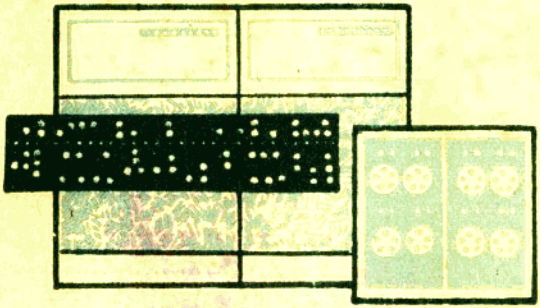
中学复习资料



数学

下册

安徽人民出版社

中学复习资料
数学
下册
安徽省教育局教育编审室编
*
安徽人民出版社出版
安徽省新华书店发行　六安地区印刷厂印刷
*
开本：787×1092　1/32　印张：6 5/8　字数：150,000
1979年1月第1版　1979年1月第1次印刷
统一书号：K7102·736
定　价：0.40元

目　　录

第四部分　三角

第五部分　解析几何

第四部分　三　角

第一章　锐角三角函数

复 习 要 点

一　锐角三角函数的定义

在直角三角形 ABC 中（图1—1），$\angle C=90°$，那么，

$$\sin A=\frac{BC}{AB},\qquad \cos A=\frac{AC}{AB},$$

$$\operatorname{tg} A=\frac{BC}{AC},\qquad \operatorname{ctg} A=\frac{AC}{BC},$$

$$\sec A=\frac{AB}{AC},\qquad \csc A=\frac{AB}{BC}。$$

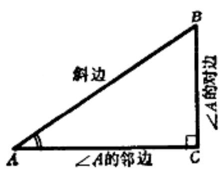


图 1—1

它们分别叫做锐角 A 的正弦、余弦、正切、余切、正割、余割，总称锐角三角函数。

二　锐角特殊角的三角函数值

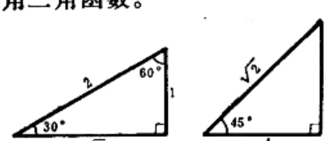


图 1—2

根据锐角三角函数的定义及特殊直角三角形的有关性质

(图1—2)，可得30°、45°、60°的三角函数值如下表。

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

三　直角三角形的解法及其应用

三角形的三条边和三个角叫做它的元素。根据已知元素，求未知元素，叫做解三角形。

直角三角形通常用C表示直角，用a、b、c分别表示三个角A、B、C的对边。(图1—3)

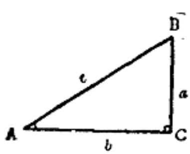


图 1—3

直角三角形ABC，除已知直角外，如果还知道两个元素(其中至少有一条边)，那么总可以求出其他元素。主要有以下四种类型：

1. 已知　A、c，

　那么　$B=90°-A$，　$a=c\sin A$，　$b=c\cos A$。

2. 已知　A、a，

　那么　$B=90°-A$，　$c=\dfrac{a}{\sin A}$，　$b=a\operatorname{ctg}A$。

3. 已知　c、a，

那么　$b=\sqrt{c^2-a^2}$，　$\sin A=\dfrac{a}{c}$，　$B=90°-A$。

4. 已知　a、b，

那么　$c=\sqrt{a^2+b^2}$，　$\operatorname{tg} A=\dfrac{a}{b}$，　$B=90°-A$。

例　题

例1　已知 α 是锐角，比较 $\sin\alpha$ 与 $\operatorname{tg}\alpha$ 的大小。

解　如图 1—4，

$\because$　$\sin\alpha=\dfrac{a}{c}$，　$\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{a}{b}$，

而　$c>b$，$\therefore\dfrac{a}{c}<\dfrac{a}{b}$，即 $\sin\alpha<\operatorname{tg}\alpha$。

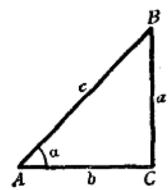


图1 —4

例2 为了测量山高 CD，先在地面 A 处用测倾器测得山顶的仰角是 $22°30'$，再将测倾器沿直线 AD 后退到 B 处，测得山顶的仰角是 $15°30'$，量得 AB 为 40 米，仪器高为 1.3 米(图 1—5)。求山高 CD。

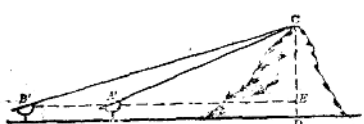


图 1—5

解　在直角三角形 $B'CE$ 中，$B'E=CE\cdot\operatorname{ctg}15°30'$。

在直角三角形 $A'CE$ 中

$$A'E = CE \cdot \mathrm{ctg}22°30'。$$

$\because \quad B'E - A'E = A'B' = AB = 40,$

$\therefore \quad CE \cdot \mathrm{ctg}15°30' - CE \cdot \mathrm{ctg}\,22°30' = 40,$

$$CE = \frac{40}{\mathrm{ctg}\,15°30' - \mathrm{ctg}\,22°30'}。$$

$\therefore \quad CD = \dfrac{40}{\mathrm{ctg}\,15°30' - \mathrm{ctg}\,22°30'} + 1.3 \approx 34.9$(米)。

答 山高约 34.9 米。

例3 要测纪念碑 AB 的高，在它的正南和正东的地面上的 C 点和 D 点，分别测得顶 A 的仰角是 α 和 β，又测得 $CD=a$（图1—6）。求证：纪念碑高 h 是 $\dfrac{a}{\sqrt{\mathrm{ctg}^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\beta}}$。

证 在直角三角形 ABC 中，

$$BC = h\,\mathrm{ctg}\,\alpha。$$

在直角三角形 ABD 中，

$$BD = h\,\mathrm{ctg}\,\beta。$$

$\because \quad CD^2 = BC^2 + BD^2,$

$\therefore \quad a^2 = h^2\mathrm{ctg}^2\alpha + h^2\mathrm{ctg}^2\beta,$

$\therefore \quad h = \dfrac{a}{\sqrt{\mathrm{ctg}^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\beta}}。$

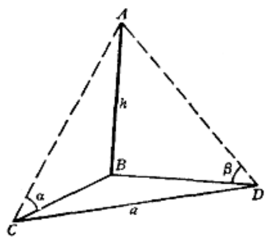


图 1—6

例4 求立方体的对角线与它的各个面的夹角。

解 如图1—7，

设立方体 $ABCD—A'B'C'D'$ 的棱长为 a。连结 AC'，AC。

设 $\angle C'AC = \alpha$，$\because \quad C'C \perp CA$，

$\therefore$ α 就是所求的角。

$\because \quad AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2$

$= 2a^2,$

$\therefore \quad AC = \sqrt{2}\,a。$

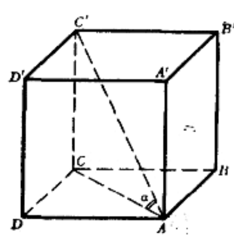


图 1—7

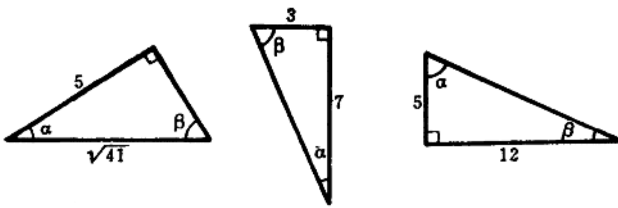
$$\therefore \quad \operatorname{tg} \alpha=\frac{CC'}{AC}=\frac{a}{\sqrt{2}\,a}=\frac{\sqrt{2}}{2}=0.7071。$$

$$\therefore \quad \alpha \doteq 35°16'。$$

答 立方体的对角线与它的各个面的夹角是 $35°16'$。

习　　题

1. 如图，写出各直角三角形中 α 角、β 角的正弦、余弦、正切、余切的值。



（第 1 题）

2. 在直角三角形 ABC 中，$\angle C=90°$：

(1) $a=5$，$c=13$，求 $\angle A$ 的正弦和余弦；

(2) $a=2\mathrm{cm}$，$b=4\mathrm{cm}$，求 $\angle B$ 的正切和余切。

3. 求下列各式的值：

(1) $2\cos 45°+3\sin 30°-\operatorname{ctg} 45°$；

(2) $\sin 60°\cos 30°-\cos 60°\sin 30°$；

(3) $3\operatorname{tg} 30°+\sin 45°-\operatorname{ctg} 30°-\frac{1}{2}\operatorname{tg} 45°$；

(4) $\cos 30°+\cos 60°-\frac{3}{4}\operatorname{ctg} 30°+\sin 45°$；

(5) $\dfrac{\operatorname{tg} 60°-\operatorname{ctg} 60°}{1+\operatorname{tg} 60°\operatorname{ctg} 60°}$。

4．在直角三角形 ABC 中，$\angle C=90°$。

（1）$c=3000$，$\angle A=36°$，求$\angle B$、a、b；

（2）$a=51$，$c=70$，求$\angle A$、$\angle B$、b。

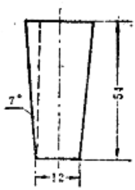
5．A 是直角三角形中的一个锐角，

求证：$\sin A+\cos A>1$。

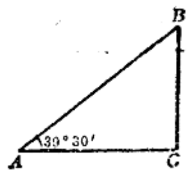
6．一个菱形的周长为 50 厘米，一个角是 30°，求它的两条对角线的长及面积。

7．某段铁路，每水平前进 1000 米，就升高 12.5 米，试求这段铁路的倾斜角。

8．要加工一个小端直径是 12 毫米，高是 54 毫米，斜角是 7° 的水管塞子（如图），需选用多大直径的圆钢？



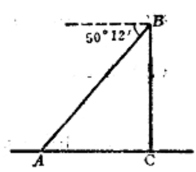
（第 8 题）



（第 9 题）

9．某气象站利用气球测风速，从 A 处放气球，一分钟后到达 B 处，这时在 A 处测得气球仰角是 39°30′。已知气球每分钟上升的高度为 200 米，求气球在一分钟内前进的水平距离。（精确到 1 米）

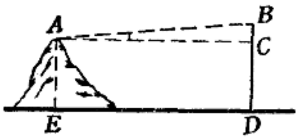
10．一架飞机在距地面 1900 米处，用瞄准器测得地面目标 A 的俯角是 50°12′。求这时飞机与地面目标的水平距离和射击距离。



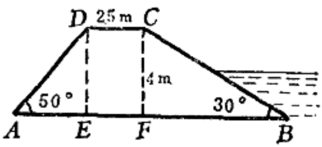
（第10题）

11．一次，敌人一架间谍飞机窜犯我领空，立即被我设防在海拔 842 米高山上的雷达战士发现，

测出敌机距我雷达站 23800 米，雷达到敌机的直线 AB 与水平线 AC 的夹角 α 为 $2°53'$（如图）我英雄空军一举歼灭入侵之敌，在实战中需要求出敌机距离海面的高度，问这个高度是多少(精确到米)。



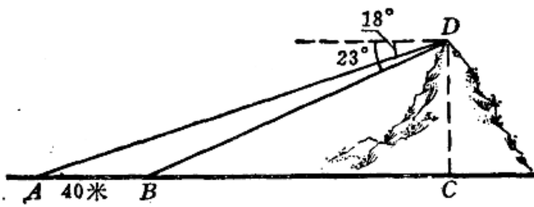
（第11题）



（第12题）

12．红升人民公社小型水库拦水坝的横断面为梯形，根据图示数据计算坝底 AB 和迎水坡 BC 的长。

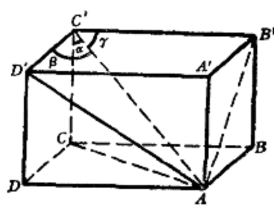
13．从山顶 D 测得地面上同一方向的两点 A 和 B 的俯角分别是 $18°$ 和 $23°$，已知 $AB=40$ 米，求山高 CD。



（第13题）

14．长方体 $ABCD—A'B'C'D'$ 的对角线 $C'A$ 与棱 $C'C$、$C'D'$、$C'B'$ 所夹的角分别是 α、β、γ。(如图)求证：

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1。$$



（第14题）

第二章　任意角的三角函数

复 习 要 点

一　角的概念的推广

所有与角 α 的始边和终边相同的角（包括 α），可以表示成

$$k\cdot 360^\circ+\alpha,\ （k\ 是整数，\alpha\ 以度为单位）$$

或者表示成

$$2k\pi+\alpha。（k\ 是整数，\alpha\ 以弧度为单位）$$

二　任意角的三角函数的定义

设 α 是任意一个角，以这个角的顶点为原点，角的始边为横坐标轴的正方向，建立平面直角坐标系，如图 2—1。在角 α 的终边上任取一点，设这点的坐标是 $P(x,y)$，原点到这点的距离是 r（$r=\sqrt{x^2+y^2}$）。

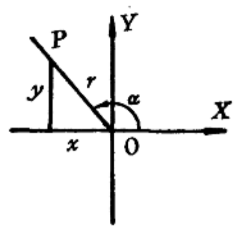


图 2—1

这样，x、y、r 组成了六个比，分别记作：

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}、\quad \cos\alpha=\frac{x}{r}、$$

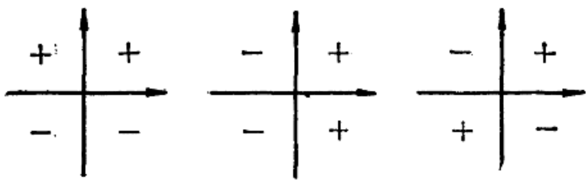
$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{y}{x}、\quad \mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{x}{y}、\quad \sec\alpha=\frac{r}{x}、\quad \csc\alpha=\frac{r}{y}。$$

它们分别叫做角 α 的正弦、余弦、正切、余切、正割、余割。

角 α 的正弦、余弦、正切、余切、正割和余割都是 α 的函数。这些函数叫做三角函数。

三　三角函数值的符号

根据各象限里点的坐标的符号和三角函数的定义，可知三角函数值的符号可以用图2—2来表示。



$\sin\alpha$ 和 $\csc\alpha$ 的符号　　$\cos\alpha$ 和 $\sec\alpha$ 的符号　　$\mathrm{tg}\,\alpha$ 和 $\mathrm{ctg}\,\alpha$ 的符号

图 2—2

四　终边在坐标轴上的特殊角的三角函数值

当点 P $(x,\ y)$ 在 x 轴上时，它的纵坐标 $y=0$，横坐标 $x=\pm r$；当点 P 在 y 轴上时，它的横坐标 $x=0$，纵坐标 $y=\pm r$。因此可得：

α	$0°(0)$	$90°(\frac{\pi}{2})$	$180°\ (\pi)$	$270°(\frac{3\pi}{2})$	$360°(2\pi)$
$\sin\alpha$	0	1	0	−1	0
$\cos\alpha$	1	0	−1	0	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	不存在	0	不存在	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	不存在	0	不存在	0	不存在

五 用单位圆中线段表示三角函数

以坐标原点为圆心，以单位长为半径的圆，叫做单位圆。三角函数的概念可以和单位圆联系起来考察。设单位圆和 x 轴正方向交于 A 点，和 y 轴正方向交于 B 点，和角 α 终边交于 P 点。从 P 点作 x 轴的垂线 MP，过 A 和 B 分别作单位圆的切线，延长 OP(或反向延长 OP)，使它和所作的两条切线分别交于 T 点和 S 点(图 2—3)。

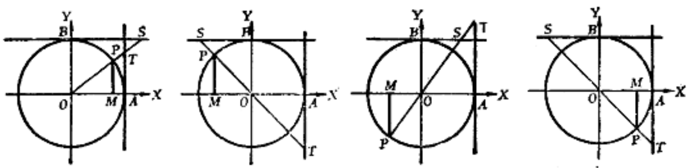


图 2—3

线段 MP、AT 规定向上为正，向下负为；线段 OM、BS 规定向右为正，向左为负。于是有：

$\sin\alpha = MP$，$\cos\alpha = OM$，$\operatorname{tg}\alpha = AT$，$\operatorname{ctg}\alpha = BS$。

我们把有向线段 MP、OM、AT、BS 分别叫做角 α 的正弦线、余弦线、正切线和余切线。

六 同角的三角函数间的系关

根据三角函数定义及几何图形的有关性质，可以证明任意一个角 α 的三角函数之间，都有如下的关系：

倒数关系：$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$，$\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$，$\csc\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$。

商的关系：$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，　$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$。

平方关系：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$tg^2\alpha+1=\sec^2\alpha$，

$ctg^2\alpha+1=\csc^2\alpha$。

七　余角的三角函数

如果 $A+B=90°$，那么 $B=90°-A$，根据锐角三角函数的定义，可以得到：

$$\sin A=\cos B=\cos(90°-A),$$

$$\cos A=\sin B=\sin(90°-A),$$

$$tg\,A=ctg\,B=ctg(90°-A),$$

$$ctg\,A=tg\,B=tg(90-A)。$$

八　负角三角函数与正角的三角函数间的关系

利用单位圆(图2—4)，容易得到：

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,$$

$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha,$$

$$tg(-\alpha)=-tg\,\alpha,$$

$$ctg(-\alpha)=-ctg\,\alpha。$$

注　要理解为什么四个等式中第二个右边是“+”号，而其他三个都是“-”号。能理解才容易记牢。

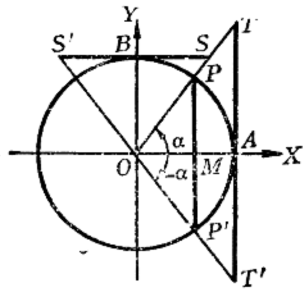


图 2—4

九　$180°\mp\alpha$、$360°-\alpha$ 与锐角 α 的三角函数间的关系

利用单位圆(图2—5)及同角三角函数间的关系，可以得到：

$\sin(180°\mp\alpha)=\pm\sin\alpha$，$\cos(180°\mp\alpha)=-\cos\alpha$，

$tg\,(180°\mp\alpha)=\mp tg\,\alpha$，　$ctg(180°\mp\alpha)=\mp ctg\,\alpha$，

$\sin(360°-\alpha)=-\sin\alpha$，$\cos\,(360°-\alpha)=\cos\alpha$，

$\mathrm{tg}\,(360°-\alpha)=-\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}(360°-\alpha)=-\mathrm{ctg}\,\alpha$。

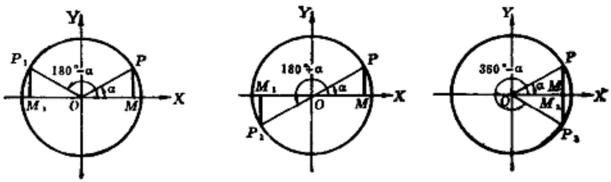


图 2—5

上面的一些公式，可概括成下面的一句话：

$180°\pm\alpha$、$360°-\alpha$ 的三角函数值，等于锐角 α 的同名函数的值放上原来的角所在象限内原来函数的符号。

十　终边相同的角的三角函数

根据任意角的三角函数定义可知：始边、终边完全相同的角的同名三角函数值相同。就是说，对于任意角 α 和任意整数 k，都有：

$\sin(k\cdot 360°+\alpha)=\sin\alpha$,　　$\cos(k\cdot 360°+\alpha)=\cos\alpha$,

$\mathrm{tg}(k\cdot 360°+\alpha)=\mathrm{tg}\,\alpha$,　　$\mathrm{ctg}(k\cdot 360°+\alpha)=\mathrm{ctg}\,\alpha$。

十一　化任意角三角函数为锐角三角函数

前面"七"、"八"、"九"、"十"各节中的公式，都叫做诱导公式。有了它们，可以化任意角三角函数为锐角三角函数，一般步骤是：

1.化负角的三角函数为正角的三角函数；

2.化大于 360° 的角的三角函数为 0° 到 360° 的角的三角函数；

3.化90°到360°的角的三角函数为锐角的三角函数。

注 当诱导公式中的α是任意角时，可以证明诱导公式仍能成立（证明从略）。为了便于记忆，可把α仍然看作锐角，从而确定化得的α的三角函数的值前面应是什么符号。

例 题

例1 已知角α终边上有一点$P(5,\ -12)$，角α是第几象限角？求这个角的三角函数值。

解 因为点P的横坐标为正、纵坐标为负，所以点P在第四象限，角α是第四象限角。

$$\because \quad x=5, \qquad y=-12,$$

$$\therefore \quad r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{5^2+(-12)^2}=13。$$

$$\therefore \quad \sin\alpha=-\frac{12}{13}, \qquad \cos\alpha=\frac{5}{13},$$

$$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{12}{5}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha=-\frac{5}{12},$$

$$\sec\alpha=\frac{13}{5}, \qquad \csc\alpha=-\frac{13}{12}。$$

例2 利用三角函数线来说明：

(1) 对于任意角α，$|\sin\alpha|\leqslant 1$；

(2) 在函数$\operatorname{tg}\alpha$中，$\alpha\neq k\cdot 180^\circ+90^\circ$（$k$是整数）。

解 (1) 在单位圆(图2—5)中，不论α为何值时，总有

$$|MP|\leqslant|OP|, \quad 即\ |\sin\alpha|\leqslant 1。$$

(2) 当角α的终边OP与y轴重合时，OP与从A点所引的单位圆的切线就没有交点，AT也就不存在。所以要使$\operatorname{tg}\alpha$存在，必须有$\alpha\neq k\cdot 180^\circ+90^\circ$（$k$是整数）。

例3 已知$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{4}$，求$\alpha$的正弦和余弦。

解 因为这里没有说明α在哪一象限，已知正切的值是负的，所以α可能在第二象限或第四象限。

当α在第二象限时，

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sec\alpha}=\frac{1}{-\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{1}{-\sqrt{1+\left(-\frac{3}{4}\right)^2}}$$

$$=-\frac{4}{5};$$

$$\sin\alpha=\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha=\left(-\frac{4}{5}\right)\times\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{5}。$$

当α在第四象限时，

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sec\alpha}=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{4}{5};$$

$$\sin\alpha=\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{5}\times\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{3}{5}。$$

例4 求证 $\dfrac{1-\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\cdot\dfrac{1+\csc\alpha}{1+\sec\alpha}=\operatorname{ctg}^2\alpha$。

分析 (1) 比较等号两边的式子，左边较繁，右边较简。一般证法是由繁到简。因此本题宜从左边证起。(2) 等式两边含有$\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$\operatorname{tg}\alpha$、$\operatorname{ctg}\alpha$、$\sec\alpha$、$\csc\alpha$等。一般证法是先保留$\sin\alpha$和$\cos\alpha$，将其他三角函数化为$\sin\alpha$和$\cos\alpha$，然后再化简，向求证的目标逐步前进。

证明 $$\frac{1-\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\cdot\frac{1+\csc\alpha}{1+\sec\alpha}=\frac{1-\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\cdot\frac{1+\frac{1}{\sin\alpha}}{1+\frac{1}{\cos\alpha}}$$

$$=\frac{1-\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\cdot\frac{(1+\sin\alpha)\cos\alpha}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha}=\frac{(1-\sin^2\alpha)\cos\alpha}{(1-\cos^2\alpha)\sin\alpha}$$

$$=\frac{\cos^3\alpha}{\sin^3\alpha}=\operatorname{ctg}^3\alpha。$$