AOSAI

奥赛

WANGPAIJINGJIE

王牌精解

初二数学

主编：刘叔才

副主编：邓亚平　韩莉梅

团结出版社

前言

“奥林匹克”四个字早已超越了体育的界限，而成为一种精神的象征。因此，国际奥林匹克学科竞赛所倡导和弘扬的人文精神以及它背后隐含的对科学人才的成长乃至对科技发展的推动力已日渐为世人所瞩目。我国自1985年首次参加国际中学生数学奥林匹克竞赛以来，相继参加了物理、化学奥林匹克竞赛，连年取得优异的成绩，曾多次获得团体总分第一。它不仅激发了我国中学生的学习兴趣和竞赛热情，对我国学科人才的培养也起到了积极的推动作用。

为了配合我国奥林匹克学科竞赛活动的开展，为了适应广大中学生对奥林匹克竞赛指导教程的需要，以及为了给从事中学奥赛辅导及研究的教育工作者提供有益的参考资料，我们组织全国各地的部分专家、学者主持编写了《奥赛王牌精解》丛书。本丛书的宗旨是为广大的师生提供切实有用的奥赛辅导书，推动奥林匹克学科竞赛的普及。丛书体系以我国现行的初中、高中数学、物理、化学各学科竞赛大纲为依据。合理的将大纲设计的内容划分为若干章，章下又分若干专题。每专题下设“知识要点”、“范例精解”、“巩固练习”三个板块，不但讲述了竞赛所需的知识，并在思维方法和能力训练方面为学生提供了更多的启示和帮助。

本丛书的作者均是来自各省、市重点中学的特、高级教师，博士、硕士，他们或是中国奥林匹克竞赛的（省级）总教练，或是高级教练、一级教练，长期担任中学奥赛的组织、培训工作，有着丰富实用的竞赛教学经验，所培养出的参赛选手多次获得国际奥赛奖牌，为祖国赢得了荣誉。

本丛书编写过程中使用了众多的参考文献，在此向文献的作者致以衷心的感谢。由于时间仓促，书中难免有疏漏和不妥之处，敬请专家、读者批评指正。

《奥赛王牌精解》编委会

2004年8月

体例说明

《奥赛王牌精解·数学》是一套针对已全面掌握数学知识的参赛学生的复习备考用书。同时对于愿在数学学习方面有所突破和发展的学生有一定的帮助。它根据我国现行的竞赛大纲，将大纲所涉及内容合理地划分为若干章，每章又分专题，专题下设以下栏目：

知识要点

结合国内外各级数学竞赛的最新动向，对竞赛涉及的重点、难点问题及重要的竞赛思想方法进行精讲精析。

范例精解

围绕竞赛的重点和热点，选择经典题、创新题与启发性题进行精解。在解析过程中力求“分析到位，解答简明，评注点睛”，以便读者深入理解问题的实质、变化、缘由和关系，从中获得洞察力、创造机智和竞赛中的灵感。

巩固练习

有针对性地选择和设计一些对竞赛有指导意义的名题、佳题、新题，按选择题、填空题和解答题的顺序编写，对所讲的内容加以巩固，方法加以拓广，使读者达到强化知识、开阔视野、增强能力、提高综合素质的目的。

巩固练习参考答案

为了方便读者使用，书的最后给出了巩固练习中各题的详细解答过程。

通过以上栏目的讲解练习，希望能切实提高参赛学生的参赛水平。

目录 Contents

目录 Contents

第一章 因式分解

专题1 公式法

知识要点

多项式因式分解是代数变形的基础,它是代数式的一种重要的恒等变形.它作为数学的一种有力工具,在代数、几何等的解题与证明中起着重要作用.掌握因式分解的基本方法,熟练分解因式的技巧,不仅对因式分解本身是一个很好的能力培养,同时对与因式分解相关的一类问题也将起到得心应手的作用.

用公式法分解因式,常见的公式有:

1. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
2. $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$
3. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
4. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
5. $a^n-b^n=$
$$\begin{cases}(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots+ab^{n-2}-b^{n-1})(n\text{ 为偶数})\\(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})(n\text{ 为奇数})\end{cases}$$
6. $a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3=(a\pm b)^3$
7. $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=(a+b+c)^2$
8. $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+2a_1a_2+2a_1a_3+\cdots+2a_{n-1}a_n=(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2$
9. $a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$
10. $a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)(a^{2n}-a^{2n-1}b+a^{2n-2}b^2-\cdots+b^{2n})$
11. $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

公式越多,用起来越方便,但是,一定要记准确,抓住每个公式的特点,不要用错.

范例精解

例1 分解因式 (1) $1-12x^2y^2+48x^4y^4-64x^6y^6$

(2) $8a^3+27b^3-c^3+18abc$

(3) $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3$

分析 (1)观察式子中各项的指数，可以发现它和 $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ 结构相接近.

解答 $1-12x^2y^2+48x^4y^4-64x^6y^6$

$=1^3-3\times4x^2y^2+3\times16x^4y^4-4^3x^6y^6$

$=1^3-3\times(4x^2)y^2+3\times(4x^2)^2y^4-(4x^2)^3(y^2)^3$

$=(1-4x^2y^2)^3$

$=(1+2xy)^3(1-2xy)^3$

分析 (2)此题在结构上与公式

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$比较接近.

解答 $8a^3+27b^3-c^3+18abc$

$=(2a)^3+(3b)^3+(-c)^3-3\cdot(2a)\cdot(3b)\cdot(-c)$

$=(2a+3b-c)(4a^2+9b^2+c^2-6ab+2ac+3bc)$

分析 (3)在前面介绍的乘法公式中，没有直接可用于 $a^3+b^3+c^3$ 的公式，但公式 $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$可变形为：$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)+3abc$.

解答 $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3$

$=[(b-c)+(c-a)+(a-b)][(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2-(b-c)(c-a)-(b-c)(a-b)-(c-a)(a-b)]+3(b-c)(c-a)(a-b)$

$=3(b-c)(c-a)(a-b)$

评注 拿到题目后，一定要注意观察. 但最关键就是记熟公式.

例2 分解因式 $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{15}$

分析 此式比较复杂，无乘法公式直接可用. 注意到乘法公式：

$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1})$（$n$ 为奇数）

在这个乘法公式中，令 $y=1$ 可得：

$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots+x+1)$

这个式子右边的因式，从结构上看与此例较接近.

解答 由式子

$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$可知:

$x^{16}-1=(x-1)(x^{15}+x^{14}+\cdots+x^2+x+1)$

$$
\begin{aligned}
&1+x+x^2+\cdots+x^{15}\\
&=\frac{x^{16}-1}{x-1}=\frac{(x^8+1)(x^8-1)}{x-1}\\
&=\frac{(x^8+1)(x^4+1)(x^4-1)}{x-1}\\
&=\frac{(x^8+1)(x^4+1)(x^2+1)(x^2-1)}{x-1}\\
&=\frac{(x^8+1)(x^4+1)(x^2+1)(x+1)(x-1)}{x-1}\\
&=(x^8+1)(x^4+1)(x^2+1)(x+1)
\end{aligned}
$$

评注 通过此题可以体会到,对公式的每一部分都要很熟悉,以达到灵活运用公式的目的.

例3 分解因式 $a^2+(a+1)^2+(a^2+a)^2$

分析 同例2一样,没有乘法公式直接可用,在这种情况下,可以先化简、变形.

解答 $a^2+(a+1)^2+(a^2+a)^2$

$$
\begin{aligned}
&=a^2+a^2+2a+1+(a^2+a)^2\\
&=(a^2+a)^2+2(a^2+a)+1\\
&=(a^2+a+1)^2
\end{aligned}
$$

评注 在解答过程中,也要先采用一些变形,向自己熟悉的公式靠拢,这样才能达到举一反三的效果.

例4 分解因式 $(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+x^n)^2-x^n(x\neq1)$

分析 首先要对式子化简、变形.

解答 $(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+x^n)^2-x^n$

$$=\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)^2-x^n$$

$$=\frac{1-2x^{n+1}+x^{2n+2}}{(1-x)^2}-x^n$$
$$=\frac{1-2x^{n+1}+x^{2n+2}-x^n(1-x)^2}{(1-x)^2}$$
$$=\frac{1-2x^{n+1}+x^{2n+2}-x^n+2x^{n+1}-x^{n+2}}{(1-x)^2}$$
$$=\frac{(1-x^n)-x^{n+2}(1-x^n)}{(1-x)^2}$$
$$=\frac{(1-x^n)(1-x^{n+2})}{(1-x)(1-x)}=\frac{1-x^n}{1-x}\cdot\frac{1-x^{n+2}}{1-x}$$
$$=(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})(1+x+x^2+\cdots+x^{n+1})$$

评注 解题过程中,注意公式变形的技巧,此题中运用了多项式乘法简化了分子,再进--步使用提取公式法进行变形.

例5 分解因式 $a^7-a^5b^2+a^2b^5-b^7$

分析 先对题目变形,不要着急使用公式.

解答 $a^7-a^5b^2+a^2b^5-b^7$

$=(a^7-a^5b^2)+(a^2b^5-b^7)$

$=a^5(a^2-b^2)+b^5(a^2-b^2)$

$=(a^2-b^2)(a^5+b^5)$

$=(a+b)(a-b)(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$

$=(a+b)^2(a-b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$

评注 在解题过程中,要寻找最简便的方法解答,最后结果要把相同因式写成乘方的形式.

例6 分解因式 (1) $m^{15}+m^{12}+m^9+m^6+m^3+1$

(2) $x^8+x^6+x^4+x^2+1$

分析 (1)题没有公式直接可用,需要对题目先进行分组分解.

解答 $m^{15}+m^{12}+m^9+m^6+m^3+1$

$=m^{12}(m^3+1)+m^6(m^3+1)+(m^3+1)$

$=(m^3+1)(m^{12}+m^6+1)$

$$=(m^3+1)(m^{12}+2m^6+1-m^6)$$
$$=(m^3+1)[(m^6+1)^2-(m^3)^2]$$
$$=(m^3+1)(m^6+1+m^3)(m^6+1-m^3)$$
$$=(m+1)(m^2-m+1)(m^6+m^3+1)(m^6-m^3+1)$$

分析 $(x^2)^5-1=(x^2-1)(x^8+x^6+x^4+x^2+1)$

解答 $x^8+x^6+x^4+x^2+1$

$$=\frac{x^{10}-1}{x^2-1}=\frac{(x^5+1)(x^5-1)}{x^2-1}$$
$$=\frac{x^5+1}{x+1}\cdot\frac{x^5-1}{x-1}$$
$$=\frac{(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)}{x+1}\cdot\frac{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)}{x-1}$$
$$=(x^4-x^3+x^2-x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$$

评注 用公式法分解因式,有时需反复应用公式,有时需与其他方法结合使用.

巩固练习

一、选择题

1. a,b,c,d 都是正数,则在以下命题中,错误的是 ( )

A. 若 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac$,则 $a=b=c$

B. 若 $a^3+b^3+c^3=3abc$,则 $a=b=c$

C. 若 $a^4+b^4+c^4+d^4=2(a^2b^2+c^2d^2)$,则 $a=b=c=d$

D. 若 $a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$,则 $a=b=c=d$

2. 设 $a>2,b>3,c>6$,令 $M=abc,N=ab+bc+ca$,则 M,N 的大小关系是 ( )

A. $M>N$　　B. $M<N$

C. $M=N$　　D. 以上三种情况都有可能

3. 将 $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2$ 分解因式得 ( )

A. $(a^2-b^2-c^2)^2$

B. $(a^2-b^2-c^2+2bc)(a^2-b^2-c^2-2bc)$

C. $(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)(a-b-c)$

D. $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b+c)$

4. 当 $x-y=1$ 时，$x^4-xy^3-3x^2y+3xy^2+y^4$ 的值为 ( )

A. -1 B. 0 C. 2 D. 1

二、填空题

5. 设方程 $x^2-y^2=1\ 993$ 的整数解为 m,n. 则 $|mn|=$ ______.

6. 分解因式 $1+a+b+c+ab+bc+ac+abc=$ ______.

7. 已知 $1+x+x^2+x^3+x^4=0$，则多项式 $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{2\ 004}$ 的值等于 ______.

三、解答题

8. 分解因式

(1) a^6-64b^6

(2) x^9+y^9

(3) $8a^3+b^3+c^3-6abc$

(4) $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{17}$.

9. 分解因式

(1) $(b+c-2a)^3+(c+a-2b)^3+(a+b-2c)^3$

(2) $(x^2+y^2)^3+(z^2-x^2)^3-(y^2+z^2)^3$.

10. 分解因式

(1) $4x^4-4x^3+13x^2-6x+9$

(2) $a^3+a^2b+ab+b-1$

(3) $x^2+y^2+z^2+2xy-2xz-2yz-x^2y^2$.

专题 2　拆项、添项法

知识要点

拆项是将代数式中的某项拆成两项或更多项的代数和的一种恒等变形。而添项是特殊的拆项，即把零拆成两个相反项的和. 由于因式分解是多项式乘法的逆运算，是在乘法运算的整理化简中把同类项合并了，所以在因式分解时，常常通过适当的拆项和添项，把某些被合并的同类项恢复原状，以便能使用公式或提取公因式进行分组分解.

范例精解

例1 分解因式 x^3+2x^2-5x-6

分析 这是一个关于 x 的三次式，直接分组分解无法进行，可以把二次项 $2x^2$ 拆成 x^2+x^2，把一次项分成 $x+(-6x)$ 或 $3x^2-x^2$，$-3x-2x$ 或 $-2x^2+4x^2$，$-8x+3x$.

解法一
$$\begin{aligned}&x^3+2x^2-5x-6\\=&(x^3+x^2)+(x^2+x)+(-6x-6)\\=&x^2(x+1)+x(x+1)-6(x+1)\\=&(x+1)(x^2+x-6)\\=&(x+1)(x+3)(x-2)\end{aligned}$$

解法二
$$\begin{aligned}&x^3+2x^2-5x-6\\=&(x^3+3x^2)+(-x^2-3x)+(-2x-6)\\=&x^2(x+3)-x(x+3)-2(x+3)\\=&(x+3)(x^2-x-2)\\=&(x+3)(x-2)(x+1)\end{aligned}$$

解法三
$$\begin{aligned}&x^3+2x^2-5x-6\\=&(x^3-2x^2)+(4x^2-8x)+(3x-6)\\=&x^2(x-2)+4x(x-2)+3(x-2)\\=&(x-2)(x^2+4x+3)\\=&(x-2)(x+1)(x+3)\end{aligned}$$

解法四
$$\begin{aligned}&x^3+2x^2-5x-6\\=&(x^3+x^2-6x)+(x^2+x-6)\\=&x(x^2+x-6)+(x^2+x-6)\\=&(x^2+x-6)(x+1)\\=&(x+3)(x-2)(x+1)\end{aligned}$$

解法五
$$\begin{aligned}&x^3+2x^2-5x-6\\=&(x^3-x^2-2x)+(3x^2-3x-6)\\=&x(x^2-x-2)+3(x^2-x-2)\end{aligned}$$

$=(x+3)(x-2)(x+1)$

解法六

$$\begin{aligned}&x^3+2x^2-5x-6\\=&(x^3+4x^2+3x)+(-2x^2-8x-6)\\=&x(x^2+4x+3)-2(x^2+4x+3)\\=&(x-2)(x+1)(x+3)\end{aligned}$$

评注

怎样才能对折项做到得心应手呢?

(1)首先将多项式按某一字母降幂排列;

(2)折项时首先考虑每组两项,经试验不能分解时,再考虑每组三项;

(3)用下述的列表法进行试验较为简便.列表的要求是:每行中依次填写各组的系数,每列的数字之和等于原多项式中同类项的系数.如果每行的系数对应成比例,则多项式就能按表中的系数折项分组.如例1的解法列表如下:

解法一

多项式的系数	1　2　-5　-6
第一组	1:(1)
第二组	(1):(1)
第三组	(-6):(-6)

解法二

多项式的系数	1　2　-5　-6
第一组	1:(3)
第二组	(-1):(-3)
第三组	(-2):(-6)

(4)在试验时,两项系数的比可以从最简单的情况1:1,1:2,1:3,1:(-1),1:(-2),1:(-3)开始试验.

例2 分解因式 (1)x^4-7x^2+1

(2)x^5+x+1

分析 (1)题不能直接采用提取公因式法或公式法进行分解,所以考虑运用拆项法.将$-7x^2$拆成$2x^2$和$-9x^2$,把原来的三次式拆成四次式分解.

解答 (1)x^4-7x^2+1

$$=x^4+2x^2+1-9x^2$$
$$=(x^2+1)^2-9x^2$$
$$=(x^2+1+3x)(x^2+1-3x)$$

评注 本题拆项分组后能运用公式分解.

分析 (2)题原式无法直接分解,可添x^2与$-x^2$两项分组分解.

解答 x^5+x+1

$$=(x^5-x^2)+(x^2+x+1)$$
$$=x^2(x^3-1)+(x^2+x+1)$$
$$=x^2(x-1)(x^2+x+1)+(x^2+x+1)$$
$$=(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)$$

评注 此题是将$0\cdot x^2$拆成$-x^2+x^2$两项,也可以说添上了$-x^2$与x^2两项再分组.

例3 分解因式 $(1+y)^2-2x^2(1+y^2)+x^4(1-y)^2$

分析 注意到首末项均为完全平方式,若要对它们配方,必须添加$2x^2(1-y^2)$、$-2x^2(1-y^2)$两项.

解答 $(1+y)^2-2x^2(1+y^2)+x^4(1-y)^2$

$$=(1+y)^2+2(1-y^2)x^2+x^4(1-y)^2-2(1-y^2)x^2-2x^2(1+y^2)$$
$$=[(1+y)+x^2(1-y)]^2-(2x)^2$$
$$=[(1+y)+x^2(1-y)+2x][(1+y)+x^2(1-y)-2x]$$
$$=(x^2+2x+1+y-x^2y)(x^2-2x+1+y-x^2y)$$
$$=[(x+1)^2-y(x^2-1)][(x-1)^2-y(x^2-1)]$$
$$=(x+1)(x+1-xy+y)(x-1)(x-1-xy-y)$$

评注 本题目用的是配方法，它是一种特殊的添拆项法.

例4 分解因式 $x^3+y^3+z^3-3xyz$

分析 这是一个与立方有关的式子，对于 x^3+y^3 要配成完全立方需添上 $3xy(x+y)$ 与 $-3xy(x+y)$. 下面试一试.

解答 $x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=x^3+3xy(x+y)+y^3+z^3-3xyz-3xy(x+y)$

$=(x+y)^3+z^3-3xy(x+y+z)$

$=(x+y+z)[(x+y)^2-(x+y)z+z^2]-3xy(x+y+z)$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2+2xy-xz-yz-3xy)$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$

评注 这是上一专题中我们曾经给出的公式，此公式在数学竞赛中经常出现，除了要记牢公式本身以外，同时也要熟练运用此公式的各种变形.

例5 分解因式 $bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b)$

分析 $c-a=(b+c)-(a+b)$，即将 $(c-a)$ 添项变形后可分组提取公因式.

解答 $bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b)$

$=bc(b+c)+ca[(b+c)-(a+b)]-ab(a+b)$

$=[bc(b+c)+ca(b+c)]-[ca(a+b)+ab(a+b)]$

$=c(b+c)(b+a)-a(a+b)(b+c)$

$=(b+c)(a+b)(c-a)$

评注 此题介绍的拆项技巧，在竞赛中经常出现，在解题过程中要注意积累经验.

例6 分解因式 $1+2a+3a^2+4a^3+5a^4+6a^5+5a^6+4a^7+3a^8+2a^9+a^{10}$

分析 此题的结构很复杂，不过我们仍然可以对照公式 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$，对原式进行拆分或者添项，然后观察是否有公因式可提.

解答 $1+2a+3a^2+4a^3+5a^4+6a^5+5a^6+4a^7+3a^8+2a^9+a^{10}$

$=(1+2a+a^2)+(2a^2+4a^3+2a^4)+(3a^4+6a^5+3a^6)+(2a^6+4a^7+2a^8)+(a^8+2a^9+a^{10})$

$=(a+1)^2+2a^2(a+1)^2+3a^4(a+1)^2+2a^6(a+1)^2+a^8(a+1)^2$

$=(a+1)^2(1+2a^2+3a^4+2a^6+a^8)$

$=(a+1)^2[a^8+a^4+1+2a^6+2a^4+2a^2]$

$=(a+1)^2(a^4+a^2+1)^2$

$=(a+1)^2[(a^4+2a^2+1)-a^2]^2$

$=(a+1)^2[(a^2+1)^2-a^2]^2$

$=(a+1)^2(a^2+1+a)^2(a^2+1-a)^2$

评注 要多注意观察题目特点，积累解题技巧.

巩固练习

一、选择题

1. 设 m,n 满足 $m^2n^2+m^2+n^2+10mn+16=0$，则 $(m,n)=$ ( )

A. $(2,-2)$或$(-2,-2)$　　B. $(2,2)$或$(2,-2)$

C. $(2,-2)$或$(-2,2)$　　D. $(-2,-2)$或$(-2,2)$

2. 若 a,b 是正数，且满足 $12\ 345=(111+a)(111-b)$，则 a 与 b 之间的大小关系是 ( )

A. $a>b$　　B. $a=b$　　C. $a<b$　　D. 不能确定

3. 若 $3x^2-x=1$，则 $9x^4+12x^3-2x^2-7x+1\ 999$ 的值等于 ( )

A. 1 997　　B. 1 999　　C. 2 001　　D. 2 003

4. n 为某一自然数，代入代数式 n^3-n 中计算其值时，四个同学算出如下四个结果，其中正确的结果只能是 ( )

A. 388 944　　B. 388 945　　C. 388 954　　D. 388 948

二、填空题

5. 分解因式 $3a^2-7a-6=$ ______.

6. 已知 $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+14=0$，则 $x+y+z=$ ______.

7. 分解因式 $x^4+x^2+2ax+1-a^2=$ ______.

三、解答题

8. 用四种不同的拆项方法分解因式

(1) x^3+3x^2-4

(2) x^3-9x+8

9. 分解因式　$2x^4-15x^3+38x^2-39x+14$

10. 分解因式

(1)$4x^4-4x^3+13x^2-6x+9$

(2)$a^3b-ab^3+a^2+b^2+1$

(3)$(a+1)^2x^4+2(a-1)x^2y^2+y^4$

(4)$x^4+y^4+(x+y)^4$

专题 3　换元法

知识要点

换元法是进行代数恒等变形的一种重要方法.它通过引入新的字母变量,将原式中的字母变量代换掉,从而将式子简化.利用这种方法,对于某些特殊多项式的因式分解可以起到简化作用.

范例精解

例1 分解因式　$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-120$

分析 如果将此式展开,就可以得到一个 x 的四次多项式,对于分解因式十分繁琐.注意到:

$(x+1)(x+4)=x^2+5x+4$;$(x+2)(x+3)=x^2+5x+6$

其中含有 x 的项是相同的,都是 x^2+5x.如果令 $x^2+5x=t$,则可将原来关于 x 的四次式化简为关于 t 的二次三项式.

解答

$$\begin{aligned}&(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-120\\=&[(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)]-120\\=&(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-120\end{aligned}$$

方法一　设 $x^2+5x=t$,则

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(t+4)(t+6)-120\\&=t^2+10t-96\\&=(t+16)(t-6)\\&=(x^2+5x+16)(x^2+5x-6)\end{aligned}$$