主编 乔荣凝

最新

高考复习应试指南

丛书

3+2

数学

北京师范大学出版社

最新

高考复习应试指南

丛书

3+2

数学

3＋2

最新高考复习应试指南丛书

数　学

主　编　乔荣凝

编　者　王建民　张鸿菊　张继林
董世奎　刘美仑　高培振
张　云　王礼进　蒋世信

北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

3+2最新高考复习应试指南丛书:数学/乔荣凝主编.
—北京:北京师范大学出版社,1995.10重印
ISBN 7-303-02430-1

Ⅰ.3… Ⅱ.乔… Ⅲ.①高等学校-考试-指南-丛书②数学课-高中-升学参考资料 Ⅳ.①G634-51②G634.6

中国版本图书馆CIP数据核字(95)第21747号

北京师范大学出版社出版发行
(100875 北京新街口外大街19号)
河北丰润印刷厂印刷 全国新华书店经销
开本:787×1092 1/16 印张:12.5 字数:278千
1995年10月北京第1版 1996年10月北京第2次印刷
定价:10.80元

前　言

为帮助应届毕业生进行高中总复习，我社特请全国著名的北京师大实验中学、北京师大附中、北京四中、北京八中、清华大学附中、北京大学附中等十余所重点中学的极富经验的特级、高级教师，于1993年10月编写了本套丛书。1995年10月按照国家教委对现行教学大纲的最新调整意见，以及会考后新高考“突出能力考查，增加试题选拔功能”的要求，丛书作者对本套丛书的内容和要求进行了精心修改，并重新编写了2套～3套高考模拟试题。

1996年全国高考试题，准确体现了各学科《考试说明》的精神，认真研究和分析这份试题，对1997年高考总复习具有重要指导意义。为此，我社又特请丛书作者增写1996年全国高考试题分析，深刻、详尽地剖析了高考试题的特点，对1997年的高中总复习方法提出了具体建议，使本套丛书更加完善。使用本套丛书进行高考总复习，必能收到事半功倍的效果。该书于1996年10月出版。

丛书主编　刘振贵

副 主 编　周济源　王礼进

各科主编

语文　陈天敏　北京师大实验中学语文教研组长　高级教师

英语　沈信予　北京师大实验中学　高级教师

数学　乔荣凝　北京师大附中数学教研组长　高级教师

物理　周济源　北京市特级教师

化学　刘振贵　北京市特级教师

历史　杨子坤　北京市特级教师

政治　赵如云　北京市特级教师

北京师范大学出版社

1996.10

目 录

1996年高考数学试卷分析

1996年全国高考数学试题，依据“数学学科考试说明”的要求，充分发挥了数学学科本身的特点，即注意保持并发扬了近几年来高考数学的命题方向，使数学试题具有相对的稳定性和连续性，同时又在原有的基础上进行了必要的调整和创新。文、理两份试题都几乎覆盖了高中数学教材中的所有章节。在考查数学的基础知识、基本技能、基本方法的同时，更加侧重考查了学生的运算能力、逻辑推理能力、空间想象能力以及综合运用数学知识分析问题、解决问题的能力.并注意了相关数学知识的巧妙重新组合，设计了背景新颖、设问角度灵活的题目，加强了对应用数学知识解决实际问题的能力的考查.整份试题达到了既为高等院校选拔具有学习潜能的新生，又对中学数学教学产生良好导向作用的目的.

一、试题的主要特点

1.选择题和填空题从易到难，考查内容紧紧围绕高中数学教材展开。着重考查了学生对“三基”的理解是否深刻准确，运用是否灵活。每个小题初看起来都比较简单，但每个小题不仅包含着丰富的数学概念，而且有一定的运算量，几乎每个小题都必须认真推理、计算一番，稍有疏漏，便会出错.对同学们的解题速度和解题的严谨性、准确性都提出了较高的要求。

如果考生对“三基”掌握得不够牢固，或推理、计算能力欠缺，选择题、填空题不仅会花去考生大部分时间，使考生无暇顾及后面的大题，而且答出的选择题、填空题的准确率也不高，显然会严重影响考生的成绩.相反，考生如果对“三基”掌握牢固，推理、计算能力都较强，那么做选择题、填空题一定会得心应手，十分顺利，不仅节约时间、准确率高，而且能为做后面的大题树立信心。

例如 选择题第(3)题：

若 $\sin^2x>\cos^2x$，则x的取值范围是

(A) $\{x \mid 2k\pi-\frac{3}{4}\pi<x<2k\pi+\frac{1}{4}\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$

(B) $\{x \mid 2k\pi+\frac{1}{4}\pi<x<2k\pi+\frac{5}{4}\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$

(C) $\{x \mid k\pi-\frac{1}{4}\pi<x<k\pi+\frac{1}{4}\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$

(D) $\{x \mid k\pi+\frac{1}{4}\pi<x<k\pi+\frac{3}{4}\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$

解：由 $\sin^2x>\cos^2x$，

即 $\sin^2x>1-\sin^2x$，

得　$2\sin^2x>1$，即　$\sin x>\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\sin x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 于是应该选 D.

而不少考生由 $\sin^2x>\cos^2x$，错误地得出：$\sin x>\cos x$，于是选 B. 显然在不等式概念中，由$a^2>b^2$不见得一定有$a>b$.

例2　文科第(14)题即理科第(13)题：

设双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(0<a<b)$的半焦距为$c$，直线$l$过$(a,0)$、$(0,b)$两点，已知原点到直线$l$的距离为$\frac{\sqrt{3}}{4}c$，则双曲线的离心率为

(A)2　　(B)$\sqrt{3}$　　(C)$\sqrt{2}$　　(D)$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

解：直线l的方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. 原点到直线$l$的距离为$\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$，由题意得

$$\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{3}}{4}c.$$

代入　$b^2=c^2-a^2$，可得

$$\frac{ab}{c}=\frac{\sqrt{3}}{4}c,$$

即　$$\frac{a^2b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}c^2$$

$$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{4}e^2;$$

又由　$$e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2}=1+\frac{b^2}{a^2},$$

即　$$\frac{b}{a}=\sqrt{e^2-1}.$$

于是得到关于离心率e的方程：

$$\sqrt{e^2-1}=\frac{\sqrt{3}}{4}e^2.$$

即　$3e^4-16e^2+16=0$,

得　$e^2=4$　或　$e^2=\frac{4}{3}$.

由　$b>a>0$，有$e^2=1+\frac{b^2}{a^2}>2$,

得　$e^2=4$，即$e=2$，应选 A.

考生此题得分率很低，原因在于：

① 得到关系式$\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{3}}{4}c$时，不知如何通过等价变换来得到关于离心率$e$的方程.

② 过早变形为$\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{3}}{4}e$，以至找不到如何用$e$来代掉$\frac{b}{c}$.

③　在得到关于e的方程$\sqrt{e^2-1}=\frac{\sqrt{3}}{4}e^2$之后，或者由于运算出错，或者忽略了已知条件$b>a>0$，得不出$e^2=4$.

由此可以看出，选择题对考生的推理和运算能力，都提出了较高的要求.

例3　填空第(17)题：

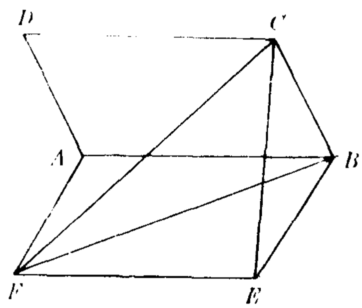
正六边形的顶点和中心共7个点，以其中3个点为顶点的三角形共有__________个.

解：由于正六边形中有3条对角线，即7个点中3个点共线的情况有3种可能，因此应该是：$C_7^3-3=32$ 或 $C_6^3+C_6^2-3=32$.

此题虽然非常简单，但有许多考生对正六边形六个顶点和中心共7个点当中，三个点共线的情况分析不清，或者忘了三点共线的情况应该减去，或者误认为有六种三点共线的情况，反映了这些考生思维不够严谨.

例4　填空第(19)题：

如图，正方形$ABCD$所在平面与正方形$ABEF$所在平面成60°的二面角，则异面直线AD与BF的夹角的余弦值是__________.



解：由$ABCD$、$ABEF$均为正方形，则有

$CB\perp AB$，$EB\perp AB$，由二面角平面角定义：

即　$\angle CBE=60°$.

令　$AB=1$，即$CB=BE=1$，又由$\angle CBE=60°$，

∴　$\triangle CBE$为正三角形，得$CE=1$.

由　$AB\perp$平面CBE，而$AB /\!/ EF$，

有　$EF\perp$平面CEB，

即　$\angle CEF=90°$.

在　$\mathrm{Rt}\triangle CEF$中，$CE=EF=1$，得$FC=\sqrt{2}$.

由　$AD /\!/ BC$，

知　$\angle CBF$为异面直线AD与BF的夹角.

在$\triangle CBF$中，$CB=1$，$BF=\sqrt{2}$，$CF=\sqrt{2}$.

由余弦定理：

$$\cos\angle CBF=\frac{2+1-2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

即异面直线AD与BF的夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{2}}{4}$.

考生做此题主要错误是：

①　找不到二面角的平面角即$\angle CBE=60°$.

②　看不出$\angle CEF=90°$，因而求不出$CF=\sqrt{2}$.

③　当找到异面直线夹角为$\angle CBF$后，不知如何求出它的余弦值.

④　在运算中出错，导致得不到正确结果.

例5　理科选择题第(8)题

若 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，则 $\arcsin[\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)]+\arccos[\sin(\pi+\alpha)]$

(A) $\frac{\pi}{2}$　　(B) $-\frac{\pi}{2}$　　(C) $\frac{\pi}{2}-2\alpha$　　(D) $-\frac{\pi}{2}-2\alpha$

解 $\arcsin[\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)]+\arccos[\sin(\pi+\alpha)]$

$=\arcsin(-\sin\alpha)+\arccos[\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\alpha)]$

$=\arcsin(-\sin\alpha)+\arccos[\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)]$

$=-\arcsin(\sin\alpha)+\arccos[\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)]$.

由 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$， 有 $\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}+\alpha<\pi$，

可得 $-\arcsin(\sin\alpha)+\arccos[\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)]$，

$=-\alpha+\frac{\pi}{2}+\alpha=\frac{\pi}{2}$.

即应选 A.

许多考生在做此题时忽略了“反三角函数”部分的基础内容之一：

$\arcsin(\sin\alpha)=\alpha \quad (-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2})$，

$\arccos(\cos\alpha)=\alpha \quad (0\leqslant\alpha\leqslant\pi)$

在本题中的灵活应用，而是对原式取正弦（或余弦）进行运算，人为加大了本题难度，导致答题出错，当然也有一些考生对“反三角函数”中的相关公式成立的条件记忆不牢，导致运算出错.最后选项错误.

例6 理科选择题第(10)题：

等比数列$\{a_n\}$的首项为$a_1=-1$，前n项和S_n，若$\frac{S_{10}}{S_5}=\frac{31}{32}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$等于

(A) $\frac{2}{3}$　　(B) $-\frac{2}{3}$　　(C) 2　　(D) -2

解 由 $\frac{S_{10}}{S_5}=\frac{31}{32}$，

即 $\frac{1-q^{10}}{1-q^5}=\frac{31}{32}$，

得 $1+q^5=\frac{31}{32}$，

$q^5=-\frac{1}{32}$，即$q=-\frac{1}{2}$.

∴ $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{a_1}{1-q}=\frac{-1}{1+\frac{1}{2}}=-\frac{2}{3}$.

应选 B.

部分考生由$S_1=a_1=-1$，$\frac{S_{10}}{S_5}=\frac{31}{32}$，试图找出$S_n$的解析式，然后再求其极限，这显然是忽略了无穷等比数列基本知识，误入歧途. 而另一部分考生在得到$q=-\frac{1}{2}$后，代入$\frac{a_1}{1-q}$时，忽略了符号，导致错选 C 或 D.

从以上分析不难看出：选择题、填空题具有知识容量大、考查面广等特点，它非常适合用来考查考生对数学基础知识、基本技能的掌握程度。因此，正确、全面、牢固地掌握各个基本概念，并有较强的运算能力，是答好选择题的先决条件。当然，还要注意解题过程的简洁、合理、灵活，以便加快解题速度，提高解题的正确率。

2. 在应用题的考查中，着重考查运用数学知识和方法解决实际问题的能力. 解题过程中考查了函数、不等式、二项式定理、近似计算等基础知识和方法，同时考查了学生的读书理解能力、数学素质和学习的潜能. 而且由于本题紧密联系当前实际问题，富有时代感，对培养学生的参与意识和解决实际问题的自主性，极有益处. 可惜此题得分率不高，主要原因有：

① 部分考生根本看不懂题意，无法把这个实际应用问题用数学方式表达出来.

② 在得到基本不等式：

$$\frac{(1+22\%)(10^4-10x)}{(1+1\%)^{10}}\geqslant(1+10\%)\times10^4$$

之后，由于运算能力不强，不能正确化简.

③ 当化简到

$$x\leqslant[1-\frac{1.1\times(1+0.01)^{10}}{1.22}]\times10^3$$

之后，由于对二项式定理的应用不熟悉，以致无法再解下去.

④ 在运用二项式定理进行近似计算时，或多一项，或少一项，以致最后答案不符合题目要求.

显然，加强对“数学应用问题”的“教”与“学”，仍然是十分重要的问题.

3. 解答题检查了中学数学中的许多重点内容：方程的观点、函数的知识、不等式的解法、三角恒等变换、空间线面关系、解析几何的基本思想等。注意了数学知识的重新组合，设计了背景新颖、设问角度灵活的题目，考查了重要的数学思想；如等价变换、分类讨论、数形结合等. 从而着重考查了运算能力、逻辑推理能力、空间想象能力以及综合运用数学知识分析问题和解决问题的能力.

在理科第 21 题（即文科第 22 题）中，巧妙地把三角恒等变换与一元二次方程联系在一起. 在考查考生掌握三角变换的同时，也考查了同学根据题目要求，构造方程、统一变量、解方程等数学知识. 一些考生在获得关系式

$$\cos A+\cos C=-2\sqrt{2}\cos A\cdot\cos C$$

之后，不能构造出关于$\cos\frac{A-C}{2}$的方程，导致解题失败.

理科第 22 题（文科第 23 题），对立体几何的试题进行了创新，在证明空间线、面关系时，要求直接填写出主要理由，这对于那些不重视数学基础理论，对立体几何中重要的线面关系的定

理模糊不清的考生，显然是一个打击．这肯定会大大促进当前的高中学生去认真学习数学知识中的基础理论，而不只是闷头做习题．

理科第 24 题，主要考查了直线与双曲线的性质，解析几何的基本思想，以及综合运用数学知识的能力．解析几何的综合题，除了涉及解析几何本身的知识，常常还与代数、三角、平面几何等多方面知识有关，通常还有较繁杂的运算．在本题中，几何条件通过坐标系，可以得到两个代数方程：

$$(k_1^2-1)x^2+2\sqrt{2}k_1^2x+2k_1^2-1=0$$

$$(k_2^2-1)x^2+2\sqrt{2}k_2^2x+2k_2^2-1=0$$

其中k_1、k_2分别表示两条直线的斜率．于是问题便成了这两个代数方程均要有两个不同的解．而此时许多考生忽略了对方程的二次项系数：k_1^2-1（或k_2^2-1）是否为零进行讨论．显然，当$k_1^2-1=0$（或$k_2^2-1=0$），相应的方程便不是一元二次方程，因此便不能用关于判别式的理论．而且当$k_1^2-1=0$（或$k_2^2-1=0$）也均不符合题意．这里，试题考查了有关一元二次方程的理论以及如何使代数的结论符合原题的几何含义．在把原题的几何含义：直线l_1、l_2与双曲线各有两个不同的交点等价于代数不等式组：

$$\begin{cases} 3k_1^2>1>0, \\ 3k_2^2-1>0, \\ k_1\cdot k_2=-1, \\ |k_1|\neq 1 \end{cases}$$

之后，便是如何通过运算，从中解出k_1的取值范围．解这个不等式组，首先应该通过消元，得到关于k_1的不等式组：

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{3}<|k_1|<\sqrt{3}, \\ |k_1|\neq 1. \end{cases}$$

于是可以得到：

$$-\sqrt{3}<k_1<-1 \text{ 或 } -1<k_1<-\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 或 } \frac{\sqrt{3}}{3}<k_1<1, \text{或 } 1<k_1<\sqrt{3}.$$

在解这个不等式组的过程中，许多同学运算能力不高，得不到正确的结论．在本题的第二问中，关键问题是：如何把题设给出的关系式：

$$|A_1B_1|=\sqrt{5}|A_2B_2|$$

转化为只含有k_1(或k_2)的方程，然后求出．在这个转化过程中，要用到解析几何的两点间距离公式，即在此题中的弦长公式

$$\begin{aligned}|A_1B_1|^2&=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\\&=(1+k_1^2)(x_1-x_2)^2.\end{aligned}$$

许多考生对公式：$|A_1B_1|^2=(1+k_1^2)(x_1-x_2)^2$记不住，考试时现推，人为加大了运算量．在获得了关于k_1的方程

$$\frac{4(1+k_1^2)(3k_1^2-1)}{(k_1^2-1)^2}=5\times\frac{4(1+k_1^2)(3-k_1^2)}{(1-k_1^2)^2}$$

之后，同样，由于考生计算能力低，无法从这个方程中得出正确结论．事实上，由于$k_1^2-1\neq 0$，$1+k_1^2\neq 0$，这个方程等价于

$$3k_1^2-1=5(3-k_1^2)$$

即 $k_1^2=2$，$k_1=\pm\sqrt{2}$.

本题把解析几何的思想与方程、不等式联系在一起，较好地检查了考生综合运用数学知识解决实际问题的能力．

理科第25题，构思巧妙，考查了考生对一次函数、二次函数以及解绝对值不等式等知识的掌握程度．第一问，由$f(x)=ax^2+bx+c$，显然有$f(0)=c$，即c为函数$f(x)$在y轴上的截距．于是证明$|c|\leqslant 1$，只要证明$|f(0)|\leqslant 1$．而由已知立刻就可以得到这个结论．第二问，首先要看出来当$a\neq 0$时，函数$g(x)$是一次函数，且$a>0$时，$g(x)$是增函数；$a<0$时，$g(x)$是减函数．而当$a=0$时，$g(x)=b$为常数函数，因此应该分情况讨论．在分情况讨论时，关键是如何把$g(x)$与$f(x)$联系起来．由于单调函数在闭区间的最值在端点处取得，于是只须研究$g(1)$和$g(-1)$．而$g(1)=a+b$，这样便可以看出来：$g(1)=a+b$与$f(1)=a+b+c$的关系：$g(1)=a+b=f(1)-c$，同样，$g(-1)=-f(-1)+c$. 这样第二问便可以得到证明。第三问，由于$a>0$，$g(x)$在$[-1,1]$上是增函数，于是$g(x)$在$[-1,1]$上的最大值为$g(1)$．即$g(1)=2$．同样，只要找到函数$g(x)$与$f(x)$的关系．即

$$g(1)=a+b=f(1)-c=f(1)-f(0)=2$$

$\therefore$ $f(0)=f(1)-2$.

而由已知，可得出

$$-1\leqslant f(0)=f(1)-2\leqslant 1-2=-1,$$

即 $f(0)=c=-1$.

由已知当$|x|\leqslant 1$，有$|f(x)|\leqslant 1$，

得到$f(x)\geqslant -1=c=f(0)$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$

根据一元二次函数的图象及性质可知，其图象抛物线的顶点坐标为$(0,-1)$.

即 $-\dfrac{b}{2a}=0$，得$b=0$

相应由$a+b=2$，得$a=2$

$\therefore$ $f(x)=2x^2-1$.

本题构思巧妙，解法精练，考查了综合运用数学知识的能力．然而不少考生由于缺乏数学知识间相互联系的能力，不能沟通函数$f(x)$与$g(x)$之间的关系，因此在解本题时困难较大．

二、1996年高考试题对今后数学学习与复习的启示

1．加强基础知识、基本技能的教学和训练，是提高解题效率、防止解题出错的根本措施．在教学和复习中，应该以考试大纲(高中数学教材)为一条主线，把精力放在数学的基本概念的准

确记忆和深刻理解以及灵活运用上.记忆和理解概念的第一步,应该是在每一个单元学习之后,把所学数学知识要系统化,把主要内容归纳成一个“纲”.对概念的进一步理解,还需要从正面辨析和反面比较中作进一步理解.对这些概念的理解,当然还需要能准确地用自己的语言加以表述.在这次高考中,许多考生在填写立体几何主要定理时,发生偏差,充分反映了这些考生对基础理论的忽视.

2.加强运算能力的培养.显然,运算能力低是考试失败的主要原因之一.有些运算失误是由概念不清引起的,例如关于算术根、绝对值的运算,各种类型的不等式的运算、求函数的定义域和值域,三角函数与反三角函数的求值、空间线面夹角、几何体的侧面积和体积等等,再加上运算技能较差,以致本来可以做对的数学题往往由于一两步的计算错误而导致前功尽弃.当然运算应在合理化简的基础上进行,要力求简捷.提高运算能力不是一朝一夕的事,它是平时严格训练的结晶,每个同学在解每一道习题时, 都应该做到一丝不苟,力争养成只要会算就要算对的好习惯.

3.逻辑推理能力在中学数学教学中举足轻重,无处不见。应该在课堂教学和平时做题训练中充分把握数学科学的特点,挖掘教材和习题中逻辑推理的训练内容,时刻留意展现逻辑推理的严密性,养成科学思维的好习惯.当然还应当培养能把严格的逻辑推理准确而精练地用书面语言加以表达的能力.

4.加强注意严格审题、注意题目中隐含条件的能力,尤其要培养学生阅读数学书籍的能力,能读懂题目,是能正确解题的前提,尤其是数学应用问题,连题目都读不懂,根本就谈不上解题.

5.要加强综合运用数学知识分析问题和解决问题的能力,不但对于较大、较难的数学题要注意数学知识之间的联想、相互启示和彼此之间的桥梁作用,就是一般中等的题目,甚至一些小题,也都要养成认真审题、认真分析题目条件和结论的好习惯,从而有效的找到如何利用题目条件解决问题的解题思路和策略.

6.高考成绩的好坏,首先取决于考生真实的水平,即对数学“双基”的掌握程度和应用“双基”解决实际问题的能力.但是考生的临场发挥,也就是考试时的心理因素,也是十分重要的.解数学题一般需要经历审题、分析、求解、答案这样几个环节.审题首先要搞清已知条件是什么,要解决什么问题.在解题过程中当遇到什么疑问时,仍需反复审题,在解到某个结论时,一定要考察是否真正符合题意.在分析求解时,对数学推理和相应的运算系统所进行的简缩,一定要合情合理,必须既适当又不影响整体,提高心理过程的概括性、清晰性、灵活性与可逆性,是克服各种心理性失误的根本途径,考试时的心理状态与平时心理素质的训练水平息息相关.平时解题的心理素质提高了,心理准备充分了,考试时发挥良好的竞技状态也就有了坚实的基础.

历届高考情况表明,数学高考对数学学习提出的要求是高的,但也是考虑学生实际的.只要学生们在学习时能够在扎实、全面、灵活和熟练方面狠下功夫,注意提高自己的三大数学能力和综合运用数学知识分析问题、解决问题的能力,那么取得优异的高考成绩是很有希望的.

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

一、考点详析

1. 理解关于集合的基本概念，能正确使用集合的术语与符号，了解关于映射的概念，并能在映射的基础上理解有关函数的概念。

2. 理解函数的奇偶性、单调性的概念。能准确判断简单函数的奇偶性和单调性，能利用函数的这两个重要性质并结合函数的图象，解决函数的基本问题。理解并掌握有关反函数的概念、性质及其图象。

3. 掌握一元二次函数、幂函数、指数函数、对数函数的概念、图象、性质和应用。并会解简单的指数方程和对数方程。

二、方法点拨

学习函数，首先要从函数的对应法则，定义域、值域以及图象入手．函数由其对应法则确定了定义域，又由对应法则和定义域共同确定了函数的值域，函数的奇偶性和单调性则反映了在对应法则的作用下，函数值随自变量的变化而变化的规律，而函数的图象则把函数的对应法则、定义域、值域以及两个重要性要有机地统一为一个整体。因此，随时注意“数形结合”是学好函数的重要手段。

要明确什么样的函数才会有反函数，并能准确求出反函数，掌握原函数与其反函数之间又相互依存又相互制约的关系。

解决有关函数方面的数学问题的主要思路是：根据已知条件，构造出一个辅助函数，把给定的数学问题转化为研究辅助函数的有关概念、性质等问题，然后推导出正确的结论，在解决问题过程中，要充分发挥函数图象在解题中的直观作用，也就是要重视“数形结合”的数学方法，在具体解题时，要分清自变量、函数和常数，以及在不同函数中，常数的不同的取值对函数的定义域、值域、性质以及图象产生的作用和影响。

三、曲型例题

【例 1】　设集合 $M=\{x|x=12m+8n+4l$，其中 $m、n、l\in Z\}$，$N=\{y|y=20p+16q+12r$，其中 $p、q、r\in Z\}$.

求证　$M=N$.

【思路分析】　欲证两集合相等，立即想到证明　$M\subseteq N$ 与 $M\supseteq N$. 集合的包含关系转化为元素与集合的关系. 关键步骤是两集合中的元素：$x=12m+8n+4l$ 与 $y=20p+16q+12r$ 的互相转化、作好恒等变形，问题便可解决.

证明　任取 $x\in M$，则存在 $m、n、l\in Z$ 使 $x=12m+8n+4l=20n+16l+12(m-n-l)$.

$\because$　$m-n-l\in Z$，　$\therefore$　$x\in N$. 故 $M\subseteq N$.

任取 $y\in N$，则存在 $p、q、r\in Z$，使 $y=20p+16q+12r=12r+8(2q)+4(5p)$.

$\because \quad 2q\in Z, 5p\in Z, \quad \therefore \quad y\in M$，故 $N\subseteq M$.

$\therefore \quad M=N.$

【启示与小结】 两集合相等，子集的定义是解决本题的概念基础. 但根据目标不善于作恒等变形也是不可能圆满证出结论. 因此要结合具体情况善于观察试验，从而找到所需形式.

【例 2】 已知函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，求函数 $\varphi(x)=f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域.

【思路分析】 令 $g_1(x)=x+a$，$g_2(x)=x-a$，则 $\varphi(x)$ 可以看作是两个复合函数的代数和. 因 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，所以 $f(g_1(x))$ 的定义域应是 $\begin{cases}0\leqslant g_1(x)\leqslant 1\\ g_1(x)\text{的定义域}\end{cases}$ 的解集；同理 $f(g_2(x))$ 的定义域应是 $\begin{cases}0\leqslant g_2(x)\leqslant 1\\ g_2(x)\text{的定义域}\end{cases}$ 的解集. 很容易求得 $f(g_1(x))$ 与 $f(g_2(x))$ 的定义域分别为 $[-a,1-a]$ 与 $[a,1+a]$. 则 $\varphi(x)$ 的定义域为 $[-a,1-a]$ 与 $[a,1+a]$ 的交集. 通过比较两个区间左、右端点即可求得 $\varphi(x)$ 的定义域.

解 因 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，故 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域为下列不等式组的解集.

$$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1\\ 0\leqslant x-a\leqslant 1\\ x+a,x-a\text{ 的定义域}\\ \text{均为 }R.\end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a\\ a\leqslant x\leqslant 1+a\end{cases}.$$

即两个区间 $[-a,1-a]$ 与 $[a,1+a]$ 的交集. 比较两区间左、右端点可知：

当 $-\frac{1}{2}\leqslant a<0$ 时，$\varphi(x)$ 定义域为 $\{x|-a\leqslant x\leqslant 1+a\}$；

当 $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$\varphi(x)$ 定义域为 $\{x|a\leqslant x\leqslant 1-a\}$；

当 $a<-\frac{1}{2}$ 或 $a>\frac{1}{2}$ 时，上述两区间交集为空解，$\varphi(x)$ 不能构成函数.

【启示与小结】 本题要求对函数记号，定义域及复合函数的概念有深刻理解，才能列出有关不等式组. 但如何求两区间 $[-a,1-a]$ 与 $[a,1+a]$ 的交集又是一个关键步骤. 这里可分四种情况：(1) 两区间交集为空集时；(2) 其中一个区间是另一个区间的子集；(3) 甲区间左端点在乙区间之外，右端点在乙区间之内；(4) 甲区间左端点在乙区间之内，右端点在乙区间之外. 分别在每种情况下，列出相应不等式组，求出 a 的取值范围及 $\varphi(x)$ 对应的定义域.

【例 3】 求函数 $y=x+\sqrt{x^2-3x+2}$ 的值域.

【思路分析】 前面讲了若干求值域的方法，但不能机械地死套. 要针对面临的具体函数，细心观察它的结构与数量间的约束关系灵活运用有关方法.

首先看到 $y-x=\sqrt{x^2-3x+2}\geqslant 0$，这一特征如不注意当两边平方后就被掩盖了，所以要清楚地列出 $y-x\geqslant 0$. 然后两边平方得 $y^2-2yx+3x-2=0$ 再与 $y-x\geqslant 0$ 联合起来确定 y 的范围. 由上面等式得 $x=\frac{2-y^2}{3-2y}$（其中 $y\neq\frac{3}{2}$，为什么?）代入 $y-x\geqslant 0$ 得 $y-\frac{2-y^2}{3-2y}\geqslant 0$，从而求得 y 的范围即为原函数的值域.

解 该函数定义域为 $(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$，$y-x=\sqrt{x^2-3x+2}$，两边平方得 $y^2-2yx+3x-2=0$，由 $\begin{cases}y^2-2yx+3x-2=0\cdots & ①\\ y-x\geqslant 0\cdots\cdots & ②\end{cases}$ 确定 y 的取值范围.

由①得 $x=\frac{2-y^2}{3-2y}$，（这里 $y\neq\frac{3}{2}$，否则由①式会得出 $\frac{9}{4}-2=0$ 的矛盾）然后将 $x=\frac{2-y^2}{3-2y}$ 代入②得 $y-\frac{2-y^2}{3-2y}\geqslant 0$，即 $\frac{(y-1)(y-2)}{2y-3}\geqslant 0$，解此不等式得 $1\leqslant y<\frac{3}{2}$ 或 $y\geqslant 2$. 故原函数值域为 $[1,\frac{3}{2})\cup[2,+\infty)$.

【启示与小结】 求函数值域无论用什么方法总是千方百计而又合理地找到函数值 y 所满足的约束关系（等式或不等式）．而不是死套哪个方法，应从实际出发．这里 $y-x\geqslant 0$ 不细心观察就会丢掉．另外一些细节也不可放过，如 $x=\frac{2-y^2}{3-2y}$ 中分母是否为零？要养成细心严谨的良好习惯．本题定义域与值域的对应关系为：$x\in(-\infty,1]$ 时，$y\in[1,\frac{3}{2})$；$x\in[2,+\infty)$ 时，$y\in[2,+\infty)$.

【例 4】 已知 $f(x)=1+\log_x 5$，$g(x)=\log_{x^2}9+\log_{x^3}8$．试比较 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的值的大小．

【思路分析】 首先将 $f(x)$ 与 $g(x)$ 变形化简以便比较大小．$f(x)=\log_x 5x$，$g(x)=\log_x 3+\log_x 2=\log_x 6$．作差观察：$f(x)-g(x)=\log_x\frac{5x}{6}$．而 $\log_x\frac{5x}{6}$ 是正是负还是为零依赖于 x 的取值．而 x 的取值要从本题实际出发加以分析讨论．x 是对数中的底数，于是有 $x>0$、$x\neq 1$．据此结合对数函数的单调性作出可能情况的讨论．

解　$f(x)=\log_x 5x$，$g(x)=\log_x 6$.

作差　$f(x)-g(x)=\log_x\frac{5x}{6}$．根据对数函数的单调性可知：

(1) 当 $x>1$ 且 $\frac{5x}{6}>1$，即 $x>\frac{6}{5}$ 时，$\log_x\frac{5x}{6}>0$，　∴　$f(x)>g(x)$；

(2) 当 $x>1$ 且 $\frac{5x}{6}<1$，即 $1<x<\frac{6}{5}$ 时，$\log_x\frac{5x}{6}<0$，　∴　$f(x)<g(x)$.

(3) 当 $0<x<1$ 且 $\frac{5x}{6}<1$，即 $0<x<1$ 时，$\log_x\frac{5x}{6}>0$，　∴　$f(x)>g(x)$.

(4) 当 $x=\frac{6}{5}$ 时，$\log_x\frac{5x}{6}=0$，所以 $f(x)=g(x)$.

【启示与小结】 比较两个函数的大小，如果已知函数形式比较复杂，首先要尽可能地根据有关性质或公式作等价化简，从而有利于比较大小．对其中的参变量要结合有关函数的定义要求及单调性恰当地作出各种可能的分类讨论．作到情况既不遗漏又不重复．读者对本题讨论中可能发现缺一种情况，即当 $0<x<1$ 且 $\frac{5x}{6}>1$ 时．形式上想到这一点是对的，但这一情况实际上不可能存在，因为不等式组 $\begin{cases}0<x<1\\ \frac{5x}{6}>1\end{cases}$ 的解集为空集！

【例 5】 试证函数 $f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}+x-1}{\sqrt{1+x^2}+x+1}$（$x\neq 0$）的图象关于原点对称．

【思路分析】 本题不必直接证明其图象关于原点对称．因为一个函数的图象关于原点对称的充分必要条件是该函数为奇函数．故本题只需证明函数 $f(x)$ 为奇函数即可．

证明　易知函数的定义域为 R，关于原点对称．$f(-0)=0=-f(0)$．当 $x\neq 0$ 时，