测，巡航空气动力学，层流控制，湍流减阻，气动弹性分析，发动机安装对飞机性能影响等。利用 CFD 技术进行飞机的多学科多目标优化设计已经成为研究的热点问题。人们希望，在今后 5~10 年内，通过广泛应用 CFD 技术，使飞机的设计周期缩短 40%~50%，升阻比提高 15%~20%，风洞试验减少 50%。世界上所有重要的飞机制造商都在投入大量资金发展自己的 CFD 技术，以保持竞争力。

除此之外，CFD 还在汽车、能源动力、化工、船舶、工业加工等许多领域得到了广泛应用，已经成为工业设计的重要手段。

1.1.4 本书的主要内容

作为计算流体力学的入门教材，本书主要介绍 CFD 中的数值方法及其应用的最基本的内容，其中数值方法仅限于有限差分(Finite Difference)方法和有限体积(Finite Volume)方法。本书试图以简单明了的方式，系统地介绍计算流体力学的基本概念和经典数值格式的构造方法以及应用。换句话说，本书的侧重点是基本概念和基本方法，并不试图对各种数值格式以及实施细节做手册式的介绍。我们认为，在商业 CFD 软件越来越普及的今天，掌握扎实的计算流体力学基本概念和基本方法仍然是非常重要的。掌握了这些概念和方法，不仅有助于解决 CFD 软件应用中的一些问题，而且更重要的是，可以为进一步学习计算流体力学更深入的内容和从事相关的科研工作打下良好基础。当然，为了使读者在学习本书以后具备一定的计算流体力学程序的设计和开发能力，我们也在部分章节比较集中地讨论了数值方法和边界条件实施的一些具体方案。但是，这些方案绝不是惟一的或者最佳的。我们希望读者能够通过自己的工作，探索适合于特定问题的数值格式和实施方案。

限于篇幅，本书略去了计算流体力学中的一些重要内容，如高精度计算格式、非结构网格中的计算格式、自适应网格和动网格技术等。但是，我们相信，在掌握了本书的内容之后，读者会比较容易地通过自学了解和掌握这些内容。

1.2 流体力学基本方程

1.2.1 流体力学中的几种基本方程

流体力学的基本方程是计算流体力学的基础。为此，我们首先不加推导地引入流体力学的基本方程。方程的推导和详细介绍，请参看有关的流体力学书籍①。

流体的运动满足质量守恒、动量守恒和能量守恒的规律。在 Newton 流体范围内，这些规律可以用 Navier-Stokes 方程描述(在 CFD 中常把连续方程、动量方程和能量方程通称为 Navier-Stokes 方程)。

(1) 连续方程

积分型连续方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\Omega}\rho \mathrm{d}\Omega+\oint\!\!\!\oint_{S}\rho \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=0 \tag{1.2.1}$$

其中 Ω 为积分方程的控制体，$\mathrm{d}\Omega=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$S=\partial\Omega$ 为控制体表面，ρ 为密度，$\boldsymbol{V}$ 为流体运动的速度矢量。对应的微分型连续方程为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V})=0 \tag{1.2.2}$$

(2) 动量方程

积分型动量方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\Omega}\rho \boldsymbol{V}\mathrm{d}\Omega+\oint\!\!\!\oint_{S}\rho \boldsymbol{V}\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iiint_{\Omega}\rho\boldsymbol{F}\mathrm{d}\Omega+\oint\!\!\!\oint_{S}\vec{\boldsymbol{\tau}}^{*}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{1.2.3}$$

相应的微分型动量方程为

$$\frac{\partial(\rho\boldsymbol{V})}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V}\boldsymbol{V})=\rho\boldsymbol{F}+\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\tau}}^{*} \tag{1.2.4}$$

这里，$\boldsymbol{F}$ 代表外力，($\vec{\bullet}$)代表二阶张量。对于 Newton 流体，根据广义 Newton 定律，$\vec{\boldsymbol{\tau}}^{*}=-p\vec{\boldsymbol{I}}+\vec{\boldsymbol{\tau}}$，其中 $\vec{\boldsymbol{I}}$ 为单位张量，p 为压力，$\vec{\boldsymbol{\tau}}$ 为黏性应力张量。在直角坐标系中，$\vec{\boldsymbol{\tau}}$ 的分量形式为

$$\tau_{xx}=2\mu u_x+\lambda(u_x+v_y+w_z),\tau_{yy}=2\mu v_y+\lambda(u_x+v_y+w_z),\tau_{zz}=2\mu w_z+\lambda(u_x+v_y+w_z)$$

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=\mu(u_y+v_x),\tau_{yz}=\tau_{zy}=\mu(v_z+w_y),\tau_{zx}=\tau_{xz}=\mu(u_z+w_x)$$

其中，μ，v，w 为速度矢量在直角坐标系 x,y 和 z 方向的分量，μ 是黏性系数，$\lambda=-\frac{2}{3}\mu$。考虑到广义 Newton 定律，动量方程也可以写为

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\Omega}\rho \boldsymbol{V}\mathrm{d}\Omega+\oint\!\!\!\oint_{S}(\rho \boldsymbol{V}\boldsymbol{V}+p\vec{\boldsymbol{I}})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iiint_{\Omega}\rho\boldsymbol{F}\mathrm{d}\Omega+\oint\!\!\!\oint_{S}\vec{\boldsymbol{\tau}}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{1.2.5}$$

其微分形式为

① 如张兆顺，崔桂香.《流体力学》. 清华大学出版社，1999 年

$$\frac{\partial(\rho \boldsymbol{V})}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho \boldsymbol{V}\boldsymbol{V}+p\vec{\boldsymbol{I}})=\rho \boldsymbol{F}+\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\tau}} \tag{1.2.6}$$

(3) 能量方程

在流场内无热源时，积分型能量方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\Omega}\rho E \mathrm{d}\Omega+\oiint_{S}\rho E\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iiint_{\Omega}\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{V}\mathrm{d}\Omega+\oiint_{S}(\vec{\boldsymbol{\tau}}^{*}\cdot\boldsymbol{V}-q)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{1.2.7}$$

微分型能量方程为

$$\frac{\partial\rho E}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho E\boldsymbol{V})=\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{V}-\nabla\cdot q+\nabla\cdot(\vec{\boldsymbol{\tau}}^{*}\cdot\boldsymbol{V}) \tag{1.2.8}$$

其中

$$\rho E=\rho e+\frac{\rho}{2}V^{2}$$

E 为总能，e 为内能；根据 Fourier(傅里叶)导热定律，有

$$\boldsymbol{q}=-k\nabla T$$

$\boldsymbol{q}$ 为热通量，k 为热传导系数。利用广义 Newton 定律和 Fourier 导热定律，能量方程也可以写为

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\Omega}\rho E\mathrm{d}\Omega+\oiint_{S}(\rho E+p)\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$
$$=\iiint_{\Omega}\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{V}\mathrm{d}\Omega+\oiint_{S}(\vec{\boldsymbol{\tau}}\cdot\boldsymbol{V}+k\nabla T)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{1.2.9}$$

或者

$$\frac{\partial\rho E}{\partial t}+\nabla\cdot[(\rho E+p)\boldsymbol{V}]=\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{V}+\nabla\cdot(k\nabla T)+\nabla\cdot(\vec{\boldsymbol{\tau}}\cdot\boldsymbol{V}) \tag{1.2.10}$$

为了使上述方程封闭，还应补充流体的状态方程。对于完全气体，有

$$p=\rho RT$$

$$\rho e=\frac{p}{\gamma-1}$$

上面我们给出了描述 Newton 流体运动的积分型和微分型方程。微分型方程可由积分型方程在考虑到控制体形状的任意性后导出。积分型的方程可以有多种可能形式，本节所述的积分型方程直观地反映了质量、动量的守恒关系，称为**守恒型积分方程**。由守恒型积分方程直接应用 Gauss(高斯)定理，并考虑到控制体形状的任意性后得到的微分型方程称为**守恒型微分方程**。显然，上面给出的微分型方程即为守恒型微分方程。守恒型微分方程的特点是：所有空间导数项均为散度的形式。守恒的微分型和积分型方程，都可以称作**守恒律**(conservation law)。空间导数不是散度形式的微分型方程，称为非守恒型方程，如连续方程可以写为下面的非守恒形式：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla\rho+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{V}=0$$

积分型方程和微分型方程在意义上有微妙的差别：积分型方程允许在控制体内部流动参数有间断；而微分型方程假定流动参数是可微的，因而是连续的。当从积分型方程推导微分型方程时，这一点可以看得很清楚：在推导过程中我们要利用 Gauss 公式，而使用 Gauss 公式的条件是变量为连续可微的。因此，积分型方程可以认为是比微分型方程更为基本的

方程，尤其是流场中确实存在间断(如激波)时。

注意，在这里我们只给出了基本的 Navier-Stokes 方程。这些方程在一定条件下可以进一步简化，得到诸如边界层方程、Euler 方程、全位势方程等多种形式；另一方面，当所研究的问题为湍流或者涉及其他物理、化学过程时，我们还需引入其他物理、化学模型如湍流模型、燃烧和化学反应模型、多相流模型等。限于篇幅，我们不对此作进一步介绍。

1.2.2 直角坐标系下的守恒型方程

1. Navier-Stokes 方程和 Euler 方程

不计质量力的情况下，在直角坐标系中，守恒型 Navier-Stokes 方程可以写为下列向量形式：

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}+\frac{\partial(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{F}_v)}{\partial x}+\frac{\partial(\boldsymbol{G}-\boldsymbol{G}_v)}{\partial y}+\frac{\partial(\boldsymbol{H}-\boldsymbol{H}_v)}{\partial z}=0 \tag{1.2.11}$$

其中

$$\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho w\\ \rho E\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uv\\ \rho uw\\ (\rho E+p)u\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}\rho v\\ \rho vu\\ \rho v^2+p\\ \rho vw\\ (\rho E+p)v\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}\rho w\\ \rho uw\\ \rho vw\\ \rho w^2+p\\ (\rho E+p)w\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{F}_v=\begin{pmatrix}0\\ \tau_{xx}\\ \tau_{xy}\\ \tau_{xz}\\ u\tau_{xx}+v\tau_{xy}+w\tau_{xz}+k\dfrac{\partial T}{\partial x}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{G}_v=\begin{pmatrix}0\\ \tau_{xy}\\ \tau_{yy}\\ \tau_{yz}\\ u\tau_{xy}+v\tau_{yy}+w\tau_{yz}+k\dfrac{\partial T}{\partial y}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}_v=\begin{pmatrix}0\\ \tau_{xz}\\ \tau_{zy}\\ \tau_{zz}\\ u\tau_{xz}+v\tau_{zy}+w\tau_{zz}+k\dfrac{\partial T}{\partial z}\end{pmatrix}$$

如果忽略 Navier-Stokes 方程中的黏性和热传导，得到的简化方程为 Euler 方程：

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial y}+\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial z}=0 \tag{1.2.12}$$

方程(1.2.11)、方程(1.2.12)称为向量守恒型方程。其重要特点是：连续、动量和能量方程被写为统一形式。其中，$\boldsymbol{U},\boldsymbol{F},\boldsymbol{G},\boldsymbol{H},\boldsymbol{F}_v,\boldsymbol{G}_v,\boldsymbol{H}_v$ 均为列向量，$\boldsymbol{U}$ 是方程的解向量，称为**守恒变量**(conservative variables)；$\boldsymbol{F},\boldsymbol{G},\boldsymbol{H},\boldsymbol{F}_v,\boldsymbol{G}_v,\boldsymbol{H}_v$ 称为**通量**(flux)，具体说 $\boldsymbol{F},\boldsymbol{G},\boldsymbol{H}$ 为**无黏通量**(inviscid flux)，$\boldsymbol{F}_v,\boldsymbol{G}_v,\boldsymbol{H}_v$ 为**黏性通量**(viscous flux)。