高等代数的认识与实践

赵建立　于增海　著

gaodeng daishu de renshi yu shijian

中国矿业大学出版社

高等代数的认识与实践

赵建立　于增海　著

中国矿业大学出版社

内 容 提 要

高等代数是高等院校数学专业的基础课。本书不仅介绍了高等代数的历史、理论和应用，还介绍了高等代数的教法和学法。

本书可供数学与应用数学、计算数学、信息与计算科学专业学生使用，也可供大中专教师和其他理工科学生参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等代数的认识与实践/赵建立，于增海著．—徐州：中国矿业大学出版社，2003.6

ISBN 7-81070-721-3

Ⅰ.高…　Ⅱ.①赵…②于…　Ⅲ.高等代数—师范大学—教学参考资料　Ⅳ.O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 034330 号

书　　名　高等代数的认识与实践

著　　者　赵建立　于增海

责任编辑　马跃龙

责任校对　杜锦芝

出版发行　中国矿业大学出版社

（江苏省徐州市中国矿业大学内　邮编 221008）

网　　址　http://www.cumtp.com　E-mail：cumtpvip@cumtp.com

排　　版　中国矿业大学出版社排版中心

印　　刷　中国矿业大学印刷厂

经　　销　新华书店

开　　本　850×1168 1/32　**印张** 12　**字数** 298 千字

版次印次　2003 年 6 月第 1 版　2003 年 6 月第 1 次印刷

印　　数　1～3100 册

定　　价　19.00 元

前　言

20 世纪，数学这门古老而又青春常在的科学获得了空前的发展，更加牢固地确立了在整个科学技术中的基础地位.数学正在向几乎所有的知识领域渗透.数学作为一种文化，已成为人类最基本最重要的素养之一.我国师范院校的数学教育在计划经济下形成的教学体制、教育观念、课程体系、教学内容和教学方法，还存在这样或那样的问题，如课程内容脱离实际、教学中不能全面反映数学本质的多样性、学生厌学、教学质量滑坡等等，这使得师范院校的数学教育成为基础教育改革与发展中的瓶颈.因而，高等师范院校的数学教育改革刻不容缓！为此笔者自 1991 年 7 月开始，借鉴布卢姆的“掌握学习”理论，开始了“高师大面积提高教学质量的实验与研究”课题的实施，后被正式批准为世界银行贷款研究课题.该课题在高等代数课程中进行了实验，并取得了较好的教学效果.1999 年我们又承担了山东省高等教育教学改革试点课程（高等代数）项目，本书是以上两个项目实施与研究的部分成果.我们给自己提出的任务是：加强高等代数与社会实践的密切联系，提高学生的学习兴趣，培养学生良好的数学素质和各种数学能力，大面积提高高等代数的教学质量.

全书的栏目设有“历史透析”、“本章知识结构与内容精析”、“精彩闪回”、“综合问题聚焦”、“测试题”等.“精彩闪回”提供了许多发生在我们身边的、易懂的、与现代科学技术密切相关的实例，从而使人们感到高等代数与社会实践密切相关，高等代数确实有用.“综合问题聚焦”提供了一些有一定难度和代表性的问题（含考研题），给出了参考答案，以期达到开阔思路、提高能力的目的.“测试题”分为 A 卷、B 卷两套.A 卷为形成性测试题，用以检测学习

的达成度;B卷是提高性测试题,供灵活选用.

全书共分九章,每章又分为若干节,每节含三部分内容:第一部分是“教学目标与知识结构”,前者对各知识点提出了明确可测的教学目标,它将指导教学的全过程;后者将离散的知识系统化,使其成为有机的整体.“学习指导”是第二部分,首先是“重点知识分析”,剖析了重点、难点、疑点,其次是“题型与方法”,介绍了每节的基本题型和常用的解题方法,并配有一些典范例题作示范.为了达到目标,对学生进行强化训练,第三部分给出了“达标训练题”,重要章节给出A、B两组训练题,A组适于课堂训练,亦可作为当节达标测试题;B组结合作业,课后完成.为了方便读者,我们在书末给出一个附录,介绍了我们提出的高师数学学科在认知领域内的教育目标分类体系.

鉴于我们的水平所限,所做教学改革还存在着逐步完善的问题,书中错误和疏漏之处,坦诚欢迎广大读者批评指正.

著者

2002年12月

目　　录

第一章　多　项　式

【历史透析】

高等代数是由多项式代数和线性代数两大部分组成的. 而多项式代数又是以代数方程的根的计算与根的分布为中心的.

古巴比伦、古希腊、中国、印度等国家的数学家在古代就对二次方程的求根有深人的研究,但是一元二次方程的一般解法是 9 世纪的阿拉伯数学家花剌子米建立的. 对三次方程的探讨可追溯到遥远的阿基米得时代或更早一些的古巴比伦. 阿基米得曾讨论过方程 $x^3+a=cx^2$ 的几何解法,11 世纪的波斯数学家莪默・伽亚谟(欧玛尔・海亚姆)创立了用圆锥曲线解三次方程的一般解法,但直到 16 世纪上半叶,三次方程的一般解法才由意大利数学家费尔洛、塔尔塔里亚、卡丹、费拉里得到,三次方程 $x^3+px+q=0$ 的三个根是:

$$x_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}},$$

$$x_2=w\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}+w^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}},$$

$$x_3=w^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}+w\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}},$$

其中 $w=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, $\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$. 因为上述公式最早出现在卡丹于 1545 年出版的专著《大术》中,因而又称为卡丹公式. 在三次方程的求解问题解决后不久,卡丹的学生费拉里得到了四次方程的求根公式,也记载于卡丹的《大术》中.

四次方程的求根公式的出现，鼓舞着数学家以极大的热情满怀信心地寻求五次方程的求根公式，经历了长达3个世纪的时间，不知耗费了多少数学家的多少时间、多少心血，遭遇了多少次失败，最后才由年轻的数学家阿贝尔给出了否定的回答.大数学家欧拉、范德蒙等都曾对此问题进行过探讨.18世纪下半叶，拉格朗日认真总结分析了前人得失的经验后，给自己提出了明确的目标和任务：分析解三次、四次方程的各种各样的方法，看看为什么这些方法可以把方程的根求出来，探索这些方法对于解更高阶方程能够提供什么线索.拉格朗日发现，解三、四次方程的关键在于引进一个关于原来的根的函数，即一个恰当的辅助量，这些辅助量是根的多项式，用这些辅助量及其在置换下的不同值可以求得原来的根.他深入研究了根与置换之间的关系，提出了预解式的概念，并预见到预解式和各根在排列置换下的形式不变性有关.对于三、四次方程，预解式的次数较已知方程的次数少一，所以三、四次方程可用代数方法求解.可是对于五次方程，情况发生了根本性的变化，五次方程的预解式却是一个六次方程，且他最终也没找到低于五次的预解式，因而他的方法不适用于解五次方程.尽管如此，他却第一次正确地指出了根与置换的理论是解代数方程的关键，这种思想对后人产生了巨大的影响.他的弟子鲁菲尼(Ruffini，1765--1822)用了5年左右的时间来证明四次以上高次方程不能有根式解，但未能给出证明.直到1824年，挪威数学家阿贝尔证明了以上被称为阿贝尔定理的结论.问题并没有到此为止，这是因为四次以上的方程没有一般的求根公式，但特殊的方程是有根式解的，因此，高于四次的代数方程何时有根式解，何时没有，仍有待于进一步探讨，这个问题称为可解性问题，此问题最后由法国数学家伽罗瓦全面透彻解决了.伽罗瓦在仔细研究了拉格朗日、阿贝尔的著作后，发现了二次、三次和四次方程的预解式一个比一个复杂，而且构造预解式需要很高的技巧，并且没有系统的方法，所以必须

设法绕过预解式的构造问题，他在借鉴拉格朗日思想的基础上，提出了置换群的概念，并把对预解式的寻求归结为置换群的各阶子群的结构分析，并给出了高次方程有求根公式的充要条件，彻底解决了高次方程的可解问题，这在数学史上具有重大意义. 比解决问题本身更具有意义的是提出了群的概念，此概念的提出不仅对近世代数的创立和发展具有头等重要的意义，而且对现代数学的发展具有不可估量的意义. 时至今日，群的概念已经普遍地被认为是数学最基本的概念之一.

人们在研究高次方程的解时，遇到了一种奇怪的数$\sqrt{-1}$，最早提到这种数的是法国的舒开，第一个系统讨论这种数的是意大利的卡丹，他早在 1545 年研究三次方程的解法时，就把 40 分解为$5+\sqrt{-15}$和$5-\sqrt{-15}$的乘积，当时只是一种形式而已，后经达朗贝尔、欧拉、赛尔、高斯、哈密顿等数学家的卓越工作，复数才被确立，真正成了数学的重要组成部分. 在复数研究的基础上，于 19 世纪经柯西、黎曼、魏尔斯特拉斯的工作，形成了复变函数这样一个重要的数学分支.

代数方程论的另一个问题是：一个方程有多少根？中世纪阿拉伯和印度的数学家们都已认识到二次方程有两个根，到了 16 世纪，卡丹认识到三次方程有三个根，四次方程有四个根. 荷兰数学家吉拉在 1629 年出版的著作中，曾推测并断言 n 次方程有 n 个根，但未给出证明. 1797 年，年仅 20 岁的高斯在他的博士论文中第一次给出了代数基本定理的完整证明(以后高斯又给出了其他三个证明)，并附带证明了：任一个实系数多项式必能分解成一次或二次实系数因式的乘积. 高斯的证明方法是数学证明的一次革新，开创了数学证明存在性的新途径，而且高斯证明这个定理用的是纯分析的方法，并发现了复数与拓扑的关系，这也显示了数学各学科之间的本质联系及学科交叉的巨大威力.

对具体方程的求解方法的研究是多项式理论的另一重要课

题. 它主要包括如下三个问题:(1) 确定实根的个数; (2) 有多少正根、负根; (3) 提出根所在的范围. 笛卡尔、高斯等许多数学家致力于这些问题的研究,直到 1829 年,瑞士数学家 C·F·斯图姆在向巴黎科学院递交的论文《论数学方程的解》中给出了著名的"斯图姆判别法",圆满解决了以上三个问题,至此高等代数方程论部分已经基本确立.

我们知道,很多代数方程没有求根公式,即使有,也可能出现无理数和复数,因此好的逼近公式在实际问题中至关重要,特别是在计算机日益发展的今天,它的重要性更为突出. 早在 17 世纪牛顿就建立了著名的牛顿迭代公式,而且对于几乎所有的二次方程,牛顿公式都能很好地逼近,但对于三次方程牛顿公式就不太好用了,即不太经常收敛到要求的根上. 对于三次方程以及高次方程是否有"一般收敛公式"呢?著名美国现代数学家,菲尔兹奖获得者麦克马仑(Curtis T. Mc Mullen,1958—)给出了这个问题的完整答案:对于三次方程有,而对于四次和四次以上的方程,则一般没有. 如果放宽一点限制即允许一般算法的合成(塔),则塔可以得到四次和五次方程的根,一般六次方程就不行了.

从方程的发展,我们可以看到近代数学的许多发展都起源于解方程,这也体现了著名数学家陈省身的断言:解方程是好数学.

【本章综述与知识结构】

一、综述

本章主要研究数域 F 上的一元多项式理论及多元多项式理论,其中一元多项式可分为五个部分:一般理论,整除理论,因式分解理论,根的理论,特殊域上的多项式. 在这里,整除是理论基础,因式分解是核心,根是多项式特征的另外一个反映,三者密切相关,使多项式成为有机整体. 多元多项式理论分为四个部分:多元多项式的概念,齐次多项式,对称多项式,一元多项式根的判别式.

二、知识结构

- **数　域** 定义，性质.
  - **数域 P 上的多项式**
    - **基本概念** 定义，次数，运算.
    - **整除理论** 带余除法，整除，最大公因式，互素.
    - **因式分解** 可约性，因式分解定理，重因式.
    - **多项式函数** 值，根，根的个数.
  - **常用数域上的多项式**
    - **复系数多项式** 代数基本定理，因式分解.
    - **实系数多项式** 根，因式分解.
    - **有理系数多项式** 不可约性判别，有理根求法.
  - **多元多项式**
    - **概念** 单项式，多项式，字典排列法.
    - **对称多项式** 基本定理，初等化方法.

§1　数　　域

【教学目标与知识结构】

- $\boxed{\text{代数性质}}_A$*
  - $\boxed{\text{运算封闭}}_B$ 数集 P 中任意两个数作某种运算的结果仍在 P 中，称 P 对这种运算封闭.
    - **数　域**
      - $\boxed{\text{定义}}_C$ 包含0和1的数集 P，若对和、差、积、商（分母不为零）运算封闭，则称 P 为数域.
      - $\boxed{\text{性质}}_C$ 数域包含有理数域.
      - $\boxed{\text{符号}}_B$ $\mathbf{Q}$，$\mathbf{R}$，$\mathbf{C}$.

---

* 本书中我们将知识点的学习水平分为6级：了解、记忆、领会、运用、综合与创造，分别以 A、B、C、D、E 与 F 表示，如：$\boxed{\text{代数性质}}_A$ 表示知识点“代数性质”的学习水平为“了解”.

【学习指导】

一、重点知识分析

本节的重点是数域的定义,简单地说,包含 0 和 1 且对加、减、乘、除(除数非零)封闭的数集叫数域. 容易证明

$$\mathbf{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a,b \in \mathbf{Q}\}$$

是数域,若将 2 换成不完全平方数 n,则 $\mathbf{Q}(\sqrt{n})$也是数域,这样的 n 有无穷多个,故数域有无穷多个. 最常用的数域是有理数域 $\mathbf{Q}$,实数域 $\mathbf{R}$,复数域 $\mathbf{C}$. 数域有一个重要性质:任何数域都包含有理数域. 于是对任何数域 P 都有

$$\mathbf{C} \supseteq P \supseteq \mathbf{Q} \tag{1}$$

若集合 A 是集合 B 的子集,则称 A 包含于 B. 由(1)可知:最小的数域是有理数域,最大的数域是复数域. 由 $P\supseteq\mathbf{Q}$ 可知,任何数域都含有无穷多个数,从而不存在有限个数构成的数域.

约定 $\mathbf{N}$、$\mathbf{Z}$ 分别表示自然数集、整数集,$\mathbf{N}^0$ 表示非负整数集.

复数域也可以用 $\mathbf{K}$ 表示.

二、题型与方法

本节题目可分为两个类型:一是运算封闭性的判定;二是数域的判定. 判别方法:主要用定义.

例 1 判断下列命题是否正确:

① 所有整数构成的集合 $\mathbf{Z}$ 是数域.

② 若 P 是数域,则 P 对加、减、乘、除都封闭.

③ 若 $P=\{a+bi \mid a,b\in\mathbf{Q}\}$,则 P 是数域.

解 ① 由于 $2,3\in\mathbf{Z}$,且 $2\neq0$,但$\frac{3}{2}\in\mathbf{Z}$,从而 $\mathbf{Z}$ 不是数域.

② 由数域的定义可知,P 对除法的封闭性是有条件的——除数不为零,去掉这个条件结论不真.

③ 命题正确. 事实上,显然 $0,1\in P$. 对任意的 $a+bi,c+di\in P$,有

$$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i\in P,$$

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i\in P,$$

若 $a+bi\neq 0$，则

$$\frac{c+di}{a+bi}=\frac{ac+bd}{a^2+b^2}+\frac{ad-bc}{a^2+b^2}i\in P.$$

故 P 是数域.

小结　要证明一个数集是数域，必须按定义逐条加以验证；要否定一数集是数域，只要举出反例说明不满足其中一个条件即可.

【达标训练题】

一、填空题

1. 数集$\{0\}$对____________运算封闭.

2. 自然数集 $\mathbf{N}$ 对____________运算封闭.

3. 数集$\{a+bi\mid a,b\in\mathbf{Z}\}$对____________运算封闭.

二、判断题

1. 数域必含有无穷多个数.

2. 所有无理数构成的集合是数域.

三、证明

1. 证明$\mathbf{Q}(\sqrt{n})=\{a+b\sqrt{n}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$是数域，这里 n 不是完全平方数.

2. 证明$\{a+b\sqrt[3]{2}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$不是数域.

3*. 若 P_1,P_2 是数域，证明 $P_1\cap P_2$ 也是数域，而 $P_1\cup P_2$ 不一定是数域.

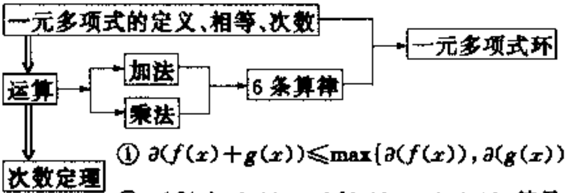
§2 一元多项式

【教学目标与知识结构】

一、教学目标细目表

知识点 \ 学习水平		了解	记忆	领会	运用	综合	创造
基本概念	① 一元多项式的定义和术语		√				
	② 多项式的相等与次数			√			
	③ 多项式的加法及乘法				√		
	④ 一元多项式环		√				
基本理论	① 次数定理					√	
	② 多项式的运算律		√				

二、知识结构网络图



① $\partial(f(x)+g(x))\leqslant\max\{\partial(f(x)),\partial(g(x))\}$；

② $\partial(f(x)g(x))=\partial(f(x))+\partial(g(x))$，符号有意义时成立.

【学习指导】

一、重点知识分析

(1) 一元多项式是通过形式表达式定义的，其中的 x 是符号或文字，初学者往往把 x 理解为未知数，这是片面的. 事实上，x 不仅可以表示未知数，还可以表示其他的事物(如后面讲的矩阵、线性变换). 从抽象代数角度看 x 是不定元. 我们要向学生反复强调，多项式是形式表达式. 事实上，我们讨论多项式有两种观点：形