

PING MIAN JI HE ZHENG

MING HANG FA QUAN SHU

沈文选 著

证明方法全书 平面几何



哈爾濱工業大學出版社

PING MIAN JI HE ZHENG MING FANG FA QUAN SHU

平面几何 证明方法全书

沈文选 著

哈爾濱工業大學出版社

内容简介

全书共分三篇。第一篇介绍了 21 种平面几何证明方法；第二篇介绍了 14 种常见问题的求解思路；第三篇介绍了几何图形的基本性质，如三角形中的巧合点问题、三角形中的数量及位置关系问题等。本书在归纳、总结平面几何的概念、定理、公式的基础上，更贴近数学竞赛的命题方向、命题内容。适合于优秀的初高中学生尤其是数学竞赛选手、初高中数学教师和中学数学奥林匹克教练员使用，也可作为高等师范院校、教育学院、教师进修学院数学专业开设的“竞赛数学”课程教材及国家级、省级骨干教师培训班参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

平面几何证明方法全书/沈文选著. —哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2005.8(2006.7 重印)

ISBN 7-5603-2215-8

I . 平... II . 沈... III . 平面几何课 - 中学 - 教学
参考资料 IV . G634.633

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 093618 号

策划编辑 刘培杰 责任编辑 李广鑫

封面设计 卞秉利

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传真 0451-86414749

网址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印刷 哈尔滨市工大节能印刷厂

开本 787mm×960mm 1/16 印张 29.5 字数 512 千字

版次 2005 年 9 月第 1 版 2006 年 7 月第 2 次印刷

印数 4 001~7 000 册

定价 35.00 元

(如因印装质量问题影响阅读, 我社负责调换)

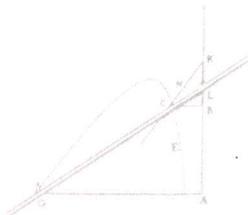


作者简介

沈文选，男，1948年生。湖南师范大学数学与计算机科学学院教授、硕士生导师，湖南师范大学数学奥林匹克研究所所长，中国数学奥林匹克高级教练，湖南数学奥林匹克培训的主要组织者与授课者（湖南中学生已获得IMO金牌10块，银牌2块）。已出版《竞赛数学教程》、《奥林匹克数学中的代数问题》、《奥林匹克数学中的几何问题》、《奥林匹克数学中的组合问题》等数学竞赛著作10余部，在《数学教育学报》等杂志上发表《奥林匹克数学研究与数学奥林匹克教育》、《奥林匹克中的几何问题研究与几何教学探讨》等数学竞赛论文40余篇。多年来为全国初、高中数学联赛，数学冬令营提供试题20余道，是1997年全国高中数学联赛、2002年全国初中数学联赛、2003年第18届数学冬令营等命题组成员。长期从事数学奥林匹克教育研究、中学数学教育研究、初等数学研究，并出版学术著作近20部，发表论文200余篇。任全国初等数学研究协调组成员、全国高师教育研究会常务理事、全国教育数学研究会常务理事、《数学教育学报》编委、湖南省高校数学教育研究会理事长、湖南省数学会中学数学专业委员会副主任、《现代中学数学》常务副主编等。

内容简介

全书共分三篇。第一篇介绍了 21 种平面几何证明方法；第二篇介绍了 14 种常见问题的求解思路；第三篇介绍了几何图形的基本性质，如三角形中的巧合点问题、三角形中的数量及位置关系问题等。本书在归纳、总结平面几何的概念、定理、公式的基础上，更贴近数学竞赛的命题方向、命题内容。适合于优秀初高中学生尤其是数学竞赛选手、初高中数学教师和中学数学奥林匹克教练员使用，也可作为高等师范院校、教育学院、教师进修学院数学专业开设的“竞赛数学”课程教材及国家级、省级骨干教师培训班参考用书。



Après cela prenant un point à discretion dans la courbe, comme C, sur lequel je suppose que l'instrument qui sert à la décrire est appliqué, je tire de ce point C la ligne CB parallèle à GA, & pour ce que CB & BA sont deux quantités indéterminées & inconnues, je les nomme l'une y & l'autre x, mais affin de trouver le rapport de l'une à l'autre, je considère aussi les quantités connues qui déterminent la description de cette ligne courbe, comme GA que je nomme a, KL que je nomme b, & NL parallèle à GA que je nomme c, puis je dis, comme NL est à LK, ou à b, ainsi CB, ou y, est à BK, qui est par conséquent $\frac{y}{x} \cdot b$, & BL est $\frac{y}{x} \cdot y - b$, & AL est $x + \frac{y}{x} \cdot y - b$, de plus comme CB est à LB, ou y $\frac{y}{x} \cdot y - b$, ainsi c, ou GA, est à LA, ou $x + \frac{y}{x} \cdot y - b$, de façon que multipliant

▲ 笛卡尔的哲学著作《方法论》之附录
《几何学》书影(1637年)

策划编辑 刘培杰
责任编辑 李广鑫
封面设计 卞秉利

前　言

谁看不起欧氏几何，谁就好比是从国外回来看不起自己的家乡。

——H. G. 费德

平面几何，在数学里占有举足轻重的地位。在历史上，《几何原本》的问世奠定了数学科学的基础，平面几何中提出的问题，诱发出了一个又一个重要的数学概念和有力的数学方法；在现代，计算机科学的迅猛发展，几何定理机器证明的突破性进展，以及现代脑心理学的重大研究成果——“人脑左右半球功能上的区别”获诺贝尔奖，使得几何学研究又趋于复兴活跃。几何学的方法和代数的、分析的、组合的方法相辅相成，扩展着人类对数与形的认识。

几何，不仅仅是对我们所生活的空间进行了解、描述或解释的一种工具，而且是我们为认识绝对真理而进行的直观可视性教育的合适学科，是训练思维、开发智力不可缺少的学习内容。青少年中的数学爱好者，大多数首先是平面几何爱好者。平面几何对他们来说，同时提供了生动直观的图像和严谨的逻辑结构，这有利于发掘青少年的大脑左右两个半球的潜力，促使学习效率增强，智力发展完善，为今后从事各类创造活动打下坚实的基础，其他学科内容是无法替代的。正因为如此，在数学智力竞赛中，在数学奥林匹克中，平面几何内容占据着十分显著的位置。平面几何试题以优美和精巧的构思吸引着广大数学爱好者，以丰富的知识、技巧、思想给我们的研究留下思考和开拓的广阔余地。

如果我们把数学比做巍峨的宫殿，那么平面几何恰似这宫殿门前的五彩缤纷的花坛，它吸引着人们更多地去了解数学科学，研究数学科学。

数学难学，平面几何难学，这也是很多人感受到了的问题，这里面有客观因素，也有主观因素，有认识问题，也有方法问题。学习不得法也许是其中的一个重要的根源。要学好平面几何，就要学会求解平面几何问题。如果把求解平面几何问题比做打仗，那么解题者的“兵力”就是平面几何基本图形的性质，解题者的“兵器”就是求解平面几何问题的基本方法，解题者的“兵法”就是求解各类典型问题的基本思路。如果说，装备精良“兵器”，懂得诸子“兵法”，部署优势“兵力”是夺取战斗胜利的根本保证，那么，掌握求解平面几何问题的基本方法，熟悉各类典型问题的基本思路，善用基本图形的性质，就是解决平面几何问题的基础。

基于上述考虑，我积多年的研究成果，并把我陆续发表在各级报刊杂志上的文章进行删增、整理、汇编，还参阅了近几年各类报刊杂志上关于平面几何解

题研究的文章，著成了这本《平面几何证明方法全书》。

全书每章各节开头都是低起点，以便让广大数学爱好者能轻松入门，能较快地进入角色。全书所安排的近 500 道例题都是比较典型的平面几何问题，不仅有多种解法，而且有多级梯度，覆盖面广，即使高等师范院校的数学教育专业的学生，甚至是参加全国数学冬令营的学生，阅读之后也会有较大收益的。在每章的后面安排了大量的习题，以提供实战的场地，并进行针对性练兵，其中一些也是有关章节内容的补充。

限于作者的水平，书中的疏漏之处在所难免，敬请读者批评指正。

沈文选

2005 年 7 月于长沙

目 录

第一篇 装备精良“兵器”——掌握基本方法	(1)
第一章 分析法 综合法	(2)
一、分析法	(2)
1.选择型分析法	(3)
2.可逆型分析法	(5)
3.构造型分析法	(6)
4.设想型分析法	(8)
二、综合法	(10)
1.分析型综合法	(13)
2.奠基型综合法	(14)
3.媒介型综合法	(14)
4.解析型综合法	(17)
练习题 1.1	(19)
第二章 反证法 同一法	(21)
一、反证法	(21)
1.什么是反证法	(21)
2.何时用反证法	(24)
3.怎样用好反证法	(27)
二、同一法	(29)
1.什么是同一法	(29)
2.怎样用好同一法	(31)
练习题 1.2	(34)
第三章 面积法	(36)
一、面积法解题的基本依据	(36)
1.几个面积公式	(36)
2.几个常用的等积变形定理	(37)
3.几个常用的面积比定理	(37)

4. 几个重要结论	(37)
二、面积法的解题方式	(41)
1. 解面积问题	(41)
2. 解非面积问题——证教材中定理	(42)
3. 解非面积问题——求解各类问题	(44)
练习题 1.3	(47)
第四章 割补法	(49)
一、挖掘题设内涵,进行图形割补拼凑重组	(49)
1. 既割又补,探其奥妙	(49)
2. 多次割补拼凑重组,大开眼界	(50)
3. 多种割补,解法多多	(51)
二、根据题设特征,巧补各类图形	(52)
1. 补出三角形	(52)
2. 补出直角三角形	(53)
3. 补出等腰三角形	(54)
4. 补出正三角形	(55)
5. 补出平行四边形或梯形	(55)
6. 补出矩形或正方形	(56)
7. 补出正多边形	(57)
8. 补出圆	(58)
9. 补对称图	(59)
三、分析题设结构,善用出入相补	(59)
练习题 1.4	(61)
第五章 代数法	(62)
一、适时使用计算手段	(62)
1. 直接计算	(62)
2. 进行代换后计算	(64)
3. 应用公式转化后计算	(65)
二、巧妙借助代数模型	(66)
1. 借助函数模型	(66)
2. 借助方程模型	(68)
3. 借助方程组模型	(70)
4. 借助不等式模型	(71)

5. 借助多项式模型	(73)
练习题 1.5	(74)
第六章 参量法 三角法	(76)
一、参量法	(76)
1. 引入线段参量	(76)
2. 引入线段比参量	(79)
3. 引入面积参量	(80)
4. 引入角参量	(83)
二、三角法	(84)
1. 显式问题	(84)
2. 隐式问题	(86)
练习题 1.6	(93)
第七章 几何变换法	(95)
一、合同变换法	(95)
1. 平移变换	(95)
2. 轴反射变换	(97)
3. 旋转变换	(99)
4. 中心对称变换	(101)
二、相似变换法	(102)
1. 图形的相似	(102)
2. 位似变换	(103)
3. 位似旋转变换	(105)
三、等积变换法	(106)
四、反演变换法	(107)
1. 求解直线与圆、圆与圆的相切问题	(109)
2. 证明点共圆、点共直线	(109)
3. 求解线段关系式	(111)
4. 证明角相等	(112)
5. 求解其他问题	(113)
练习题 1.7	(113)
第八章 坐标法	(116)
一、平面直角坐标	(116)
二、平面极坐标	(122)

三、平面斜(仿射)坐标	(126)
四、面积坐标(重心坐标)	(130)
练习题 1.8	(133)
第九章 向量法	(135)
一、向量的有关基础知识	(135)
二、向量法解平面几何问题的方式与技巧	(137)
1. 善于运用向量线性运算及性质	(137)
2. 善于运用向量的三角形不等式	(140)
3. 善于运用向量的数量积	(141)
4. 善于运用向量的矢量积	(144)
练习题 1.9	(146)
第十章 复数法	(148)
一、基本几何量的复数表示及基本结论	(148)
二、复数法运用的方式与技巧	(150)
1. 用向量法求解的问题也可用复数法求解	(150)
2. 运用复数知识可有多种解法	(151)
3. 灵活运用复数知识求解各类问题	(153)
练习题 1.10	(159)
第十一章 射影法	(161)
一、作出点的射影, 显现求解媒介量	(161)
二、运用射影定理, 转化求解关系式	(163)
三、善用平面射影变换, 巧解各类问题	(165)
1. 射影变换的基本知识	(165)
2. 射影变换解题举例	(169)
练习题 1.11	(173)
第十二章 消点法	(175)
练习题 1.12	(180)
第十三章 物理方法	(181)
一、运用力学原理	(181)
1. 重心原理	(181)
2. 力系平衡原理	(185)
二、运用光学原理	(186)
练习题 1.13	(187)

第十四章 完全归纳法 数学归纳法	(189)
一、完全归纳法	(189)
二、数学归纳法	(191)
练习题 1.14	(192)
第二篇 懂得诸子“兵法”——熟悉基本思路	(194)
第一章 线段相等问题的求解思路	(195)
一、注意到三角形中等角对等边	(195)
二、注意到特殊多边形的性质	(196)
三、注意到全等三角形的对应边相等	(197)
四、注意到圆中的等弧(圆周角)对等弦	(198)
五、注意到线段中垂线、垂径分弦等性质	(198)
六、注意到成比例线段间的数量关系	(199)
七、进行计算、代换等来转换求解	(200)
八、注意运用边比定理、张角定理等求解	(201)
九、运用结论“梯形两腰延长线的交点与对角线交点的连线平分上下底”证 线段相等	(202)
十、注意到面积方法的运用	(203)
十一、注意到其他方法的运用	(203)
练习题 2.1	(204)
第二章 角度相等问题的求解思路	(207)
一、注意到全等多边形的对应角相等	(207)
二、注意到相似多边形的对应角相等	(208)
三、注意到特殊多边形(如等腰三角形、等腰梯形、平行四边形等)的性质	(208)
四、注意到角的平分线定义与性质及多边形内心性质求解	(209)
五、注意到圆中的几类角间的关系	(210)
六、运用计算或转换求解	(211)
七、注意到三角形内角平分线性质定理的逆定理求解	(212)
八、运用三角函数关系式求解	(213)
九、运用几何变换(平移、对称、旋转、相似、位似)求解	(215)
十、运用其他方法求解	(215)
练习题 2.2	(216)

第三章 直线平行问题的求解思路	(218)
一、注意到内错角相等	(218)
二、注意到同位角相等	(219)
三、注意到两直线与第三条直线都垂直(或平行)	(220)
四、注意到两直线上的线段构成平行四边形的一组对边	(220)
五、注意到两直线上的线段是三角形(或梯形)的中位线与底边	(221)
六、注意到三角形一边的平行线的判定定理或平行线分线段成比例定理的逆定理	(222)
七、注意到同圆中夹等弧且无交点的两弦(或一弦与一切线)平行的事实	(223)
八、注意到过相交(或相切)两圆交点分别作割线交两圆于四点,同一圆上的两点的弦互相平行的事实	(224)
九、注意到同底等面积的两三角形的底边与同侧另两对应顶点所在直线平行的事实	(225)
练习题 2.3	(225)
第四章 直线垂直问题的求解思路	(227)
一、注意到相交成直角的两直线垂直	(227)
二、注意到相交得邻补角相等的两直线垂直	(228)
三、注意到直径所张圆周角两边垂直	(228)
四、注意到如果一条直线和两条平行线中的一条垂直,则也和另一条垂直	(229)
五、注意到分别与两互垂的直线平行的直线垂直	(230)
六、注意到等腰三角形的性质	(230)
七、注意到三角形的垂心性质	(231)
八、注意到菱形对角线互垂的性质	(231)
九、注意到同圆中夹弧和为半圆周的相交两弦垂直	(232)
十、注意到与直角三角形相似对应于直角的角的两边垂直	(232)
十一、注意到分别为两边对应垂直的两个相似三角形的第三边也互相垂直	(233)
十二、注意到证明两线段垂直的一种计算方法	(233)
十三、注意到勾股定理的逆定理	(234)
十四、注意到同一法(或反证法)等方法的运用	(234)
练习题 2.4	(235)

第五章 点共直线问题的求解思路	(237)
一、欲证 X, Y, Z 三点共线, 连结 XY 和 YZ , 证明 $\angle XYZ = 180^\circ$	(237)
二、欲证 X, Y, Z 三点共线, 适当地选一条过 Y 的直线 PQ , 证 $\angle XYQ = \angle PYZ$	(238)
三、欲证 X, Y, Z 三点共线, 适当地选一条过 X 的射线 XP , 证 $\angle PXY = \angle PXZ$	(239)
四、欲证 X, Y, Z 三点共线, 连接 XY, YZ (或 XZ), 证其都垂直(或平行)于某直线	(239)
五、欲证 X, Y, Z 三点共线, 证 $XY + YZ = XZ$	(240)
六、欲证三点共线, 证其中一点在连结另两点的直线上	(241)
七、欲证三点共线, 适当地选取位似中心, 或证它们的象共线, 或证它们以其中一点为位似中心, 另两点为一双对应点	(241)
八、运用面积方法证三点共线	(242)
九、运用张角公式证三点共线	(243)
十、运用梅涅劳斯定理之逆定理证三点共线	(243)
十一、运用有关结论证三点共线	(244)
练习题 2.5	(246)
第六章 直线共点问题的求解思路	(249)
一、先设其中的二直线交于某点, 再证这个交点在第三、第四……条直线上	(249)
二、欲证直线 l_1, l_2, \dots, l_k 共点, 先在 l_i 上取一特殊点, 再证其余直线都过此点	(250)
三、设法证两两相交直线的交点重合	(250)
四、运用三角形的巧合点(内心、外心、垂心、重心、旁心等)证直线共点	(252)
五、注意到特殊图形或多边形的中心的性质, 证直线共点于图形中的特殊点	(253)
六、运用旋转、轴反射等变换的保结合性证明直线共点	(253)
七、运用位似图形的对应顶点的连线必过位似中心证直线共点	(254)
八、运用塞瓦定理之逆定理证直线共点	(255)
九、运用斯坦纳定理之逆定理证直线共点	(256)
十、运用根心定理证直线共点	(256)
十一、运用解析法证直线共点	(257)

十二、运用反证法等其他方法证直线共点	(257)
练习题 2.6	(257)
第七章 点共圆问题的求解思路	(260)
一、注意到圆的定义:若 $n (n \geq 4)$ 个点与某定点的距离都相等,则这 n 个点共圆	(260)
二、注意到若线段 AC 与 BD 相交且 $\angle ACB = \angle ADB$, 则 A, B, C, D 共圆; 线段的同侧 张角相等时,其张角顶点与线段端点共圆	(260)
三、注意到若凸四边形中有一组对角互补,则它的四个顶点共圆	(261)
四、注意到若凸四边形的一个外角等于它的内对角,则四边形的四个顶点共圆	(262)
五、注意到相交弦定理、割线定理、切割线定理的逆定理的运用	(262)
六、注意到托勒密定理的逆定理的运用	(263)
七、注意到矩形、等腰梯形四顶点是共圆的	(263)
八、利用与有外接圆的多边形相似的多边形的顶点共圆	(264)
九、欲证多点(多于四点)共圆,先证四点(或四点以上)共圆,再证其余的点也在这个圆上	(265)
十、欲证多点共圆,先分别证几组点共圆,再证这几个圆重合(至少有三点共圆)	(265)
十一、运用同一法等其他方法证四点共圆	(266)
练习题 2.7	(266)
第八章 圆共点问题的求解思路	(269)
一、证诸圆均过图形中的某一个特殊点	(269)
二、证其中两圆的某一交点在其他各圆上	(269)
练习题 2.8	(271)
第九章 几何定值、定位问题的求解思路	(272)
一、定值问题	(272)
1. 取特殊位置探猜,在一般位置论证	(272)
2. 取极端位置探猜,在一般位置论证	(273)
3. 利用有关公式直接计算	(274)
4. 运用有关结论推导计算	(274)
5. 借助于其他方法(如割补法、复数法、坐标法等)和工具(如多项式等) 推导计算	(277)
二、定位问题	(278)

1. 特殊位置定位,一般位置论证.....	(278)
2. 变中寻定	(278)
3. 转化为求解定值问题,由定值定位置	(279)
4. 运用有关公式及结论推导论证	(279)
三、隐性定值、定位问题	(280)
练习题 2.9	(281)
第十章 几何极(最)值问题的求解思路	(284)
一、注意到图形中的特殊点	(284)
二、注意到图形中元素间相互特殊关系	(285)
三、引入变元,利用二次函数的极值性求解	(286)
四、构造二次方程,利用判别式来求解	(287)
五、引入三角函数,利用三角函数的极值性求解	(288)
六、引入参量,利用不等式来求解	(289)
七、灵活运用等周定理等有关结论	(290)
练习题 2.10	(291)
第十一章 几何不等式的求解思路	(293)
一、充分利用关于不等的熟知的几何结论	(293)
二、运用放缩,将不等式转化为等式求解	(295)
三、用三角函数表示有关几何量,借助三角函数的增减性、有界性求解	(296)
四、用参量表示有关几何量,借助于代数不等式求解	(297)
五、借助于著名的几何不等式求解	(298)
六、三角形不等式的几种特殊求解思路	(300)
1. 巧用统一代数替换	(300)
2. 巧用边的对称齐次多项式性质	(301)
3. 注意到三角形不等式的等价变形	(301)
4. 巧用三角函数形式的相关关系	(302)
5. 利用母不等式,巧取特值	(303)
6. 灵活运用变换原则	(304)
练习题 2.11	(304)
第十二章 点的轨迹、作图问题的求解思路	(306)
一、轨迹问题	(306)
1. 第Ⅰ型轨迹问题要从两方面证明	(307)

2. 第Ⅱ型轨迹问题既要探求,又要从两方面证明、讨论	(307)
3. 第Ⅲ型轨迹问题关键在于探求,探求时可从描述、条件代换、几何变换、几何动态、运用解析法等诸方面去考虑	(308)
二、作图问题	(309)
1. 代数法	(311)
2. 交轨法	(311)
3. 三角形奠基法	(311)
4. 变换法	(312)
练习题 2.12	(312)
第三篇 部署优势“兵力”——善用基本性质	(314)
第一章 三角形中的巧合点问题	(315)
一、三角形外心的基本性质及应用	(315)
二、三角形垂心的基本性质及应用	(316)
三、三角形重心的基本性质及应用	(318)
四、三角形内心的基本性质及应用	(320)
五、三角形旁心的基本性质及应用	(323)
六、三角形外、内、重、垂、旁心之间的关系及应用	(326)
1. 三角形“五心”的直角坐标	(326)
2. 三角形“五心”间的相互位置关系	(328)
3. 三角形“五心”间的距离公式	(329)
4. 三角形“五心”的有关线段关系式	(333)
七、三角形界心的基本性质及应用	(338)
八、三角形费马点的基本性质及应用	(342)
九、三角形勃罗卡点的基本性质及应用	(343)
练习题 3.1	(346)
第二章 几类三角形中的数量及位置关系问题	(351)
一、直角三角形中的一些数量、位置关系及应用	(351)
二、三角形三边所在直线上的定比分点三角形的一些面积关系式及应用	(359)
三、莫莱(Morley)三角形的一些数量、位置关系	(363)
练习题 3.2	(369)
第三章 四边形中的一些数量、位置关系	(372)