抗争中的数学方法

——对策论基础

〔苏〕耶·斯温特切勒 原著

史及民 译

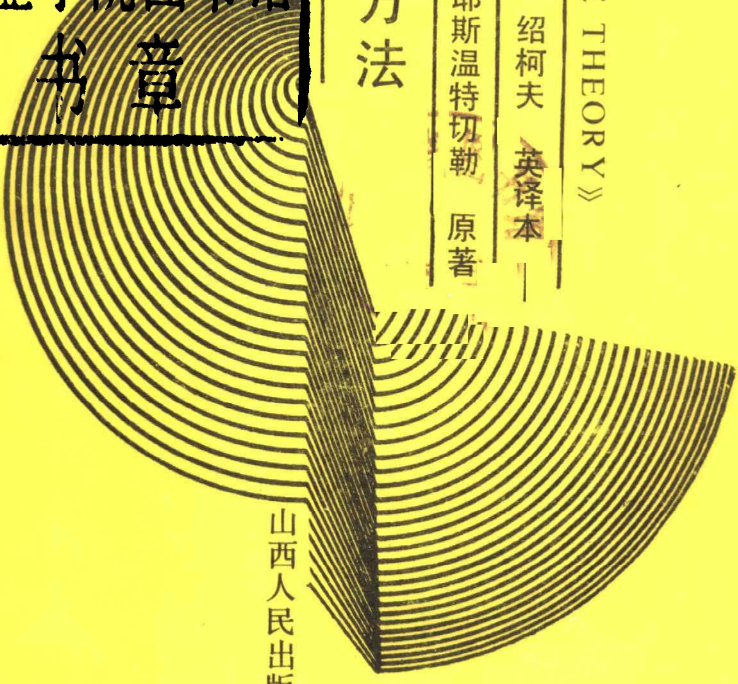
山西人民出版社

抗争中的数学方法

《ELEMENTS OF GAME THEORY》

史及民 译自 伏拉吉米尔 绍柯夫 英译本

对策论基础 苏耶斯温特切勒 原著



山西人民出版社

抗争中的数学方法
——对策论基础
〔苏〕耶·斯温特切勒　原著
史及民　译
山西人民出版社出版发行（太原并州北路十一号）
太原印刷厂印刷
*
开本：787×1092 1／32　印张：2.5字数：51千字
1989年1月第1版1989年6月太原第1次印刷
印数：1—5000册
*
ISBN　7—203—01288—3
G·584　　定价：1.30元

内 容 提 要

本书以通俗形式介绍在生产斗争、经济活动以及军事方面有广泛应用的对策论原理与矩阵对策的若干解法。书中通过诸多生动有趣的举例来阐释基本原理，没有多少证明。粗知初等微积分与概率论原理，即可阅读。可作高中与大学低年级学生课外读物及自学青年的参考用书。

目　录

§1　对策论题材　基本概念

我们在解决经济、军事及其它实际问题时，时常要对双方或多方为了各自的利益和目的进行的激烈抗争进行分析。此时，任何一方采取某项行动结果如何，与对方采取的行动的方针路线有关。这种局势叫做抗争局势。

可以举出许多实际的抗争例子来。象军事上的一切局势都是抗争局势。敌对各方为争取胜利，采取一切有效措施遏制对方。在武器的运用、战术的选择上，更一般地，在军事行动的部署上，都有抗争局势出现。此时分析敌方行动做出决断，须从最坏的假定出发。再如经济场合，尤其是自由竞争的经济场合，也是抗争局势。这里参与竞争的是一些商行，或工业企业等。

研究抗争场合的抗争局势，产生了一些专门的数学方法。对策论实际上就是这样一种数学理论。为对立各方刻意运筹，以便他们在抗争中理智地行动，便是它的宗旨。

实践中遇到的抗争局势一般都很复杂，许多伴随因素妨碍了对它们的分析研究。要想从数学上来研究抗争局势。必须撇开次要因素，构造一个简单的、形式化的模型。这样的模型就称为“对策”。

对策跟实在的抗争不同之处在于它是按确定的规则进行的。人们玩这种形式化的抗争模型，象国际象棋、西洋跳棋、纸牌游戏等等，已由来很久。这些游戏都是按一定规则

进行，而于一方“赢”时结束。

这种人为安排的，依照规则进行的游戏，于阐明和学习对策论基本概念是最合适不过了。出自这些游戏的术语，同样适用于别的抗争场合。对策论使用这样一套叫法：称参与对策的各方为“局中人”，称得到的一个结果为一方的“赢得”或“支付”。

一个对策是两个对手或多个对手的利害冲突。前者叫二人对策，后者叫多人对策。多人对策各方，在对策过程中可能暂时或永久结盟。如果结为两个永久联盟，这个多人对策就成为二人对策了。实际上最重要的对策是二人对策，因此我们仅限于考虑这种对策情形。

在介绍初等对策理论之前，我们先阐述一些基本概念。看两个局中人A、B由于对立的利害关系进行的二人对策。说到A、B对策，也就是为A、B安排了一些可供采取的行动。要从数学上讨论对策，就须确切陈述这个对策的规则。“对策规则”是一组条件，它规定了每个局中人可以选择什么样的行动路线，各方对对方行为的了解程度，选择步着（对策过程中所做的个别决定）的顺序，以及给出全体步着会导致什么样的结果。对策的结果（输或赢）不一定总能定量表示，但借助于建立某个计量尺度，以某个数表示这结果，通常是可能的。比如，在国际象棋赛中，就可用1表示胜，-1表示败，0表示和局。

一个对策若是一方所得恰为另一方所失，即双方赢得之和为零，便称“零和对策”。零和对策中局中人的利害关系完全对立。下面只考虑零和对策。

因为在一个零和对策中，双方的赢得互为相反数，所以

分析这种对策，只要考虑一方的赢得就够了。比如只考虑A的赢得。为了叙述方便，今后我们径称A方为“我们”，称B方为“对方”。

“我们”（A方）总视作赢家，“对方”（B方）总视作输家。显然，这样看待并不意味着“我们”有什么真正的优势。容易看出，如果把赢得变号，则输家就成了赢家，赢家却成了输家。

对策的有节奏进行是一串相继的步骤或步着。在对策论中，步着是从对策规则准许的抉择中做出的一个选择。步着分**个人步着**与**或然步着**，**个人步着**是局中人在给定场合，审慎地选择了一步，并付诸实行。

国际象棋中的一着棋，就是个人步着的一个例子。一名棋手的每一着棋，都是他在棋盘上棋子布局容许的走法中，做出深思熟虑的一步选择。

个人步着有哪些可能的选择，由对策规则所规定，并且与双方此前总的走法有关。

或然步着是在若干可能发生的情形中，用某个随机方法（比如掷一枚硬币或一粒骰子，或把一付牌洗匀再分发出去，等等）做出的一种选择。或然步着不取决于局中人的主观愿望。例如，把头一张牌发给一个玩桥牌者，就是一个有52个等可能选择的或然步着。

要从数学上研究一个对策，要求对策规则必须指出每一或然步着可能结果的**概率分布**。

有的对策仅含或然步着（此所谓纯或然对策），有的则仅含个人步着（如国际象棋，西洋跳棋），大多数纸牌游戏是混合型的：既含或然步着，又含个人步着。

对策不仅依步着的性质（个人步着与或然步着）来划分，也依一个局中人可得到另一局中人行动信息的性质与数量来分类。“全信息对策”构成一类特殊的对策。在全信息对策中，每个局中人每走一步，都知道在此之前的全体步着（包括个人步着与或然步着）的结果。国际象棋、西洋跳棋，以及众所周知的“零与叉”游戏[注]，都是全信息对策。

抗争场合，通常对对手的行动缺乏了解，所以实际上重要的对策多非全信息对策。

对策论的基本概念之一是“策略”的概念。

局中人的策略是一组规则，其依赖于对策过程中已出现的情形。这组规则明确指出了局中人每步个人步着如何选取。

我们宜对策略概念作进一步阐释。

每步个人步着通常由局中人在对策过程中进行抉择；自然，抉择本身与对策当中已出现的特定情形有关。不过，从理论上讲，当我们设想局中人事先作出了一切决定时，则对策过程中呈现的局势就是不变的。为此局中人将必须列一张对策过程中可能出现的一切情形表，并就每一情形来预见他的抉择。对任何一个对策来说，这（纵然不是在实践上，也至少是）在原则上可以接受的。如果采纳了这样一个抉择方式，那就意味着局中人已经选定了一个确定的策略。

现在一个选定了某策略的局中人可以不亲自对策，而让一个漠不关心的人（裁判）按一张他认可的规则表去代行其事。这个策略也可用一定的程序形式输入一自动装置。现代电子计算机下棋就是按这种方式进行的。

“策略”概念要有意义，对策一定得有个人步着。仅有

〔注〕把0与×连接起来，排成三个的一种游戏——译者

或然步着的对策，无策略可言。

按可能策略的数目多少，对策分为“有限”对策与“无限”对策。

如果每个局中人都只有有限个策略，这个对策就叫有限对策。

如果局中人A有m个策略，B有n个策略，则称该有限对策为$m\times n$对策。

考虑两个局中人A、B（“我们”和“我们的对手”）之间的$m\times n$对策。

用A_1，A_2，…，A_m表示我们的策略；B_1，B_2，…，B_n表示我们对手的策略。

假定各自选定了一确定的策略：我们选定A_i，对手选定B_j。

如果该对策只含个人步着，则选定策略A_i、B_j，就毫不含糊地决定了对策结果，即决定了我们的赢得（支付），以a_{ij}表示。

如果该对策既含或然步着，又含个人步着，则就这两个策略A_i、B_j来说，赢得是个随机变量，它与全体或然步着的结果有关。在这种情况下，自然希望用赢得的平均值（数学期望）作为所期望赢得的估计。我们用同一个符号a_{ij}既表示赢得（支付）本身（在无或然步着的对策场合），又表示它的均值（在有或然步着的对策场合）。

假设对每对策略，我们都知道了赢得或支付（或其平均）值a_{ij}，则我们可以把这些a_{ij}值写成一个矩阵形式：行是我们的策略（A_i），列是对手的策略（B_j）。这矩阵就叫一个赢得阵或支付阵，简称对策阵。

一个$m\times n$对策的矩阵有如下形式：

B / A	B_1	B_2	…	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

我们用$\|a_{ij}\|$简单地表示一个对策阵。

看几个初等对策的例子。

例1．两个局中人A与B，都不窥视对方，各往桌上放一硬币，随自己意愿，使正面或反面朝上。如果二人抉择相同（都是正面朝上或反面朝上），则由A拿走这两个硬币；反之，由B拿去。分析这个对策，并构造其矩阵。

解：这个对策只有两着棋：我们一着，对手一着。这两着棋都是个人步着。该对策不是全信息对策，因为在进着瞬间，进着一方并不知对方做何种抉择。

由于两个局中人都只有一步个人步着，所以局中人的策略，就是对这仅有的一步个人步着的选择。

我们有两个策略：选择正面A_1，与选择反面A_2；我们

B / A	B_1（正面）	B_2（反面）
A_1（正面）	1	−1
A_2（反面）	−1	1

的对手有同样两个策略：正面B_1，反面B_2。所以这是一个2×2对策。设赢一枚硬币算作$+1$，则该对策阵由上表给出。

这个确实简单的对策，有助于我们理解对策论的某些基本概念。

假设这个游戏只玩一次，则对局中人而言，说不上哪个策略更高明。局中人做出任何一种抉择都一样合乎情理。然而，当重复该游戏时，情况就不同了。

事实上，假设我们（局中人A）已选定了某策略（比方说A_1），并且一直运用这个策略。则我们对手会由我们最初的步着猜出我们的策略是什么，并做出于我们最不利的反应，即他会选择反面。显然，总采用一种策略对我们并不利。要不输，我们必须时而选正面，时而选反面。不过，如果我们以任何一种确定的顺序交替地选择正面与反面（比如一个正面接一个反面），我们的对手兴许也能猜到这一点，而以于我们最糟糕的方式来对付我们。显然保证我们的对手不知道我们的策略的一个可靠办法是以连我们自己预先也不知道的方式（比如可以由掷一枚硬币来确保这一点）来安排我们的每一步着。于是，通过一个直觉论证，我们已迫近对策论的一个基本概念，即“混合策略”概念。混合策略是这样一种策略：按一定频率随机地交替运用“纯”策略（此处是A_1与A_2）。在本例中，由对称性考虑，预先知道策略A_1与A_2应该以同样的频率，随机地加以采用。在比较复杂的对策中，决定这个频率可能就不那么容易了。

例2. 局中人A与B同时并且彼此独立地写出1、2、3此三数之一。如果他们所写的数字之和为偶数，则B付给A与和数一样多的钱。若是奇数，则正相反，由A付给B跟和数一

样多的钱。分析这个对策，并构造其矩阵。

解：这个对策由两个步着组成，它们都是个人步着。我们（A）有三个策略：写下1(A_1)，2(A_2)，以及3（A_3）。我们的对手（B）有同样三个策略。这是一个3×3对策，具有如下矩阵：

A \ B	B_1	B_2	B_3
A_1	2	−3	4
A_2	−3	4	−5
A_3	4	−5	6

显然，象前例情形一样，针对我们所选的任一策略，我们的对手可报之以于我们是最坏的策略。事实上，比方说，我们选策略A_1，则我们的对手总对以策略B_2；我们选策略A_2，我们的对手总报以策略B_3；而我们选A_3时，我们的对手则对以B_2。于是选择任何一个确定的策略，我们都难免失败。[注] 在§5将给出这个对策的解，即对两个局中人都最为有利的一组策略。

例3.我们拥有三种武器A_1、A_2、A_3，敌人有三种飞机B_1、B_2、B_3。我们想击中敌机，敌人则不愿意被击中。使用武器A_1时，击中飞机B_1、B_2、B_3的概率分别为0.9、0.4、0.2；使用武器A_2时，相应的概率为0.3、0.6、0.8；使用A_3时，相应概率为0.5、0.7、0.2。按对策理论

〔注〕不过，不要忘记，我们的对手的处境与我们一样糟。

——著者

阐明该对策。

解：这情形可以看成是有两个个人步着与一个或然步着的3×3对策。我们的个人步着是选用一种武器，敌人的个人步着是挑选一种飞机来投入战斗。或然步着是用选定的武器对出动的敌机实施射击。这个或然步着兴许能，也兴许不能在战斗结束时击中飞机。击中飞机时，我们的赢得为1；反之为0。我们的策略是三个供挑选的武器；敌人的策略是三种供选用的飞机。

用一对指定的策略，得到的平均赢得正是用选定的武器击中选定的飞机的概率。该对策阵如下：

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3
A_1	0.9	0.4	0.2
A_2	0.3	0.6	0.8
A_3	0.5	0.7	0.2

对策论的宗旨是为抗争场合的局中人举荐一个拟定的方案，以便他们理智行事。即为每个局中人确定一个“最优策略”。

在对策论中，局中人的一个最优策略是这样的：当重复许多次时，这个策略会保证他有最大可能的平均赢得（或者说最小可能的平均损失）。选择最优策略时，要假定对手至少跟我们一样地精明，他会竭尽所能，以阻止我们达到目的。

对策论给出的一切举荐，都是从这些原则推演出来的，因此并不考虑风险因素（这些因素必然出现于每个实在的策

略中），也不考虑由局中人所造成的失误与差错。

象任何一个复杂现象的数学模型一样。对策论有其局限性。最大的局限是把赢得人为地简化为唯一的一个数。而在大多数实际抗争场合，当拟定一个合理的策略时，人们必须考虑行动成功的几个准则，即考虑几个而不是一个数值参数。按一个准则是最优的策略，按另一准则就未必为最优了。不过，由于认识到这些局限性，因而不盲目因循对策论方法所举荐的方案，人们依旧可以用数学上的对策论原理拟定出一个策略来，它纵然不是“最优”的，无论如何也总是“可以接受的”。

§2 对策的下值与上值

"最小最大"原则〔注〕

考虑一个有如下矩阵的$m\times n$对策。

B A	B_1	B_2	…	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}		a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}		a_{2n}
⋮	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

用字母i表示我们的策略号码，j表示我们的对手的策略号码。

我们着手决定我们的最优策略。由A_1开始，逐一分析我们的每一策略。选择策略A_i时，总要考虑到对手会采用使我们赢得a_{ij}为最小的策略B_j。决定这个赢得值，它是第i行数a_{ij}的最小值，以α_i表示：

$$\alpha_i = \min_j a_{ij} \tag{2.1}$$

此处，符号$\min\limits_j$（关于j的最小值）表示给定参数对一切

〔注〕*MINIMAX*原则，又叫最大风险最小化原则。——译者

可能j的最小值。

我们以附加列形式，把诸α_i写于上列矩阵之右。

B \ A	B_1	B_2	…	B_n	α_i
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	α_1
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	α_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	α_m
β_j	β_1	β_2	…	β_n	

选用策略A_i时，作为我们的对手理智行动的一个结果，我们的可望赢得不超过α_i。自然，按最谨慎的方式行事，又假定我们的对手是最理智的(即避免冒任何风险的)，我们应该决定一个策略A_i，使α_i为最大。用α表示这个最大值：

$$\alpha = \max_i \alpha_i$$

或者，考虑到公式（2.1）得

$$\alpha = \max_i \min_j \alpha_{ij}$$

数α叫做对策下值，或最大最小赢得，简称最大最小值。

数α居于矩阵某一行中，局中人A对应于这一行的策略称为最大最小策略。

显然，如果我们坚持最大最小策略，那末无论我们对手采取什么策略，在任何情况下，我们的赢得一定不少于α。因为这个缘故，称α为“对策下值”。这是固守最谨慎的策略（“稳扎稳打”），我们可以保证自己得到的最小赢得。