面向新世纪课程教材
Textbook Series for the New Century

大学文科数学

陈光曙　徐新亚　主编

同济大学出版社

面 向 新 世 纪 课 程 教 材

Textbook Series for the New Century

大学文科数学

陈光曙 徐新亚 主 编

夏海峰 陈学华 副主编

同济大学出版社

内容提要

本书根据当前普通高等院校文科数学课程教学指导意见和教材改革精神，由从事文科数学教学的一线教师执笔编写，深入浅出地讲解大学文科数学的基本知识，包括函数、极限与连续，一元函数微分学，一元函数积分学，二元函数微积分学，常微分方程简介，线性代数初步及初等概率论基础等七章内容. 每章均配备了适量的例题和一定数量的习题.

本书注重数学思想的介绍和基本的逻辑思维训练，从不同的侧面比较自然地引入数学的基本概念，适量给出一些相关的证明过程及求解过程. 由于大学文科数学的学时限制，在教材内容的选取与组织上对高等数学、线性代数及概率论课程的知识进行了必要的精简. 本书结构严谨、逻辑清晰、通俗易懂、例证适当、难度适宜，适合作为普通高等院校文科类本专科学生系统学习大学数学基本思想和方法的教材，也可供中专及高职层次的相关经管类和文科专业选用为教材.

图书在版编目(CIP)数据

大学文科数学/陈光曙，徐新亚主编．—上海：同济大学出版社，2006. 5

ISBN 7-5608-3269-5

Ⅰ. 大… Ⅱ. ①陈… ②徐… Ⅲ. 高等数学－高等学校－教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 027968 号

面向新世纪课程教材

大学文科数学

陈光曙 徐新亚 主 编

夏海峰 陈学华 副主编

责任编辑 曹 建 责任校对 杨江淮 封面设计 李志云

出版发行 同济大学出版社

(上海市四平路 1239 号 邮编 200092 电话 021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 同济大学印刷厂印刷

开 本 787mm×960mm 1/16

印 张 15

字 数 300 千字

印 数 1—4 100

版 次 2006 年 5 月第 1 版 2006 年 5 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 7-5608-3269-5/O・286

定 价 20.00 元

本书若有印装质量问题，请向本社发行部调换

前　言

在长期的高等数学教学中，我们一直关注大学文科数学的课程建设和教材建设. 经过多年的教学实践，我们认为大学文科数学不同于理、工科的高等数学，其目的主要在于引导文科学生掌握一种现代科学的语言，学习一种理性思维的方式，提高大学生的数学修养和综合素质. 基于这种认识，我们组织了多年从事一线教学的骨干教师编写了这部教材.

本教材编写中，我们在保留传统高等数学教材结构严谨、逻辑清晰等风格的同时，积极吸收近年来高校教材改革的成功经验，努力做到例证适当、通俗易懂. 本教材内容包括函数、极限与连续，一元函数微分学，一元函数积分学，二元函数微积分学，常微分方程简介，线性代数初步以及初等概率论基础等七章，每章均配备了适量的习题.

由于本教材以大学文科学生为对象，内容选取的深度与广度都有一定的限制，所以在编写中，我们一方面以学生易于接受的自然形式来展开各章节的内容，另一方面也尽量注意到数学语言的逻辑性，保证了教材的系统性和严谨性，便于教师的讲授和学生的自学. 参加本教材编写工作的有：陈光曙（第 2，7 章）、徐新亚（第 1，5 章）、夏海峰（第 3，4 章）、陈学华（第 6 章）等，全书由陈光曙统稿.

同济大学应用数学系的应明、徐建平、郭镜明三位教授审阅了本书，提出了许多宝贵意见和建议，谨此表示衷心的感谢！

本教材的编写还得到阎超栋等同志的支持和帮助，在此一并表示衷心的感谢！

由于我们水平有限，加上时间仓促，书中的疏漏、错误和不足之处难免，恳请各位专家、同行和广大读者批评指正.

编　者

2006 年 5 月

目　录

前　言
第 1 章　函数、极限与连续 …………………………………………… (1)
1.1　函　数 …………………………………………………………… (1)
1.2　极　限……………………………………………………………… (12)
1.3　函数的连续………………………………………………………… (25)
习题 1 ……………………………………………………………………… (32)
第 2 章　一元函数微分学 ……………………………………………… (38)
2.1　导数与微分………………………………………………………… (38)
2.2　微分中值定理……………………………………………………… (54)
2.3　导数的应用………………………………………………………… (58)
习题 2 ……………………………………………………………………… (66)
第 3 章　一元函数积分学 ……………………………………………… (70)
3.1　不定积分…………………………………………………………… (70)
3.2　定积分……………………………………………………………… (80)
习题 3 ……………………………………………………………………… (92)
第 4 章　二元函数微积分学 …………………………………………… (97)
4.1　二元函数的概念…………………………………………………… (97)
4.2　二元函数偏导数与全微分 ……………………………………… (100)
4.3　复合函数和隐函数微分法 ……………………………………… (103)
4.4　二重积分 ………………………………………………………… (106)
习题 4 …………………………………………………………………… (110)
第 5 章　常微分方程简介……………………………………………… (112)
5.1　微分方程的基本概念 …………………………………………… (112)
5.2　一阶微分方程 …………………………………………………… (115)
5.3　可降阶的高阶微分方程 ………………………………………… (121)
5.4　二阶常系数线性方程 …………………………………………… (123)
习题 5 …………………………………………………………………… (132)
第 6 章　线性代数初步………………………………………………… (134)
6.1　行列式 …………………………………………………………… (134)
6.2　矩　阵 …………………………………………………………… (147)

6.3 线性方程组 …………………………………………………… (159)
习题 6 ………………………………………………………………… (165)
第 7 章 初等概率论基础 ……………………………………… (168)
7.1 样本空间与随机事件 ……………………………………… (168)
7.2 古典概型 …………………………………………………… (173)
7.3 条件概率和随机事件的独立性 …………………………… (177)
7.4 随机变量及其分布 ………………………………………… (185)
7.5 随机变量的数学期望和方差 ……………………………… (199)
习题 7 ………………………………………………………………… (208)
参考答案 ………………………………………………………… (216)
习题 1 ………………………………………………………………… (216)
习题 2 ………………………………………………………………… (217)
习题 3 ………………………………………………………………… (219)
习题 4 ………………………………………………………………… (221)
习题 5 ………………………………………………………………… (222)
习题 6 ………………………………………………………………… (223)
习题 7 ………………………………………………………………… (224)
附录 标准正态分布表 ………………………………………… (228)
参考文献 ………………………………………………………… (229)

第 1 章　函数、极限与连续

在自然科学、社会科学的各个领域，函数是被广泛应用的数学概念之一. 它的重要性已远远超过数学本身. 在大学数学中，函数处于基础的核心地位，是被我们这门课程系统研究的对象. 函数中最为常用的则是连续函数.

为了研究函数，我们需要借助极限这个方法，也就是说我们是利用极限手段来分析函数的各种性质的. 这是大学数学区别于中学数学的重要标志. 因此，有人说函数与极限是大学数学的“双子星座”，是大学数学不可分割的两块柱石.

1.1　函　　数

1.1.1　函数的概念

在考察一个自然现象时，常常会遇到各种不同的量，其中有的量可以在某个范围内取值，称为变量；有的量只取一个值，称为常量. 一个问题中出现的两个变量往往是相互依存的，即当其中一个变量在某个范围内取值时，另一个变量按某个特定的规律取相应的值. 例如，半径为 r 的圆的面积为 $A=\pi r^2$，当 r 在 $[0,+\infty)$ 上取值时，由公式 $A=\pi r^2$ 可得到相应的 A 值. 公式 $A=\pi r^2$ 给出了一个变量 A 与变量 r 之间的依存关系. 一般地，我们有

定义 1　设 D 是一个数集，对 D 上的每一个数 x，按照某一确定的法则 f，总有确定的实数 y 与之相对应，则称 f 是从 D 到实数集 $\mathbf{R}$ 的函数. 记作

$$\begin{aligned} f:D&\to\mathbf{R}\\ x&\mapsto y\end{aligned}$$

其中，数集 D 称为函数 f 的**定义域**，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，函数值的全体称为函数 f 的**值域**.

通常，把函数 $\begin{matrix} f:D\to\mathbf{R}\\ x\mapsto y\end{matrix}$ 记作 $y=f(x), x\in D$，或简记为 $y=f(x)$.

由函数的定义可知，$A=\pi r^2$ 是一个函数，它的定义域是 $[0,+\infty)$，变量 r, A 分别是这个函数的自变量、因变量.

又如，函数

$$f(x)=c\quad (c\ 是某个确定的实数)$$

表示当自变量 x 在数轴上取任意值时,因变量 y 总取相同的函数值 c,这种函数称为常值函数.

函数的定义域是实数的集合,常见的定义域是数轴上的区间. 区间可分为:开区间(a,b); 闭区间$[a,b]$;半开半闭区间$[a,b)$,$(a,b]$;无穷区间$[a,+\infty)$,$(a,+\infty)$,$(-\infty,b]$,$(-\infty,b)$,$(-\infty,+\infty)$. 以后用字母 I 表示区间.

为方便叙述,我们称开区间$(a-\delta,a+\delta)$(δ 是正数)为 a 的 δ **邻域**,简称**邻域**. a 称为这个邻域的中心,δ 称为这个邻域的半径.

由实际问题所确定的函数,应根据它的实际意义决定它的定义域并在函数关系式后注明. 例如,设物体在距离地面高度为 h 的地方由静止状态自由下落,则物体所经过的路程 s 与时间 t 之间的函数关系为

$$s=\frac{1}{2}gt^2, \qquad t\in\left[0,\sqrt{\frac{2h}{g}}\right],$$

式中,g 是重力加速度.

由数学式子表示的函数,若不说明定义域,则其定义域就是使函数表达式有意义的自变量值的全体. 例如,函数 $y=\sqrt{x-1}$的定义域为$[1,+\infty)$.

从前面的讨论不难看出,要确定一个函数,就必须知道函数的定义域和自变量与因变量之间的对应法则,也就是函数关系. 这就是说,定义域和函数关系是一个函数的两大要素. 当且仅当两个函数有相同的定义域并且定义域中的每一点的函数值都相同时,我们称这两个函数是相等的.

例如,$f(x)=2\cos x\sin x$ 与 $g(x)=\sin 2x$ 是相等的. 但 $y_1(x)=2\ln x$ 与 $y_2(x)=\ln x^2$是不相等的.

1.1.2 函数的表示法

常用的函数表示法有三种:

(1) 解析法(公式法). 例如 $y=\sqrt{1-x^2}$,$y=\sin 2x$ 等.

(2) 图像法. 例如某天的气温曲线,如图 1-1 所示 .

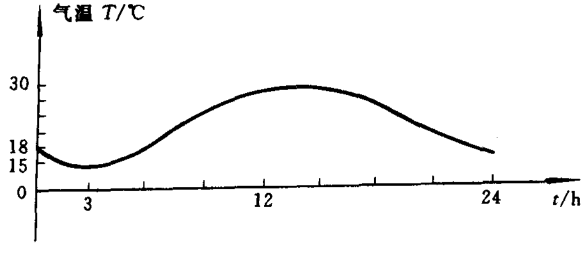

图 1-1

(3) 表格法. 如某城市实测某年的月降水量，如下表所列：

月份 n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
降水量 p	10	25	31	28	35	49	87	122	90	61	20	14

这三种表示法各有优点. 解析法便于分析和计算，它在数学中的应用最为广泛；图像法直观性强，函数的变化情况一目了然，在工程问题中经常使用；表格法数据是现成的，便于查找.

需要指出的是，用解析法表示的函数有时在定义域的不同部分的表达式是不同的. 例如，将 1g 温度为 $-10℃$ 的冰加热变成 10℃ 的水，吸收的热量 Q 与温度 t 之间的函数关系为

$$Q(t)=\begin{cases}0.5t+5, & t\in[-10,0),\\ t+85, & t\in(0,10].\end{cases}$$

它的图像如图 1-2 所示.

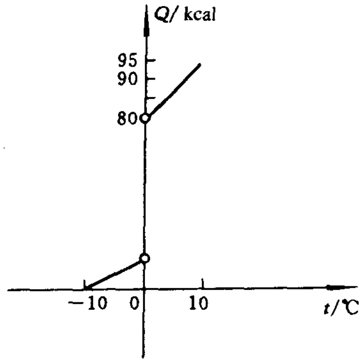

图 1-2

它表示的是定义域为 $[-10,0)\cup(0,10]$ 的一个函数，而不是两个函数. 这种在定义域的各部分用不同的数学式子表示的函数称为**分段函数**.

1.1.3 函数的特殊性质

1. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若对于区间 I 上的任意两点 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\quad(\text{或 } f(x_1)\geqslant f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调不减(或单调不增)的.

若对于区间 I 上的任意两点 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有

$$f(x_1)<f(x_2)\quad(\text{或 } f(x_1)>f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加(或单调减少)的.

单调增加、单调减少的函数统称为单调函数.

函数 $y=x^3$ 和 $y=\arctan x$ 都是 $(-\infty,+\infty)$ 上的单调增加函数，它们的图形分别如图 1-3、图 1-4 所示.

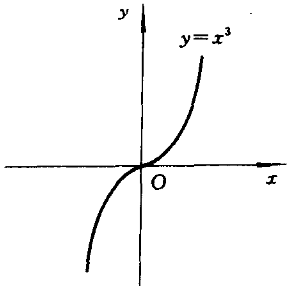

图 1-3

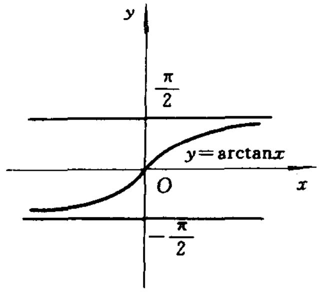

图 1-4

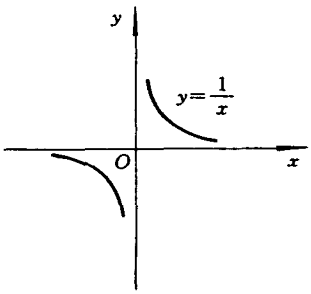

图 1-5

函数 $y=\frac{1}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，它的图形如图 1-5 所示. 显然，它在 $(-\infty,0)$ 或 $(0,+\infty)$ 上是分别减少的.

2. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对于 D 上的任意一点 x，都有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称函数 $f(x)$ 为奇函数，若对于 D 上的任意一点 x，都有

$$f(-x)=f(x),$$

则称函数 $f(x)$ 为偶函数.

函数 $y=x^3$，$y=\arctan x$ 和 $y=\frac{1}{x}$ 都是奇函数，奇函数的图像关于原点对称. 函数 $y=x^2$（图 1-6）和 $y=\cos x$（图 1-7）都是偶函数，偶函数的图像关于 y 轴对称. 函数 $y=1+x^3$ 既不是奇函数也不是偶函数.

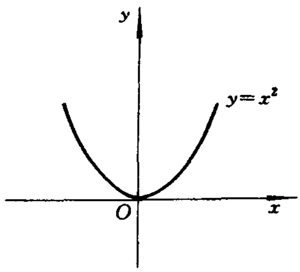

图 1-6

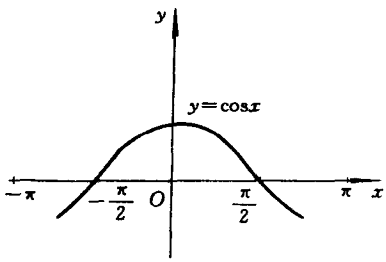

图 1-7

3. 函数的有界性

若存在某个正函数 M,使对于区间 I 上的任意一点 x,都有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$在区间 I 上是有界的,正数 M 称为函数 $f(x)$的一个界.

若这样的 $M>0$ 不存在,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上无界.

正数 M 是函数 $f(x)$在区间 I 上的一个界,则 $f(x)$在区间 I 的图形完全落在平行于 x 轴的两条平行直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间(图 1-8).

例如,三角函数 $y=\sin x$, $y=\cos x$ 都在$(-\infty,+\infty)$上有界,而函数 $y=\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$上是无界的.

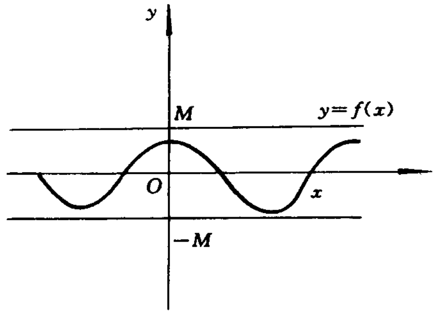

图 1-8

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$的定义域是 D,若存在某个正数 L,使对每个 $x\in D$, $x\pm L\in D$,且

$$f(x\pm L)=f(x)$$

成立,则称函数 $f(x)$是周期函数,并称 L 为函数 $f(x)$的一个周期.

若 L 是函数 $f(x)$的周期,则 $2L,3L,\cdots$都是函数 $f(x)$的周期.若周期函数 $f(x)$的周期中有一个最小的正数,则称这个最小的正数是函数 $f(x)$的基本周期.通常说的函数周期就是指它的基本周期.

例如,函数 $\sin x,\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数,$\tan x,\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数.常数函数 $y=C$ 以任意正数 a 为其周期,显然,它没有基本周期.

1.1.4 复合函数与反函数

1. 复合函数

在实际问题中,有时两个变量之间的依赖关系不是直接的,而是通过第三个变量联系起来的.

例如,设质点 A 绕定点 O 作匀速圆周运动($|OA|=R$),如图 1-9 所示,变量 y 是旋转角度 φ 的函数 $y=R\sin\varphi$.而其旋转的角度 φ 又是时间 t 的函数,即 $\varphi=\omega t$.因此,变量 y 经过中间变量 φ 又成为变量 t 的函数,即

$$y=R\sin\varphi=R\sin\omega t.$$

这种形式的函数称为复合函数.一般地,我们有

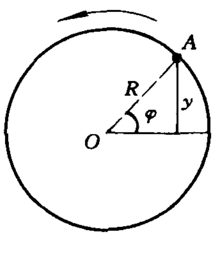

图 1-9

定义 2 设 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$ 是两个函数，D 是函数 $u=g(x)$ 的定义域或定义域的一部分. 若 $g(x)$ 的值域全部含在函数 $y=f(u)$ 的定义域 F 中，即对 D 中的每个 x 值，$g(x)$ 一定在 $y=f(u)$ 的定义域 F 中. 于是对每一个 D 中的 x 值，先通过 $u=g(x)$，再通过 $y=f(u)$，总可确定一个唯一的 y 值与之对应. 我们称这个函数为 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 构成的**复合函数**，记作

$$y=f(g(x)),\quad x\in D,$$

其中，$y=f(u)$ 称为外函数，$u=g(x)$ 称为内函数，u 称为中间变量.

复合函数也可以由多于两个函数相继复合而成(每一次复合都满足定义 2 的条件). 例如，三个函数 $u=\sin z$ ($z\in\mathbf{R}$)，$z=\sqrt{y}$ ($y\in[0,+\infty)$，值域 $[0,+\infty)$)，$y=1-x^2$，它们经过相继的复合运算，得

$$u=\sin z=\sin\sqrt{y}=\sin\sqrt{1-x^2},\qquad x\in[-1,1].$$

2. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，即对每一个 $x\in I$，通过对应关系 f，有一个唯一的 y 与之对应. 反之，对函数 $f(x)$ 值域中的每一个值 y，满足 $y=f(x)$ 的 $x\in I$ 可能不止一个.

定义 3 设有函数 $f(x)$，$x\in D$，其值域为 F，若对于 F 中的每一个值 y，在 D 上有唯一满足 $f(x)=y$ 的 x 值与之对应，则确定了一个从 F 到 D 的函数，它的自变量为 y，因变量为 x，称这个函数为原来函数的**反函数**，记为

$$\begin{aligned}f^{-1}:F&\to D\\ y&\mapsto x\end{aligned}$$

或 $x=f^{-1}(y)$，$y\in F$.

由反函数的定义可知，若 $x=\varphi(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，则 $y=f(x)$ 也是 $x=\varphi(y)$ 的反函数，即它们互为反函数，并且其中任一个函数的值域一定是另一个函数的定义域. 由定义还可以看出，互为反函数的两个函数在同一坐标系下的图形是重合的.

我们习惯上常用 x 作自变量，y 作因变量，因此，常把反函数 $x=f^{-1}(y)$ 改记为 $y=f^{-1}(x)$，仍称之为 $y=f(x)$ 的反函数. $y=f^{-1}(x)$ 与 $y=f(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称(图 1-10).

由定义 3 可知，单调函数必有反函数.

例 1 函数 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为严格增函数，值域为 $(-\infty,+\infty)$，它

的反函数是 $y=\sqrt[3]{x}$，定义域和值域都是 $(-\infty,+\infty)$.

例 2 函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上没有反函数，但是函数 $y=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格增加，其值域为 $[0,+\infty)$，有反函数 $y=\sqrt{x}$；函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0]$ 上严格减少，其值域为 $[0,+\infty)$，有反函数 $y=-\sqrt{x}$.

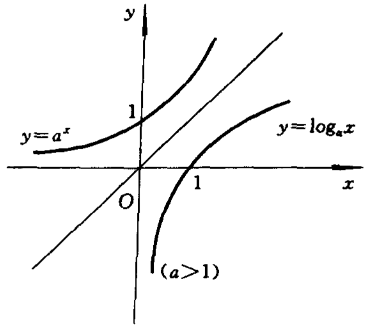

图 1-10

例 3 函数 $y=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内严格增加，值域是 $(-\infty,+\infty)$，有反函数 $y=\arctan x$，它的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

1.1.5 初等函数

1. *基本初等函数*

在各类数学问题中，用得最广泛并且形式最简单的函数共有六类：常数函数、指数函数、对数函数、幂函数、三角函数和反三角函数. 人们把这六类函数统称为基本初等函数.

(1) 常数函数

$$y=C \quad 或 \quad f(x)=C\ (C\ 是常数), \quad x\in\mathbf{R},$$

它的图像是过点 $(0,C)$ 并且平行于 x 轴的一条直线. 常数函数是偶函数.

(2) 指数函数

$$y=a^x(a>0,a\neq 1), \quad x\in\mathbf{R},$$

它的值域是 $(0,+\infty)$.

当 $a>1$ 时，函数 $y=a^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格增加；当 $0<a<1$ 时，函数 $y=a^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格减少(图 1-11).

(3) 对数函数

$$y=\log_a x\ (a>0,a\neq 1), \quad x\in(0,+\infty).$$

对数函数 $y=\log_a x$ 是指数函数 $y=a^x$ 的反函数. 当 $a>1$ 时，$y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格增加；当 $0<a<1$ 时，$y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格减少(图 1-12).

以常数 $e=2.7182818\cdots$ 为底的指数函数 $y=e^x$ 和以 e 为底的对数函数 $y=$

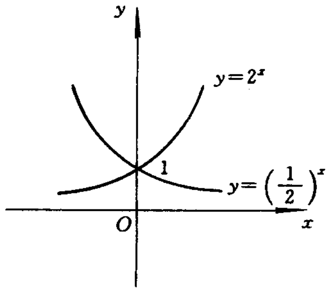

图 1-11

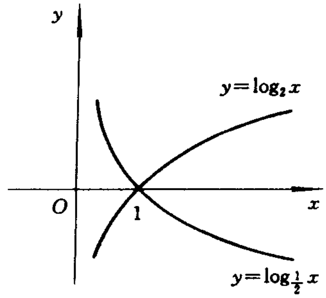

图 1-12

$\log_e x$ 或 $y=\ln x$ 在数学中具有独特的地位.

(4) 幂函数

$$y=x^{\alpha} \quad (\alpha\in\mathbf{R}).$$

幂函数 $y=x^{\alpha}$ 的定义域与指数 α 有关. 例如, $y=x^{\frac{1}{2}}$ 定义域是 $[0,+\infty)$, $y=x^2$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$. 当 $\alpha\neq 0$ 时, $y=x^{\alpha}$ 和 $y=x^{\frac{1}{\alpha}}$ 互为反函数. 当 α 为任意实数时,我们通常将函数 $y=x^{\alpha}$ 表示成复合函数

$$y=x^{\alpha}=\mathrm{e}^{\alpha\ln x} \qquad (x>0).$$

(5) 三角函数

三角函数只有六个,它们是 $\sin x,\cos x,\tan x,\cot x,\sec x$ 和 $\csc x$. 其中 $y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 的定义域是 $\mathbf{R}$,值域是闭区间 $[-1,1]$,它们都是以 2π 为周期的周期函数. $y=\tan x$ 的定义域是 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$($k$ 是整数),值域是 $\mathbf{R}$. $y=\cot x$ 的定义域是 $(k\pi,(k+1)\pi)$(k 是整数),值域是 $\mathbf{R}$. 这两个函数都是以 π 为周期的周期函数.

$\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$, $\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$,由 $\cos x$, $\sin x$ 的定义域和值域,不难得出这两个函数的定义域及值域.

需要指出的是,在本门课程中,所有三角函数的自变量 x 表示的角度单位一律是弧度,有特别声明时除外.

(6) 反三角函数

常用的反三角函数有反正弦函数 $y=\arcsin x$,反余弦函数 $y=\arccos x$,反正切函数 $y=\arctan x$ 和反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$.

$y=\arcsin x$, $y=\arccos x$ 的定义域都是闭区间 $[-1,1]$,值域分别是 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 与 $[0,\pi]$. $y=\arcsin x$ 是正弦函数 $y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数,

它在定义域$[-1,1]$上是严格增加的；$y=\arccos x$ 是余弦函数 $y=\cos x$ 在$[0,\pi]$上的反函数，它在定义域$[-1,1]$上是严格减少的．它们的图形如图 1-13 所示．

$y=\arctan x$ 与 $y=\operatorname{arccot} x$ 分别是正切函数 $y=\tan x$ 与余切函数 $y=\cot x$ 的反函数．这两个函数的定义域都是 $\mathbf{R}$，$\arctan x$ 的值域是$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，它是严格增加的奇函数；$\operatorname{arccot} x$ 的值域是$(0,\pi)$，它在定义域内严格减少(图 1-14)．

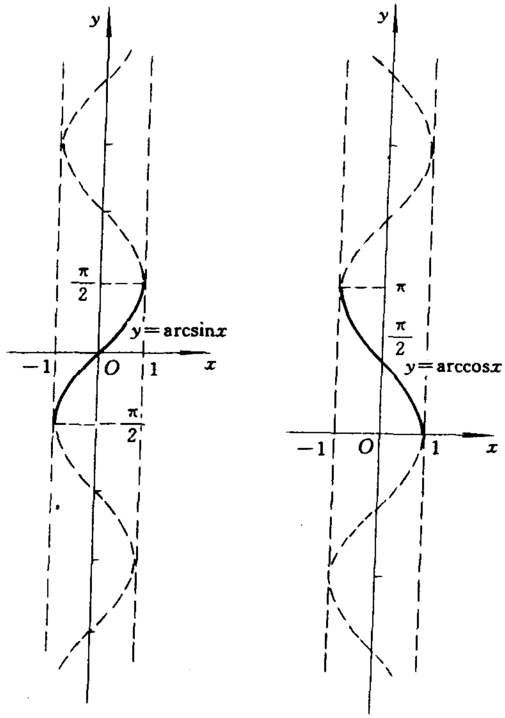

图 1-13

2. *初等函数*

凡由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合运算所得到的函数都称为**初等函数**. 中学里所讨论的函数都是初等函数.

例 4　多项式函数

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

是初等函数，其中，$a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n$ 是常数，$a_0\neq0$，n 是非负整数.

例 5　$f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}+\sin^2 x+\ln(x^3+1)$是初等函数.

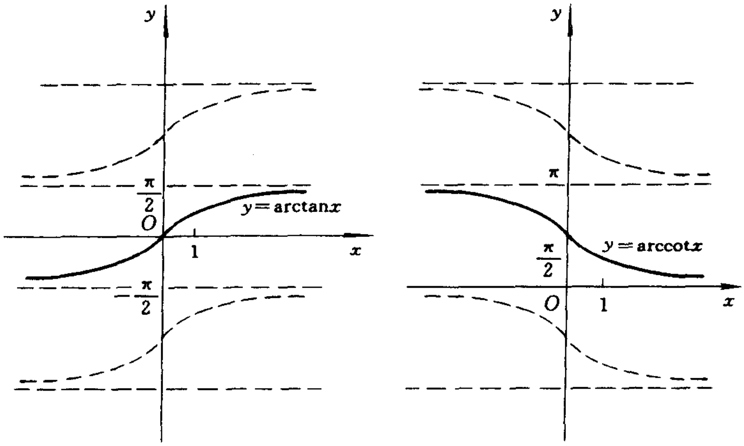

图 1-14

3. 双曲函数

在工程技术中，常用到一种被称为双曲函数的重要函数，其中最为常用的是以下两种：

双曲正弦函数

$$\mathrm{sh}x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2};$$

双曲余弦函数

$$\mathrm{ch}x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}.$$

这两个函数有一些特征值得注意，如

$$\mathrm{ch}^{2}x-\mathrm{sh}^{2}x=1,\qquad \mathrm{ch}^{2}x+\mathrm{sh}^{2}x=\mathrm{ch}2x.$$

除了上述的两个双曲函数外，有时还要用到双曲正切函数与双曲余切函数：

双曲正切函数

$$\mathrm{th}x=\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}};$$

双曲余切函数

$$\mathrm{cth}x=\frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x}=\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}.$$