主编　李庆胜

走近名校

……

黄冈中学

南京师大附中

长沙一中

南开中学

天津外国语学校

上海复兴中学

福州一中

山东实验中学

安庆一中

湖南师大附中

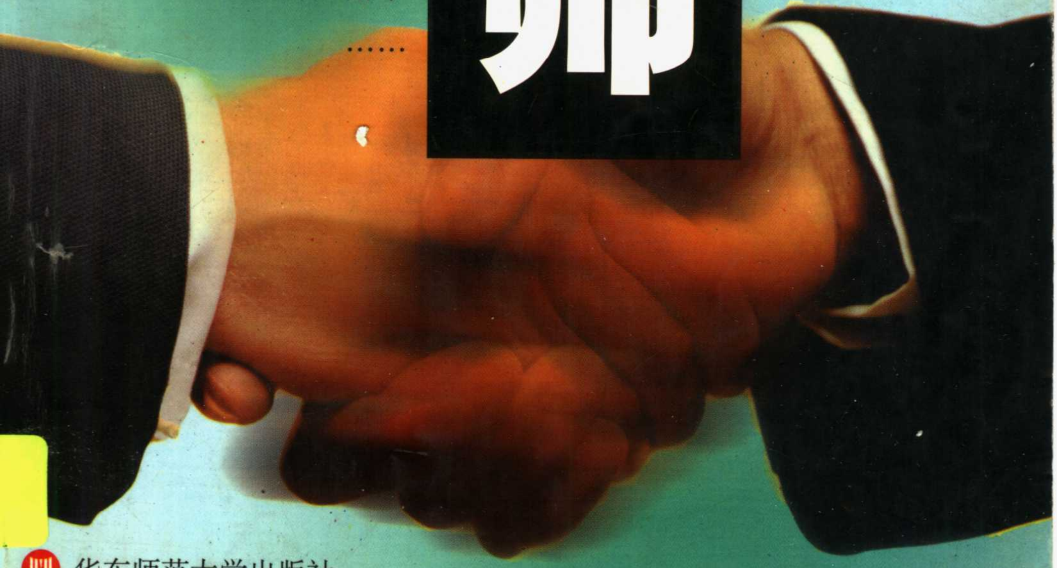
……

点击名师

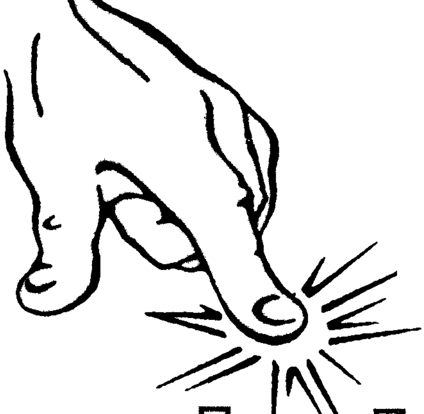
高二数学

人教版新教材教辅

教辅 华东师大版



华东师范大学出版社



点击名师

高二数学

主　编　李庆胜

副主编　孙承巽

参编者　龚洪戈　张方水　王　英　杨　芳

马炳新　张庆国　范雪岩　石　磊

王学红　吴建广　田广明　王金勇

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

点击名师．高二数学/李庆胜主编．—上海：华东师范大学出版社，2002.6

ISBN 7-5617-2930-8

Ⅰ．点… Ⅱ．李… Ⅲ．数学课—高中—教学参考资料
Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 021630 号

点击名师
高二数学

组　　稿　倪　明
主　　编　李庆胜
特约编辑　刘巧华
封面设计　黄惠敏
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
　　　　　市场部 电话 021-62865537
　　　　　　　　 传真 021-62860410
http://www.ecnupress.com.cn
社　　址　上海市中山北路 3663 号
　　　　　邮编 200062

印 刷 者　华东师范大学印刷厂
开　　本　890×1240　32 开
印　　张　10.875
字　　数　379 千字
版　　次　2002 年 6 月第一版
印　　次　2002 年 6 月第一次
书　　号　ISBN 7-5617-2930-8/G·1465
定　　价　13.00 元

出 版 人　朱杰人

主编自述

李庆胜 山东省实验中学数学高级教师、教研组长、竞赛主教练，中国数学奥林匹克竞赛高级教练，济南市专业技术拔尖人才、高中学科带头人、兼职教研员、十佳优秀教育工作者之一、市政协常委。在40多年教育生涯中，培养了大批学生，其中多人在高考、初高中数学联赛中获山东省最高成绩，多人进入科大少年班、国家实验班、冬令营、国家集训队，其中1人获高中联赛全国最高成绩，2人分获国际数学奥林匹克竞赛金牌和银牌。自1979年编写出版《数学解题指导》后，有多篇著述发表。

从教中学本非所料，而作为以“一切听从党安排”为天职的一代人中的一员，也豪情满怀地立下“甘做双头点燃的红烛”之誓言。40年来，凭着良心和习惯，坚持“学钻磨闯创”，品尽苦辣酸甜。如今年过六旬，已是弟子五千、贤人百计，方悟出人生的真谛在于奋斗与关爱。我喜欢罗素的话：“三种极为普通又极为强烈的感情支配着我的一生：对爱的渴望，对知识的追求，对人生苦难不堪忍受的悲哀。”我也有自己的格言：我很笨但很坚韧，我很傻但很真诚。

从事教学不免涉及乐趣、创新、聪明……。什么是乐趣？对真善美的感悟和追求。什么是创新？获得自己或别人未获得过的真善美。没有创新则不得生存、发展，但是不存在没有继承和借鉴、超乎真实和理性的创新，否则将是谬误和灾难。什么是聪明？聪明人不是不犯错误的人。能勇敢地、迅速地改正错误的人才是聪明人。与其说“从胜利走向胜利”毋宁说“失败乃成功之姥姥之姥姥……”。

目　　录

第六章 不等式

6.1 不等式的性质

一、教学目标导向

【重点难点】

◆重点◆　掌握比较两实数大小的方法，理解不等式的性质及其证明.

◆难点◆　不等式性质的证明及其应用.

【能力要求】

(1) 通过对各定理的证明，掌握不等式知识结构的严密性，培养逻辑推理能力.

(2) 通过不等式性质的应用，培养学生的运算能力、类比推导能力以及化归的数学思想.

二、课堂分层导学

【学法指导】

本节根据实数的性质及其算术运算法则层层递进，推导出不等式的若干基本性质，其内容环环相扣，结构严谨. 在学习本节内容时要注意以下几点：(1) 要掌握本节的知识结构，弄清几个定理间的内在联系，及它们总的出发点；(2) 要注意学习不等式的变形方法和技巧，这样有助于进一步学习不等式的证明和求解；(3) 在应用不等式的性质解决问题时应及时总结规律，整理知识结构.

【精讲释疑】

(1) 本节的定理1(对逆性)和定理2(传递性)的证明是一个难点. 从这两个定理的证明中可以看出，为了体现数学的严密性，一些看上去很显然的结论也是需要进行严格证明的.

(2) 本节的另一要点是不等式变形过程中的等价性. 所以在对不等式进行变

形时要严格按不等式的性质进行.

(3)“作差比较法”是用来比较两数(式)大小的最基本的方法，通过两数的差与“0”的大小关系来确定两数(式)的大小关系.“作商比较法”也是一种常用方法，当$b>0$时我们可以通过考查$\frac{a}{b}$与1的大小关系来确定a与b的大小关系.

(4) 掌握一些常见的结论：① 减法法则：$a>b$，$c>d\Rightarrow a-d>b-c$；② 除法法则：$a>b>0$，$d>c>0\Rightarrow \frac{a}{c}>\frac{b}{d}$；③ 取倒数法则：$a>b$，$ab>0\Rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$. 这些结果可以看作是不等式性质的直接推论，应用比较广泛. 应该注意的是除法法则，倒数法则的条件比较严格. 除法法则是对正数的反向不等式而言，所得不等式与被除式同向；取倒数法则是对含两相同符号数的不等式而言，所得不等式与原不等式反向.（一般地，对不等式$a<x<b$取倒数，可利用函数$y=\frac{1}{x}$的图象进行研究）

【例题解析】

【例1】 (1) 比较$\left(1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3$与$2-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3$的大小；

(2) 当$a>0$，$b>0$且$a\neq b$时，比较a^ab^b与a^bb^a的大小.

【解析】 比较两数大小的常用方法有：作差法和作商法. 根据问题的具体情形灵活选用，在本题中，(1) 适宜使用作差法，(2) 适宜使用作商法.

【答案】

因为$\left(1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3-\left[2-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3\right]=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3-2=\left[\left(1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)\right]\left[\left(1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^2-\left(1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^2\right]-2=2\left(1+\frac{6}{a^2}\right)-2=\frac{12}{a^2}>0$，

所以$\left(1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3>2-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3$.

【思维延伸】

一般来讲，作差后能进行因式分解、配方等情形可选用作差法. 涉及指数运算的可选用作商法，涉及分类讨论的情况时要做到不重不漏.

(2) 因为 $a>0$，$b>0$，故 $a^ab^b>0$，$a^bb^a>0$，又 $\frac{a^ab^b}{a^bb^a}=\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}$，所以

(i) 若 $a>b>0$，则 $\frac{a}{b}>1$，$a-b>0$，故 $\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>1$；

(ii) 若 $0<a<b$，则 $0<\frac{a}{b}<1$，$a-b<0$，故 $\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>1$.

由(i)，(ii)知 $\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>1$，所以　$a^ab^b>a^bb^a$.

【例 2】 若 $a>0$，$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}>1$，试比较 $\sqrt{1+a}$ 与 $\frac{1}{\sqrt{1-b}}$ 的大小.

【解析】 由于所比较的数均是正数，故可先比较 $1+a$ 与 $\frac{1}{1-b}$ 的大小，从而降低解题的难度.

【答案】 因为 $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}>1$，且 $a>0$，故 $\frac{1}{b}>1+\frac{1}{a}>1$，所以 $0<b<1$，且 $a-b>ab$. 于是有 $a-b-ab>0$，故 $1+a-b-ab>1$，即 $(1+a)(1-b)>1$.

又 $1-b>0$，故 $1+a>\frac{1}{1-b}$.

再由 $1+a>0$，$1-b>0$ 得

$$\sqrt{1+a}>\frac{1}{\sqrt{1-b}}.$$

【思维延伸】

对须比较的数或式，根据不等式的性质进行适当变形可使问题更容易求解.

【智能升级】

【例 3】 设 a_1 和 a_2 是满足 $a_1\geqslant 0$，$a_2\geqslant 0$，$a_1+a_2=1$ 的实数. 求证：可以找到两个数 b_1 和 b_2，使 $b_1\geqslant 0$，$b_2\geqslant 0$，$b_1+b_2=1$，且 $\left(\frac{5}{4}-a_1\right)b_1+3\left(\frac{5}{4}-a_2\right)b_2>1$.

【解析】 解答本题的思维步骤是：

① 由条件 $a_1+a_2=1$ 代入结论加以整理知，需找到 b_1，b_2 满足

←信息加工

通过分析结论，减少变量个数.

$$\frac{1}{4}b_1+\frac{15}{4}b_2+(b_1-3b_2)a_2>1.$$

② 再将所求之数 b_1 与 b_2 满足 $b_1+b_2=1$ 这一条件代入上式可得

$$\frac{1}{4}+\frac{7}{2}b_2+(1-4b_2)a_2>1.$$

③ 欲使上式成立,可以取

$1-4b_2\geqslant 0$ 且 $\frac{1}{4}+\frac{7}{2}b_2>1$.

即当 $\frac{3}{14}<b_2\leqslant\frac{1}{4}$, $b_1=1-b_2\in\left[\frac{3}{4},\frac{11}{14}\right)$ 时满足要求.

←信息运用

进一步使用条件使问题更加明确.

←收敛思维

明确 b_1, b_2 的取值,从而证明结论.

【答案】 因为 $a_1=1-a_2$,所以

$$\left(\frac{5}{4}-a_1\right)b_1+3\left(\frac{5}{4}-a_2\right)b_2$$
$$=\frac{1}{4}b_1+\frac{15}{4}b_2+(b_1-3b_2)a_2,$$

又 $b_1+b_2=1$,即 $b_1=1-b_2$,所以

$$\frac{1}{4}b_1+\frac{15}{4}b_2+(b_1-3b_2)a_2$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{7}{2}b_2+(1-4b_2)a_2,$$

要使上式大于1,可以取 $1-4b_2\geqslant 0$ 且 $\frac{1}{4}+\frac{7}{2}b_2>1$,

即取 $\frac{3}{14}<b_2\leqslant\frac{1}{4}$,此时 $b_1=1-b_2\in\left[\frac{3}{4},\frac{11}{14}\right)$.

故可以找到 b_1, b_2 满足条件.

三、课堂能力测试

(一) 选择题

【思维点拨】

1. 下列命题中正确的是(　　).

A. $a>b\Rightarrow ac^2>bc^2$

B. $a>b\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

C. $a>b$, $c>d\Rightarrow ac>bd$

D. $a+c>b+d,\ a<b\Rightarrow c>d$

2. 若 $a<b<0$，则下列关系中不能成立的是(　　).

A. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　B. $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$

C. $|a|>|b|$　　D. $a^2>b^2$

3. 已知实数 x 满足 $x^2+x<0$，则 x^2，x，$-x$ 的大小关系是(　　).

A. $-x<x<x^2$　　B. $x<x^2<-x$

C. $x^2<x<-x$　　D. $x<-x<x^2$

4. 设实数 a，b 满足 $0<a<b<1$，则下列不等式成立的是(　　).

A. $a^a<b^b$　　B. $a^a<b^a$

C. $b^a<b^b$　　D. $b^b<a^b$

4. 使用作商法或指数函数的单调性.

5. 已知：$\frac{1}{a}\log_d b>\frac{1}{a}\log_d c$，则 a，b，c，d 应满足(　　).

A. $a>0,\ b>c>0,\ 0<d<1$

B. $a>0,\ b>c>0,\ d>1$

C. $a<0,\ c>b>0,\ 0<d<1$

D. $a>0,\ c>b>0,\ d>1$

5. 应用对数函数的性质.

6. 设命题 p：m 和 n 满足 $\begin{cases}2<m+n<4,\\0<m\cdot n<3,\end{cases}$

命题 q：m 和 n 满足 $\begin{cases}0<m<1,\\2<n<3,\end{cases}$ 那么(　　).

A. p 是 q 的充分但不必要条件

B. p 是 q 的必要但不充分条件

C. p 是 q 的充要条件

D. p 既不是 q 的充分条件也不是 q 的必要条件

6. 与韦达定理的应用有关.

(二) 解答题

7. 若 $d>c$，$a+b=c+d$，$a+d<b+c$，试确定 a，b，c，d 的大小关系.

8. 已知：$-3<a<b<1$，$-2<c<-1$，求证：$-16<(a-b)c^2<0$.

9. 已知：x、$y \in \mathbf{R}^{+}$ 且 $x \neq y$，求证：$x^5 y^{-5} + x^{-5} y^5 > x^4 y^{-4} + x^{-4} y^4$.

四、创新思维火花

10. 设 $x \geqslant y \geqslant z \geqslant \frac{\pi}{12}$，且 $x + y + z = \frac{\pi}{2}$，求 $\cos x \sin y \cos z$ 的最大值和最小值.

10. 利用积化和差公式进行化简.

高考链接

本节内容，在高考中常以选择题或填空题形式出现，主要考查学生对基本概念的掌握，难度较低，但每年高考是必考内容，应给予足够的重视.

6.2　算术平均数与几何平均数

一、教学目标导向

【重点难点】

◆重点◆　平均值不等式的证明及应用.

◆难点◆　平均值不等式的应用.

【能力要求】

通过对平均值不等式的证明以及应用，使学生体会转化、化归的数学思想，培养学生的逻辑推理能力，计算能力.

二、课堂分层导学

【学法指导】

平均值不等式常用于比较两数大小、证明不等式及求变量的最值等问题，在学习中要着重弄清以下几个问题：

(1) 不等式 $\frac{a^2+b^2}{2} \geqslant ab$ 和不等式 $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ 成立的条件一样吗？其中等号成立的条件又是什么？

(2) 应用平均值不等式求最值的条件和方法.

(3) 了解平均值不等式推广到 n 个正数的情形. 如 $n=3$ 时有：$a, b, c\in\mathbf{R}^{+}$，则$\dfrac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$.

【精讲释疑】

(1) 平均值不等式的几何意义如图 6.2-1.

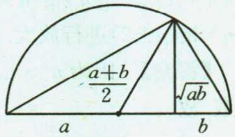


图 6.2-1

(2) 应熟记一些典型的结论如：① $x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$ $(x>0)$；② $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ $(a, b\in\mathbf{R}^{+})$；③ $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ac$.

(3) 求变量最值问题是平均值不等式应用中的重要组成部分，其形式是：$a, b\in\mathbf{R}^{+}$，$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$ 或 $ab\leqslant\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$，当且仅当 $a=b$ 时不等式中等号成立. 可用语言总结如下：① 两正数积一定，当且仅当两正数相等时，两数和取最小值，即2倍的两数积的二次算术根；② 两正数和一定，当且仅当两正数相等时，两数积取最大值，即两数和的一半的平方. 可简单地概括为三个字“正”，“定”，“等”.

【例题解析】

【例 1】 设 $a, b, c, d\in\mathbf{R}$，求证：

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqslant(ac+bd)^2.$$

【解析】 本例是著名的柯西不等式的特殊情况，可考虑使用 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 来证明，也可构造二次函数来证明.

【答案】

证法一：

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)(c^2+d^2)&=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2\\&\geqslant a^2c^2+2abcd+b^2d^2\\&=(ac+bd)^2.\end{aligned}$$

证法二：由于函数

$$\begin{aligned}f(x)&=(a^2+b^2)x^2+2(ac+bd)x+c^2+d^2\\&=(ax+c)^2+(bx+d)^2\geqslant 0,\end{aligned}$$

所以由二次函数的性质，有

【思维延伸】

证法二可证明柯西不等式的一般情形：$a_i, b_i\in\mathbf{R}$，$i=1, 2, \cdots, n$，则有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2.$$

$$\Delta = 4(ac+bd)^2 - 4(a^2+b^2)(c^2+d^2) \leqslant 0,$$

即 $(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geqslant (ac+bd)^2$.

【例 2】 设 $n \in \mathbf{N}$ 且 $n > 1$，求证：$\log_n(n+1) > \log_{(n+1)}(n+2)$.

【解析】 首先，使用换底公式，将上式转化为：$\lg^2(n+1) \geqslant \lg n \cdot \lg(n+2)$，再应用平均值不等式对 $\lg n \cdot \lg(n+2)$进行放大.

【答案】 因为 $n > 1$，故 $\lg n$, $\lg(n+1)$, $\lg(n+2)$ 均为正数. 故

$$\begin{aligned}\lg n \cdot \lg(n+2) &\leqslant \left(\frac{\lg n + \lg(n+2)}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\lg(n^2+2n)}{2}\right)^2 \\ &< \left(\frac{\lg(n^2+2n+1)}{2}\right)^2 \\ &= \lg^2(n+1),\end{aligned}$$

于是，$\dfrac{\lg(n+1)}{\lg n} > \dfrac{\lg(n+2)}{\lg(n+1)}$，从而

$$\log_n(n+1) > \log_{(n+1)}(n+2).$$

【思维延伸】

根据平均值不等式，可以将和、积形式通过缩放进行相互转化.

【例 3】 (1) 当 $a > 1$ 时，求 $a + \dfrac{1}{a-1}$ 的最小值.

(2) $x \in (0, 1)$，求 $x(1-x^2)$ 的最大值.

【解析】 可应用平均值不等式求最值，但应注意“正”，“定”，“等”. 灵活地“配，凑”是解题的技巧所在.

【答案】 (1) 由 $a > 1$，则 $a - 1 > 0$. 故

$$\begin{aligned}a + \frac{1}{a-1} &= a - 1 + \frac{1}{a-1} + 1 \\ &\geqslant 2\sqrt{(a-1) \cdot \frac{1}{a-1}} + 1 \\ &= 3,\end{aligned}$$

当且仅当 $a = 2$ 时等号成立，故当 $a = 2$ 时，$a + \dfrac{1}{a-1}$ 有最小值 3.

(2) 由 $x \in (0, 1)$ 知 $x > 0$，$1 - x^2 > 0$，故

【常见错误】

$$a + \frac{1}{a-1} \geqslant 2\sqrt{\frac{a}{a-1}} = 2\sqrt{1 + \frac{1}{a-1}} > 2,$$

故 $a + \dfrac{1}{a-1}$ 最小值为 2.

要避免这样的错误，关键是要认真考虑：“正”，“定”，“等”，尤其是“定”，“等”.

$$x(1-x^2)=\sqrt{x^2(1-x^2)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2x^2(1-x^2)(1-x^2)}$$
$$\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{2x^2+(1-x^2)+(1-x^2)}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$=\frac{2\sqrt{3}}{9},$$

当且仅当 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时等号成立，故当 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，$x(1-x^2)$ 有最大值 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

【智能升级】

【例 4】 设 $a=\lg z+\lg[x(yz)^{-1}+1]$，$b=\lg x^{-1}+\lg(xyz+1)$，$c=\lg y+\lg[(xyz)^{-1}+1]$. 记 a，b，c 中最大数为 M，求 M 的最小值.

【解析】 解答本题的思路和步骤是：

① 先整理 a、b、c，得：$a=\lg\left(\frac{x}{y}+z\right)$，$b=\lg\left(yz+\frac{1}{x}\right)$，$c=\lg\left(\frac{1}{xz}+y\right)$. ←信息加工（简化形式）

② 由 $y=\lg x$ 的单调性，可只考查三个真数：$\frac{x}{y}+z$，$yz+\frac{1}{x}$，$\frac{1}{xz}+y$ 中的最大数 u. ←换向突破（抓住重点）

③ 发现：$\frac{x}{y}+z\geqslant 2\sqrt{\frac{xz}{y}}$，$\frac{1}{xz}+y\geqslant 2\sqrt{\frac{y}{xz}}$，有 $\left(\frac{x}{y}+z\right)\left(\frac{1}{xz}+y\right)\geqslant 4$. ←提取有效信息

④ 得 $u^2\geqslant\left(\frac{x}{y}+z\right)\left(\frac{1}{xz}+y\right)\geqslant 4$，从而获解. ←收敛思维

【答 案】 由已知得：$a=\lg\left(\frac{x}{y}+z\right)$，$b=\lg\left(yz+\frac{1}{x}\right)$，$c=\lg\left(\frac{1}{xz}+y\right)$，设 $\frac{x}{y}+z$，$yz+\frac{1}{x}$，$\frac{1}{xz}+y$ 中最大的数为 u，由已知得，x，y，$z\in\mathbf{R}^+$，且 $M=\lg u$，故

$$u^2\geqslant\left(\frac{x}{y}+z\right)\left(\frac{1}{xz}+y\right)$$

$$= \left(\frac{1}{yz} + yz\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$\geqslant 2 + 2 = 4,$$

且当 $x = y = z = 1$ 时上式等号成立,故当 $x = y = z = 1$ 时,u 有最小值 2,从而 M 的最小值为 $\lg 2$.

三、课堂能力测试

(一) 选择题

1. 若 $a > b > 1$, $P = \sqrt{\lg a \lg b}$, $Q = \frac{1}{2}(\lg a + \lg b)$, $R = \lg\left(\frac{a+b}{2}\right)$, 则(　　).

A. $R < P < Q$　　B. $P < Q < R$

C. $Q < P < R$　　D. $P < R < Q$

2. 若 $a + b = 2$, 则 $3^a + 3^b$ 的最小值为(　　).

A. 18　　B. 6　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt[4]{3}$

(二) 填空题

3. 若正数 a, b 满足 $a + b + 3 = ab$, 则 ab 的取值范围是________.

4. 直角三角形的周长为定值 L,则斜边最小值是________,其面积的最大值是________.

(三) 解答题

5. 设 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, 求 $\sin\theta(1 + \cos 2\theta)$ 的最大值.

6. 已知 $a > 0$, $b > 0$, $a + b = 1$. 求证:

(1) $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geqslant \frac{25}{2}$;

(2) $\left(\frac{1}{a} + 1\right)\left(\frac{1}{b} + 1\right) \geqslant 9$.

7. a、b、$c \in \mathbf{R}^+$ 且 $a + b + c = 1$,求证:$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geqslant \frac{9}{2}$.

8. 设 a、b、c 是三角形三边长,求证:$(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b) \leqslant abc$.

【思维点拨】

1. $\lg\frac{a+b}{2} \geqslant \lg\sqrt{ab} = \frac{1}{2}(\lg a + \lg b) \geqslant \sqrt{\lg a \lg b}$.

2. 利用平均值不等式.

3. 利用 $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$ 得 $ab \geqslant 2\sqrt{ab} + 3$.

8. 可设 $a + b - c = x$, $b + c - a = y$, $a + c - b = z$, 化简要

9. 甲乙两地相距 S 千米，汽车从甲地匀速行驶到乙地，速度不超过 c 千米/小时，已知汽车每小时的运输成本(以元为单位)由可变部分和固定部分组成，可变部分与速度 v(千米/小时)的平方成正比，比例系数为 b，固定部分为 a 元.

(1) 把全程运输成本 y(元)表示为关于速度 v(千米/小时)的函数，并指出函数的定义域；

(2) 为了使全程运输成本最小，汽车应以多大速度行驶.

10. $\triangle ABC$ 中，求证：$\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{9}$.

证的不等式.

10. $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=1$.

四、创新思维火花

11. 用 20 cm×40 cm 的铁板做成深 5 cm 的长方体无盖容器，如何制作容积最大.

高考链接

本节内容是高考的热点之一，几乎每年都要涉及. 有时以选择题、填充题的形式出现，以考查基本概念，如测试题中第 1 题是 2000 年第 7 题，第 2 题是 2001 年北京春招第 10 题，第 3 题是 1999 年高考第 17 题. 在解答题中常注重考查平均值不等式的应用，主要用于求最值. 如测试题中第 9 题是 1997 年高考第 20 题.

6.3 不等式的证明

一、教学目标导向

【重点难点】

◆重点◆ 用分析法、综合法、比较法、放缩法等方法证明简单的不等式.