click gold medal

点击金牌专题

主编 高建钢

高中数学

函数与数列

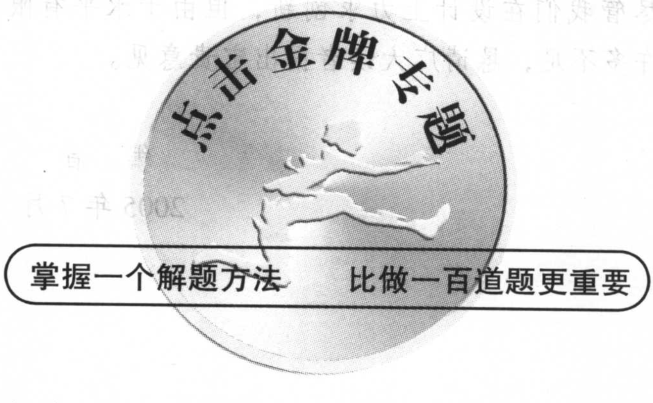
三角函数 平面向量

丛书主编 于若昕 孙维明

山西教育出版社

写在前面

《点击金牌专题》丛书是本社优秀品牌图书“点击金牌·奥赛系列”的延伸产品，是在广泛征求读者意见的基础上，由“奥赛系列”的原班人马精心打造而成。本《专题》通过科学的分解，把各学科庞杂的知识体系细化为一个个“专题”，以便大家学习时准确地查缺补漏，真正做到事半功倍。



本《专题》突出基础知识中的重点、难点，也发掘了可能被同学们忽视的盲点，大家可根据自己的情况，有目的地选择其中一册或一“专题”，重点攻略。

第一关键词——专

很多同学存在弱科现象，某一知识点薄弱，急需重点突破，选择“专”既节省时间，更有助于有的放矢，以一当十；既能对知识中的“死角”准确突破，又不胡子眉毛一把抓。

目　录

第一章　集合与简易逻辑

一、集合概念及其运算/1

经典例题/1　针对训练/7

二、简单不等式的解法/12

经典例题/12　针对训练/17

三、逻辑联结词与四种命题/21

经典例题/21　针对训练/24

四、充分条件与必要条件/27

经典例题/27　针对训练/33

第二章　函　数

一、映射与函数/38

经典例题/38　针对训练/47

二、函数解析式与函数图像/52

经典例题/52　针对训练/60

三、反函数/66

经典例题/66　针对训练/72

四、函数基本性质/76

经典例题/76　针对训练/92

五、二次函数/98

经典例题/98　针对训练/109

六、指数函数与对数函数/114

经典例题/114　针对训练/127

七、函数的应用/133

经典例题/133　针对训练/139

第三章　数　列

一、等差数列/144

经典例题/144　针对训练/155

二、等比数列/159

经典例题/159　针对训练/167

三、等差、等比数列的综合应用/171

经典例题/171　针对训练/177

四、数列综合应用/183

经典例题/183　针对训练/195

第四章　三角函数

一、三角函数基本概念/199

经典例题 /199　　针对训练 /207

二、同角三角函数关系、诱导公式/211

经典例题 /211　　针对训练 /219

三、两角和与差的三角函数/225

经典例题 /225　　针对训练 /241

四、三角函数的图象和性质/246

经典例题 /246　　针对训练 /260

五、三角函数综合应用/269

经典例题 /269　　针对训练 /277

第五章　平面向量

一、平面向量及其运算/282

经典例题 /282　　针对训练 /288

二、平面向量的坐标运算/293

经典例题 /293　　针对训练 /299

三、平面向量的数量积及其应用/304

经典例题 /304　　针对训练 /312

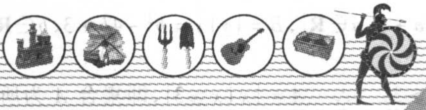
四、平面向量综合应用/317

经典例题/317　针对训练/321

五、正弦定理、余弦定理及其应用/326

经典例题/326　针对训练/333

参考答案/337



第一章

集合与简易逻辑

一 集合概念及其运算

经典例题

例1 已知集合 $A=\{x\mid x\geqslant 2\sqrt{6}\}$，$x=5$，则下列关系中正确的是 （ ）

A. $x\subsetneqq A$ B. $x\notin A$ C. $\{x\}\in A$ D. $\{x\}\subsetneqq A$

分析 准确理解集合符号的含义是解题的关键.

解 $\because$ $5=\sqrt{25}>\sqrt{24}=2\sqrt{6}$， $\therefore$ $x\in A$.

$\therefore$ 以 x 为元素的集合是 A 的真子集，即 $\{x\}\subsetneqq A$，故选 D.

例2 设集合 $A=\left\{x\in\mathbf{Z}\,\middle|\,\dfrac{6}{2-x}\in\mathbf{Z}\right\}$，试用列举法表示集合 A.

解 集合 A 是以 x 为元素的集合，x 的取值使得 $\dfrac{6}{2-x}$ 为整数，即 $|2-x|$ 必须是6的约数，从而 $x\in\{-4,-1,0,1,3,4,5,8\}$，所以 $A=\{-4,-1,0,1,3,4,5,8\}$.

特别提示

要正确理解描述法表示的集合中的元素是“谁”，此题容易错将 $\dfrac{6}{2-x}$ 的值作为集合 A 的元素.

例3 已知集合 $A=\{x\mid x=a^2+2a+4, a\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y\mid y=b^2-4b+3, b\in\mathbf{R}\}$，试确定集合 A、B 的关系.

☑ 解 $\because$ $a^2+2a+4=(a+1)^2+3\geqslant 3$，$\therefore$ $A=\{x\mid x\geqslant 3\}$，即集合 A 为所有不小于 3 的实数组成的集合.

类似地 $B=\{y\mid y=b^2-4b+3, b\in\mathbf{R}\}=\{y\mid y=(b-2)^2-1, b\in\mathbf{R}\}=\{y\mid y\geqslant -1\}$，即集合 B 为所有不小于 -1 的实数组成的集合，$\therefore$ $A\subsetneqq B$.

例4 已知集合 $A=\{0,1\}$，$B=\{x\mid x\subseteq A\}$，试确定集合 A 与 B 的关系.

☑ 解 由 $x\subseteq A$ 可知 x 为集合 A 的子集，所以集合 B 是由集合 A 的所有子集组成的集合，即 $B=\{\varnothing,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$. 由于 $A=\{0,1\}$ 是集合 B 的一个元素，所以 $A\in B$.

特别提示

在一定条件下，一个集合也可以是另一个集合的元素.

例5 求满足条件 $\{1\}\subseteq B\subsetneqq\{1,2,3,4\}$ 的集合 B 的个数.

☑ 解法一 由 $\{1\}\subseteq B$ 可知，B 中必有元素 1，又由 $B\subsetneqq\{1,2,3,4\}$ 知，B 中元素必为集合 $\{1,2,3,4\}$ 的元素，但 $B\neq\{1,2,3,4\}$，于是 B 为 $\{1\}$，或 $\{1,2\}$，或 $\{1,3\}$ 或 $\{1,4\}$ 或 $\{1,2,3\}$ 或 $\{1,2,4\}$ 或 $\{1,3,4\}$，故满足条件的集合 B 的个数为 7.

☑ 解法二 类似于解法一可知，B 中元素除 1 之外还可以是 2,3,4 中的某一个元素或某两个元素，故集合 B 的个数为 $C_3^0+C_3^1+C_3^2=2^3-1=7$.

例6 设集合 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant a\}$，$B=\{y\mid y=2x+3, x\in A\}$，$C=\{z\mid z=x^2, x\in A\}$，求使 $C\subseteq B$ 的实数 a 的取值范围.

☑ 解 由 $y=2x+3$ 得 $x=\dfrac{y-3}{2}$，

$\because$ $x\in A$，$\therefore$ $-2\leqslant\dfrac{y-3}{2}\leqslant a$，

$\therefore$ $-1\leqslant y\leqslant 2a+3$，$B=\{y\mid -1\leqslant y\leqslant 2a+3\}$.

(1) 当 $-2\leqslant a<2$ 时，由 $C=\{z\mid z=x^2, x\in A\}$ 知

$C=\{z\mid 0\leqslant z\leqslant 4\}$，

$\because$ $C\subseteq B$，$\therefore$ $2a+3\geqslant 4$，$\therefore$ $\dfrac{1}{2}\leqslant a<2$；

(2) 当 $a\geqslant 2$ 时，由 $C=\{z\mid z=x^2, x\in A\}$ 知 $C=\{z\mid 0\leqslant z\leqslant a^2\}$，

$\because$ $C\subseteq B$，$\therefore$ $2a+3\geqslant a^2$，$\therefore$ $2\leqslant a\leqslant 3$.

综合(1)(2)可知，实数 a 的取值范围是 $\dfrac{1}{2}\leqslant a\leqslant 3$.

例7 定义集合的差 $A-B=\{x\mid x\in A, 且\ x\notin B\}$，已知 $M=\{1,2,3,4,5\}$，$N=$

$\{2,3,6\}$,求 $M-(M-N)$.

分析 准确理解两集合差的概念是解题的关键.

解 $M-N=\{x\mid x\in M$ 且 $x\notin N\}=\{1,4,5\}$,

$\therefore\quad M-(M-N)=\{x\mid x\in M$ 且 $x\notin(M-N)\}=\{2,3\}$.

例8 已知集合 $A=\{0,1,2,4,5,7\}$,$B=\{1,3,6,8,9\}$,$C=\{3,7,8\}$,求$(A\cap B)\cup C$.

解 $A\cap B=\{0,1,2,4,5,7\}\cap\{1,3,6,8,9\}=\{1\}$,

$\therefore\quad (A\cap B)\cup C=\{1\}\cup\{3,7,8\}=\{1,3,7,8\}$.

例9 已知全集 $U=\{a,b,c,d,e\}$,集合 $M=\{a,b,c\}$,$N=\{b,d,e\}$,那么 $\complement_U M\cap\complement_U N$ 等于 ( )

A. $\varnothing$　　B. $\{d\}$　　C. $\{a,c\}$　　D. $\{b,e\}$

分析 根据集合性质$\complement_U M\cap\complement_U N=\complement_U(M\cup N)$,$\complement_U M\cup\complement_U N=\complement_U(M\cap N)$.本题可用两种方法求解.

解法一 $\because\quad \complement_U M=\{d,e\}$,$\complement_U N=\{a,c\}$,

$\therefore\quad \complement_U M\cap\complement_U N=\{d,e\}\cap\{a,c\}=\varnothing$,故选 A.

解法二 $M\cup N=\{a,b,c\}\cup\{b,d,e\}=\{a,b,c,d,e\}=U$,

$\therefore\quad \complement_U M\cap\complement_U N=\complement_U(M\cup N)=\complement_U U=\varnothing$,故选 A.

例10 设 $A=\{2,a^2-2a,6\}$,$B=\{2,2a^2,3a-6\}$,若 $A\cap B=\{2,3\}$,求 $A\cup B$.

分析 确定字母表示的元素,要从各种可能性中确定必然成立的,以减少不必要的讨论.

解 由 $A\cap B=\{2,3\}$,知 $3\in A$,

$\therefore\quad a^2-2a=3$, $a=3$ 或 $a=-1$.

当 $a=3$ 时,$A=\{2,3,6\}$,$B=\{2,18,3\}$,

$\therefore\quad A\cup B=\{2,3,6,18\}$.

当 $a=-1$ 时,$A=\{2,3,6\}$,$B=\{2,2,-9\}$,显然 B 中的元素不满足互异性,故 $a=-1$应舍去.

例11 已知全集 $I=\{1\leqslant x\leqslant 10,x\in\mathbf{N}\}$,若 $A\cap\complement_I B=\{1,7\}$,$\complement_I A\cap B=\{4,6\}$,$\complement_I A\cap\complement_I B=\{2,8,9,10\}$,求集合 A、B.

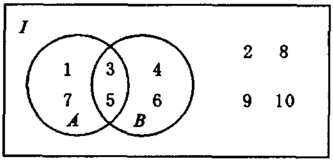
分析 由公式$\complement_I A\cap\complement_I B=\complement_I(A\cup B)$,可求得 $A\cup B$,进而可求得 A、B.

解法一 由$\complement_I A\cap\complement_I B=\{2,8,9,10\}$,可得$\complement_I(A\cup B)=\{2,8,9,10\}$,由 $I=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 10,x\in\mathbf{N}\}$,$A\cup B=\{1,3,4,5,6,7\}$,又由 $A\cap\complement_I B=\{1,7\}$,即在 A 中且不在 B 中的

元素是1,7,$\therefore\ B=\{3,4,5,6\}$,再由$\complement_I A\cap B=\{4,6\}$,即在$B$中且不在$A$中的元素是4,6,$\therefore\ A=\{1,3,5,7\}$.

解法二 $\because\ A\cup\complement_I A=I,\complement_I B=\complement_I B\cap I=\complement_I B\cap(A\cup\complement_I A)=(\complement_I B\cap A)\cup(\complement_I B\cap\complement_I A)=\{1,2,7,8,9,10\}$,$\therefore\ B=\{3,4,5,6\}$.同理$\complement_I A=\complement_I A\cap I=\complement_I A\cap(B\cup\complement_I B)=(\complement_I A\cap B)\cup(\complement_I A\cap\complement_I B)=\{2,4,6,8,9,10\}$,$\therefore\ A=\{1,3,5,7\}$.

解法三 画出图形(如下图).根据题意填图可得$A=\{1,3,5,7\}$,$B=\{3,4,5,6\}$.



数形结合,巧妙构思,效果独特.

例12 已知集合$A=\{x\mid x^2-x-6<0\}$,$B=\{x\mid x^2+2x-8>0\}$,$C=\{x\mid x^2-4ax+3a^2<0\}$,若$A\cap B\subseteq C$,求实数$a$的取值范围.

解 $A=\{x\mid -2<x<3\}$,$B=\{x\mid x>2$,或$x<-4\}$,

$\therefore\ A\cap B=\{x\mid 2<x<3\}$.

$x^2-4ax+3a^2=(x-3a)(x-a)<0$

分三种情况讨论:

(1)当$a>0$时,$3a>a$,这时集合$C=\{x\mid a<x<3a\}$,$\because\ A\cap B\subseteq C$,

$\therefore\ \begin{cases}a\leqslant 2,\\2a\geqslant 2,\end{cases}\quad\therefore\ 1\leqslant a\leqslant 2$;

(2)当$a=0$时,$C=\varnothing$不合题意;

(3)当$a<0$时,$a>3a$,$C=\{x\mid 3a<x<a\}$ $\because\ A\cap B=C\quad\therefore\ \begin{cases}3a\leqslant 2,\\a\geqslant 3,\end{cases}$

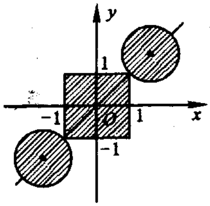
$\therefore$ 无解.

综上,a的取值范围是$[1,2]$.

例13 设$A=\{(x,y)\mid |x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1\}$,$B=\{(x,y)\mid(x-a)^2+(y-a)^2\leqslant 1\}$,若$A\cap B\neq\varnothing$,求$a$的取值范围.

解 集合A是单位正方形的边界和内部的点的集合,而集合B是圆心在直线$y=x$上,半径为1的圆的边界和内部的点的集合.

$\because\ A\cap B\neq\varnothing$,故知$-\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\leqslant a\leqslant\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$.



例14 设全集 $I=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$，集合 $M=\left\{(x,y)\left|\dfrac{y-3}{x-2}=1\right.\right\}$，$N=\{(x,y)\mid y\neq x+1\}$，求 $\complement_I M\cap\complement_I N$.

解 由 $\dfrac{y-3}{x-2}=1$ 得 $y=x+1(x\neq 2)$，

$\therefore$ M 表示直线 $y=x+1$，除去点 $(2,3)$

N 表示平面除去直线 $y=x+1$ 的部分.

$\therefore$ $\complement_I M$ 表示平面上除去直线 $y=x+1$ 的部分及点 $(2,3)$.

$\complement_I N$ 表示直线 $y=x+1$.

$\therefore$ $\complement_I M\cap\complement_I N$ 表示点 $(2,3)$，即 $\complement_I M\cap\complement_I N=\{(2,3)\}$.

另法： $M\cup N$ 表示平面上除去点 $(2,3)$ 的部分，

$\therefore$ $\complement_I(M\cup N)$ 表示点 $(2,3)$.

$\complement_I(M\cup N)=\complement_I M\cap\complement_I N=\{(2,3)\}$.

例15 设 a、b 是两个实数，$A=\{(x,y)\mid x=n,y=na+b,n$ 是整数$\}$，$B=\{(x,y)\mid x=m,y=3m^2+15,m$ 是整数$\}$，$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 144\}$ 是平面 xOy 内的点的集合. 讨论是否存在 a 和 b，使得

(1) $A\cap B\neq\varnothing$（$\varnothing$ 表示空集）；

(2) $(a,b)\in C$ 同时成立.

分析 先从肯定的角度出发，经推理导致矛盾. 若实数对 (a,b) 同时满足(1)、(2)两条件，消去 m、b，得到关于 a 的二次不等式，由它的判别式导致 $a\in\mathbf{R}$.

解 如果实数 a、b 使得(1)、(2)同时成立，于是存在整数 m 和 n 使得 $(n,na+b)=(m,3m^2+15)$.

即存在整数 n，使得 $na+b=3n^2+15$，

即 $b=3n^2+15-an$. ①

由(2)成立，得 $a^2+b^2\leqslant 144$.

把①式代入上式得关于 a 的不等式：

$(1+n^2)a^2-2n(3n^2+15)a+(3n^2+15)^2-144\leqslant 0$. ②

它的判别式为

$\Delta = 4n^2(3n^2+15)^2 - 4(1+n^2)[(3n^2+15)^2-144] = -36(n^2-3)^2$.

但 n 是整数，$n^2-3 \neq 0$，因而 $\Delta < 0$.

又因 $1+n^2>0$，故②式不可能有实数解 a，这就表明不存在实数 a 和 b 使得(1)、(2)同时成立.

本题还有以下三种解法.

思路二 由条件(1)得关于 n 的二次方程. 因 n 是实数，其判别式 $\Delta>0$，证明 $\Delta>0$与条件(2)同时成立 $b=6$，再推出

$n=\pm\sqrt{3}\notin \mathbf{Z}$，导致矛盾.

☑ 解法二 如果实数 a、b 使(1)、(2)同时成立，同解法一，由(1)成立知，必存在整数 n 使得

$$3n^2-an-(b-15)=0. \qquad ①$$

于是它的判别式非负，即

$$\Delta = a^2+12b-180 \geqslant 0. \qquad ②$$

由②式得 $12b-180 \geqslant -a^2$.

由(2)成立知 $a^2+b^2 \leqslant 144$， ③

即 $-a^2 \geqslant b^2-144$.

因此，$12b-180 \geqslant b^2-144$，即 $(b-6)^2 \leqslant 0$.

由此得出 $b=6$. 把 $b=6$ 代入判别式②，得出 $a^2 \geqslant 108$；但把 $b=6$ 代入③式，得出 $a^2 \leqslant 108$. 因而必有 $a^2=108$.

此时，从①式可解出 $n=\dfrac{a}{6}=\pm\sqrt{3}\neq$ 整数.

所以，不存在实数 a 和 b 使得(1)、(2)同时成立.

思路三 根据题意，A、B 为一些离散的点集，条件(1)说明 (a,b) 在直线 $l: nx+y-(3n^2+15)=0$ 上，求出原点至 l 的距离 d，由 $d \geqslant 12$ 与条件(2)推出矛盾.

☑ 解法三 如果实数 a 和 b 使(1)成立，于是存在整数 m 和 n，使得 $(n, na+b)=(m, 3m^2+15)$.

即 $\begin{cases} n=m, \\ na+b=3m^2+15. \end{cases}$

由此得出存在整数 n，使得 $na+b=3n^2+15$，或写成

$na+b-(3n+15)=0$.

这个等式表明点 $P(a,b)$ 在直线 $l: nx+y-(3n^2+15)=0$ 上，即从原点到直线的距离为 d，于是

$$d=\frac{3n^2+15}{\sqrt{n^2+1}}=6\left(\frac{\sqrt{n^2+1}}{2}+\frac{2}{\sqrt{n^2+1}}\right) \geqslant 12.$$

当且仅当$\frac{\sqrt{n^2+1}}{2}=1$,即 $n^2=3$ 时,上式中等号才成立.由于 n 是整数,因此,$n^2\neq 3$,所以上式中等号不可能成立,即 $d>12$.

因为点 P 在直线 l 上,点 P 至原点的距离$\sqrt{a^2+b^2}$必满足$\sqrt{a^2+b^2}\geqslant d>12$.

而(2)成立要求 $a^2+b^2\leqslant 144$,即$\sqrt{a^2+b^2}\leqslant 12$.由此可见,使得(1)成立的 a 和 b 必不能使(2)成立.

所以不存在实数 a 和 b 使得(1)、(2)同时成立.

思路四 根据条件列出等式 $an+b=3n^2+15$,由柯西不等式及不等式 $a^2+b^2\leqslant 144$,推出与假设相矛盾.

✔ **解法四** 如果实数 a、b 使得(1)成立,则必存在自然数 n 使得 $na+b=3n^2+15$.

由柯西不等式 $na+b\leqslant\sqrt{n^2+1}\cdot\sqrt{a^2+b^2}$,

$\therefore\quad 0=na+b-(3n^2+15)\leqslant\sqrt{n^2+1}\cdot\sqrt{a^2+b^2}-3n^2-15$

$\leqslant 12\sqrt{n^2+1}-3(n^2+1)-12$[此式应用了条件(2)]

$=-3(\sqrt{n^2+1}-2)^2\leqslant 0$.

故$\sqrt{n^2+1}-2=0$, $n=\pm\sqrt{3}$,不是整数.

所以满足条件的 a、b 不存在.

特别提示

解法四仅供参考.

针对训练

一、选择题

1.下列集合中,表示同一集合的是 ( )

A. $M=\{(2,3)\}, N=\{(3,2)\}$

B. $M=\{3,2\}, N=\{2,3\}$

C. $M=\{3,2\}, N=\{(3,2)\}$

D. $M=\{0\}, N=\varnothing$

2.下列各式中正确的是 ( )

A. $2\subseteq\{x\mid x\leqslant 3\}$　　B. $\{2\}\in\{x\mid x\leqslant 3\}$

C. $2\in\{x\mid x\leqslant 3\}$　　D. $2\subsetneqq\{x\mid x\leqslant 3\}$

3.由实数 $-a, a, |a|, \sqrt{a^2}, \sqrt[3]{a^3}$所组成的集合中,最多含有元素的个数是 ( )

A.2个　　B.3个　　C.4个　　D.5个

4.已知集合 $A=\{x\mid x>2\sqrt{3}\}$，$a=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$，则 (　　)

A. $a\subseteq A$　　B. $\{a\}\in A$　　C. $a\notin A$　　D. $a\in A$

5.满足 $\{a,b\}\subseteq M\subsetneqq\{a,b,c,d,e\}$ 的集合 M 的个数是 (　　)

A.2　　B.4　　C.6　　D.7

6.已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-x=0\}$，则满足条件 $B\subseteq A$ 的所有集合 B 的个数是 (　　)

A.4　　B.3　　C.2　　D.1

7.若 $A=\{a\mid a=3n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{b\mid b=3n-2,n\in\mathbf{Z}\}$，$C=\{C\mid C=6n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，则 A、B、C 的关系是 (　　)

A. $A\supsetneqq B\supsetneqq C$　　B. $A\subsetneqq B\subsetneqq C$

C. $A=B\supsetneqq C$　　D. $A=B\subsetneqq C$

8.设集合 $P=\{x\mid x^2+x-6=0\}$，$Q=\{x\mid mx+1=0\}$，若 $Q\subsetneqq P$，则实数 m 可取的不同值的个数是 (　　)

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

9.集合 $A=\{(x,y)\mid y=-2x^2+x-1,x\in\mathbf{R},x\neq0\}$，若点 P 的坐标 $(x,y)\in A$，则点 P 所在象限为 (　　)

A.第一或第二象限　　B.第二或第三象限

C.第三或第四象限　　D.第一或第四象限

10.设集合 $A=\{x\mid 0<x\leqslant2\}$，$B=\{m\mid m\subseteq A\}$，则 A、B 之间的关系是 (　　)

A. $A\in B$　　B. $A\subseteq B$　　C. $B\in A$　　D. $B\subseteq A$

11.已知集合 $P=\left\{a\,\middle|\,\dfrac{6}{5-a}\in\mathbf{N}^*\text{ 且 }a\in\mathbf{Z}\right\}$，则 P 等于 (　　)

A. $\{2,3\}$　　B. $\{1,2,3,4\}$

C. $\{1,2,3,6\}$　　D. $\{-1,2,3,4\}$

12.已知集合 $A=\{x\mid x=a^2+1,a\geqslant1,a\in\mathbf{N}\}$，$B=\{x\mid x=b^2-4b+5,b\geqslant1,b\in\mathbf{N}\}$，则 A、B 的关系是 (　　)

A. $A=B$　　B. $A\subsetneqq B$　　C. $A\in B$　　D. $A\supsetneqq B$

13.设集合 $M=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$，$N=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{k}{4}+\dfrac{1}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，则 (　　)

A. $M=N$　　B. $M\subsetneqq N$

C. $M\supsetneqq N$　　D. $M\cap N=\varnothing$

14.已知集合 $A=\{1,2,3,a\}$，$B=\{3,a^2\}$，使 $A\cup B=A$ 成立的实数 a 的个数为 (　　)

A.2　　B.3　　C.4　　D.5

15.已知 I 为全集，集合 M、$N\subsetneqq I$，若 $M\cap N=N$，则 (　　)

A. $\complement_I M \supseteq \complement_I N$　　B. $M \subseteq \complement_I N$

C. $\complement_I M \subseteq \complement_I N$　　D. $M \supseteq \complement_I N$

16. 已知集合 $M=\{(x,y)\mid x+y=2\}$，$N=\{(x,y)\mid x-y=4\}$，那么集合 $M\cap N$ 为　　(　　)

A. $x=3, y=-1$　　B. $(3,-1)$

C. $\{3,1\}$　　D. $\{(3,-1)\}$

17. 已知全集 $I=\mathbf{N}$，集合 $A=\{x\mid x=2n, n\in\mathbf{N}\}$，$B=\{x\mid x=4n, n\in\mathbf{N}\}$，则　　(　　)

A. $I=A\cup B$　　B. $I=\complement_I A\cup B$

C. $I=A\cup \complement_I B$　　D. $I=\complement_I A\cup \complement_I B$

18. 若 $\{1\}\subsetneqq A\subseteq\{1,2,3,4,5\}$，且 A 中所有元素之和为奇数的集合 A 的个数是　　(　　)

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

19. 设 $A=\{(x,y)\mid 4x+y=6\}$，$B=\{(x,y)\mid 3x+2y=7\}$，满足 $C\subseteq A\cap B$ 的集合 C 的个数为　　(　　)

A. 4　　B. 2　　C. 1　　D. 0

20. 已知集合 A、B、C 满足 $A\cup B=A\cup C$，那么下列各式中一定成立的是（　　）

A. $A\cap B=A\cap C$　　B. $B=C$

C. $B\subseteq C$ 或 $C\subseteq B$　　D. 以上都不对

21. 已知集合 $M=\{a^2, a+1, -3\}$，$N=\{a-3, 2a-1, a^2+1\}$，若 $M\cap N=\{-3\}$，则 a 的值是　　(　　)

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

22. 若集合 $A=\{y\mid y=2^{-x}\}$，$B=\{y\mid y=\sqrt{1-x}\}$，则 $A\cap B$ 等于　　(　　)

A. $\{y\mid y>1\}$　　B. $\{y\mid y\geqslant 1\}$　　C. $\{y\mid y>0\}$　　D. $\{y\mid y\geqslant 0\}$

23. 已知全集 $U=\{a,b,c,d,e\}$，M、$N\subsetneqq U$，若 $M\cap N=\{b\}$，$\complement_U M\cap N=\{d\}$，$\complement_U M\cap\complement_U N=\{a,e\}$，则下列结论正确的是　　(　　)

A. $C\in M$，且 $C\in N$　　B. $C\in\complement_U M$，且 $C\in N$

C. $C\in M$，且 $C\in\complement_U N$　　D. $C\in\complement_U M$，且 $C\in\complement_U N$

24. 设 $M=\{x\mid x=a^2+1, a\in\mathbf{N}^*\}$，$N=\{y\mid y=b^2-4b+5, b\in\mathbf{N}^*\}$，则下列关系正确的是　　(　　)

A. $M=N$　　B. $M\subsetneqq N$　　C. $M\supsetneqq N$　　D. $M\cap N=\varnothing$

25. 已知 $A=\{x\mid x^2-2x-3=0\}$，$B=\{x\mid ax-1=0\}$，若 $A\cup B=A$，则实数 a 的取值集合为　　(　　)

A. $\left\{-1,0,\frac{1}{3}\right\}$　　B. $\{-1,0\}$

C. $\left\{-1,\frac{1}{3}\right\}$　　D. $\left\{\frac{1}{3},0\right\}$

26. 已知集合 $M=\{x\mid x=3m+1,m\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{y\mid y=3n+2,n\in\mathbf{Z}\}$，若 $x_0\in M$，$y_0\in N$，则 x_0y_0 与集合 M、N 的关系是　（　　）

A. $x_0y_0\in M,x_0y_0\in N$　　B. $x_0y_0\in M,x_0y_0\notin N$

C. $x_0y_0\notin M,x_0y_0\in N$　　D. $x_0y_0\notin M,x_0y_0\notin N$

27. 已知集合 $P=\{(x,y)\mid y=\sqrt{1-x^2},x.y\in\mathbf{R}\}$，$Q=\{(x,y)\mid x=1,y\in\mathbf{R}\}$，则 $P\cap Q$ 等于　（　　）

A. $\{(1,0)\}$　　B. $\{1,0\}$　　C. $\{y\mid 0\leqslant y\leqslant 1\}$　　D. $\varnothing$

28. 已知集合 $M=\{(x,y)\mid y=\sqrt{2x-x^2}\}$，$N=\{(x,y)\mid y=k(x+1)\}$，当 $M\cap N\neq\varnothing$ 时，k 的取值范围是　（　　）

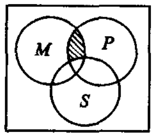
A. $\left(-\infty,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$　　B. $\left[0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

C. $\left[0,\frac{1}{2}\right]$　　D. $(0,\sqrt{3})$

29. 已知集合 $P=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\}$，$Q=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$，则　（　　）

A. $P\subsetneqq Q$　　B. $P=Q$

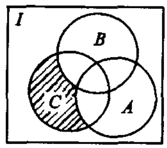
C. $P\cup Q=P$　　D. $P\cap Q=Q$



30. I 是全集，M、P、S 是 I 的 3 个子集，则阴影部分所表示的集合是　（　　）

A. $(M\cap P)\cap S$　　B. $(M\cap P)\cup S$

C. $(M\cap P)\cap\complement_I S$　　D. $(M\cap P)\cup\complement_I S$



31. I 是全集，A、B、C 是 I 的 3 个子集，图中阴影部分表示的集合是　（　　）

A. $\complement_I(A\cup B)\cap C$　　B. $\complement_I(A\cap B)\cap C$

C. $(A\cup B)\cap\complement_I C$　　D. $(A\cap B)\cap\complement_I C$

32. 集合 $A=\{x\mid -1\leqslant x<2\}$；$B=\{x\mid x<a\}$，若 $A\cap B\neq\varnothing$，则实数 a 的集合是　（　　）

A. $\{a\mid a<2\}$　　B. $\{a\mid a>-2\}$　　C. $\{a\mid a>-1\}$　　D. $\{a\mid -1\leqslant a<2\}$

二、填空题

33. 已知 $A=\{x\mid x=2k,k\in\mathbf{N}^*\}$，$B=\{x\mid x=2k-1,k\in\mathbf{N}^*\}$，则 $A\cup B$ __________，$A\cap B=$ __________.

34. 已知 $M=\{(x,y)\mid 4x-y-3=0\}$，$N=\{(x,y)\mid 2x-3y+11=0\}$，则 $A\cap B$ 等

于__________.

35.已知 $A=\{y\mid y=x^2-2x+3\}$，$B=\{y\mid y=2x^2-3x+1\}$，则 $A\cap B=$ __________.

36.已知 $A=\{x\mid x\neq 0,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y\mid y\neq 2,y\in\mathbf{R}\}$，则 $A\cup B=$ __________.

37.设集合 $M=\{(x,y)\mid x>0,y>0\}$，$N=\{(x,y)\mid x+y>0,xy>0\}$，则 M 与 N 的关系是__________.

38.集合 $M=\{x\mid ax^2+2x+1=0,a、x\in\mathbf{R}\}$ 中有且只有一个元素，那么 a 的取值集合为__________.

39.已知集合 $P=\{a,0\}$，$Q=\{1,2\}$，且 $P\cap Q=\{1\}$，又 $M=P\cup Q$，那么集合 M 的真子集有______个.

40.方程 $x^2-(p-1)x+q=0$ 的解集为 A，方程 $x^2+(q-1)x+p=0$ 的解集为 B，已知 $A\cap B=\{-2\}$，则 $A\cup B=$ __________.

三、解答题

41.设全集 $U=\{2,3,a^2+2a-3\}$，$A=\{|a+1|,2\}$，$\complement_U A=\{5\}$，求 a 的值.

42.已知集合 $A=\{-4,2a-1,a^2\}$，$B=\{a-5,1-a,9\}$，且 $A\cap B=\{9\}$，求 a 的值.

43.若 $A=\{x\mid -2<x<-1$，或 $x>1\}$，$B=\{x\mid a\leqslant x<b\}$，$A\cup B=\{x\mid x>-2\}$，$A\cap B=\{x\mid 1<x<3\}$，求实数 a、b 的值.

44.集合 $A=\{(x,y)\mid x^2+mx-y+2=0\}$，集合 $B=\{(x,y)\mid x-y+1=0$，且 $0\leqslant x\leqslant 2\}$，又 $A\cap B\neq\varnothing$，求实数 m 的取值范围.

45.已知 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x\mid x^2-mx+2=0\}$，若 $A\cap B=B$，求实数 m 的取值范围.

46.设集合 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant a\}$，$B=\{y\mid y=2x+3,x\in A\}$，$C=\{z\mid z=x^2,x\in A\}$，求使 $C\subseteq B$ 的实数 a 的取值范围.

47.集合 $A=\{x\mid x^2-ax+a^2-19=0\}$；$B=\{x\mid \log_2(x^2-5x+8)=1\}$；$C=\{x\mid x^2+2x-8=0\}$.求当 a 取什么实数时，$A\cap B\supsetneqq\varnothing$ 和 $A\cap C=\varnothing$ 同时成立.

48.集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x\mid x^2-ax+(a-1)=0\}$，$C=\{x\mid x^2-mx+2=0\}$.已知 $A\cup B=A$，$A\cap C=C$，求 a、m 的值.

49.设函数 $f(x)=x^2+px+q$，$(p、q\in\mathbf{R})$，$A=\{x\mid x=f(x),x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid f[f(x)]=x,x\in\mathbf{R}\}$.

(1)证明 $A\subseteq B$；

(2)当 $A=\{-1,3\}$时，求 B.

50.设集合 $A=\{(x,y)\mid y^2-x-1=0\}$，$B=\{(x,y)\mid 4x^2+2x-2y+5=0\}$，$C=\{(x,y)\mid y=kx+b\}$.求证：必存在 k、$b\in\mathbf{N}^*$，使得$(A\cup B)\cap C=\varnothing$.