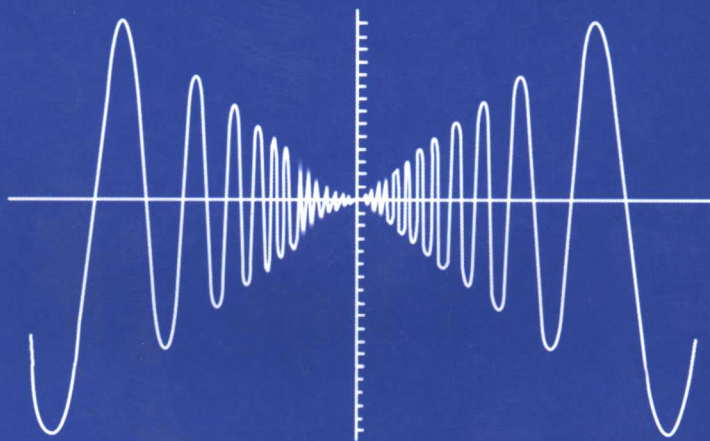


# 中国兵工学会

## 第八届应用数学 学术年会论文精选

杨孝平 主编



兵器工业出版社

中国兵工学会

# 第八届应用数学学术年会论文精选

杨孝平 主编

兵器工业出版社

## 内 容 简 介

本论文集收集了近几年来兵器工业的科技教育工作者从不同角度将应用数学用于国防及相关领域的科研、生产、试验等方面的成果,充分体现了在国防科学技术中广泛应用现代数学知识的必要性和重要性。

本论文集既有理论,又有实践,内容丰富,观点新颖,说理正确,可供从事技术研究、试验、教学和管理工作的相关科技人员和教育工作者参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

中国兵工学会第八届应用数学学术年会论文精选/杨孝平  
主编. —北京:兵器工业出版社, 2005.11  
ISBN 7-80172-566-2

I. 中... II. 杨... III. 应用数学—学术会议—中  
国—文集 IV.029-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 125164 号

出版发行:兵器工业出版社

发行电话:010-68962596, 68962591

邮 编:100089

社 址:北京市海淀区车道沟 10 号

经 销:各地新华书店

印 刷:南京理工大学印刷厂

版 次:2005 年 11 月第 1 版第 1 次印刷

责任编辑:李翠兰

封面设计:刘德钦

责任校对:郭 芳

责任印制:赵春云

开 本:787×1092 1/16

印 张:10.75

字 数:298 千字

定 价:48.00 元

(版权所有 翻印必究 印装有误 负责调换)

中国兵工学会

# 第八届应用数学学术年会论文精选

## 编审委员会

主 编：杨孝平

副主编：邱敦元 吴祈宗 杨伯忠 易东云 刘德饮

编 委：杨万利 杨国孝 戴述楦 王树梅 景耀杰

尹 群 肖 伟 苏 翊

# 目 录

|                           |                 |       |
|---------------------------|-----------------|-------|
| 基于毁伤场理论的炮兵射击效率评定方法        | 杨伯忠 程贤进 高启航     | (1)   |
| 一类军事竞争控制系统模型的数学分析         | 杨万利 彭金香         | (4)   |
| 分布式小卫星间无线电测量几何精度分析        | 聂鹏程 易东云 谷德峰     | (7)   |
| 基于模糊综合评价的虚拟企业合作伙伴选择       | 吴明灯 吴祈宗         | (12)  |
| 中国证券市场指数间交易行为之间的关系研究      | 吴 鹏 杨国孝         | (16)  |
| 板弯曲问题的一种并行算法              | 苏 翊 邱敦元 邱利琼 林 意 | (19)  |
| 扰动理论在外弹道中的应用              | 张跃华 景耀杰 兰 赞     | (23)  |
| 关于模糊综合评判在教学评价中的应用         | 邓拥新 杨万利         | (27)  |
| CG 制作项目管理系统的的设计           | 王 玲 王树梅 刘 军 阮文俊 | (31)  |
| 关于复 Banach 空间的复凸性的几点探讨    | 王 丰             | (36)  |
| 虚拟战场环境中典型碰撞问题研究           | 冯善达 刘怡昕         | (39)  |
| 关于模糊综合评判模型失效的研究           | 陈 铭 彭金香 李 茜     | (44)  |
| 炮兵分队射击指挥诸元精度评估方法探讨        | 赵曙光 蔡云鹏 杜云刚     | (47)  |
| 自行火炮射击时全炮运动测试方法           | 郭新宇 尹兆华 王民超 孙井泉 | (51)  |
| 试射对火炮射击效率的影响探讨            | 蔡云鹏 赵曙光 程贤进     | (55)  |
| 装甲车辆履带销和销耳可靠性分析           | 孙凤文 徐华亮 陈雪晴     | (58)  |
| 自行火炮的可靠性评价研究              | 孙凤文 唐佑辉 徐华亮     | (63)  |
| 炮兵射击指挥中射击目标排序问题探讨         | 王 勇 王 屹 杨志华     | (67)  |
| 评定子母弹射击效率近似方法研究           | 冯善达 杨伯忠 刘怡昕     | (71)  |
| 浅析倾斜座式瞄准具瞄准镜方向分划环倾斜对瞄准的影响 | 成建华             | (75)  |
| 无人机载激光指示器发射末制导炮弹射击效能模型研究  | 钟宜兴 谢 文         | (79)  |
| 粗糙集理论及其军事应用               | 徐德友 郭寅飞         | (83)  |
| 战场目标威胁程度多级模糊综合评判及仿真研究     | 沙兆军 杨伯忠 孙宇业     | (87)  |
| 基于蒙特卡洛法发射末制导炮弹射击效率的评定     | 钟宜兴 谢 文         | (90)  |
| Web 数据挖掘研究综述              | 张 亮 王 玲 宋 斌     | (93)  |
| 目标区域环境对榴弹冲击波效力的影响研究       | 孔云峰 张锦刚 王 勇     | (98)  |
| 上海证券综合指数的均值回归分析           | 郝亚飞 杨国孝         | (102) |
| 模糊综合评判法在部队卫生资源配置中的应用      | 陈 铭 李 茜         | (107) |
| 相同口径弹丸射击时弹带强度受力分析         | 陈 健 李 睿 赵 智     | (112) |

|                                  |                 |       |
|----------------------------------|-----------------|-------|
| 轮式自行突击炮与几种主战坦克多对多动态对抗条件下的效能分析与对策 | 成建华             | (114) |
| 舰载火箭炮系统生存能力的分析与计算                | 孔建国 李 敏 郭新宇     | (117) |
| 双标杆法的临界弧及其精度                     | 吴征宇             | (121) |
| 火炮设置精度与射击精度间关系分析                 | 张景新 郭承亮         | (124) |
| 小型军品配件库存决策支持系统的设计                | 董 建 苏 栩 舒 俊     | (129) |
| DEA 方法在供应商选择中的改进                 | 陈明超 吴祈宗         | (134) |
| 兰彻斯特方程在炮兵火力战中的运用                 | 杨 慧 温万泉 孙晶晶     | (138) |
| 基于梯度的 DEM 数据的 VIPs 提取模型          | 赵士勇 张 芹 饶 侃 赵海宁 | (142) |
| 基于改进模糊 AHP 法的炮兵群作战能力评估           | 马多胜 刘刚 闫鹏举 路玉军  | (146) |
| 评定多弹种复合火力射击效率的数学模型               | 郭振汉 刘占锋         | (150) |
| 模糊数学在炮兵射击目标排序中的应用                | 黄泉龙 冯 杰         | (154) |
| 炮兵优化射击手段问题研究                     | 郑乐安 杨伯忠 李泽山     | (158) |
| Heisenberg 群上一类次椭圆组弱解的部分正则性      | 刘海蓉             | (161) |

# 基于毁伤场理论的炮兵射击效率评定方法

杨伯忠 程贤进 高启航

(炮兵学院南京分院射击教研室 南京 211132)

**摘 要** 针对传统射击效率评判模型的 0-1 性和二维性评判结果误差较大的问题,本文运用场论的观点,建立了地面火炮毁伤场模型和射击效率评定的方法。计算表明:利用毁伤场理论对射击效率评定结果精度较高。

**关键词** 炮兵 射击 毁伤场理论 射击效率评定

## 引 言

平均毁伤幅员对传统射击理论的发展起了很大的作用,但是随着武器装备的发展,简单的二维的平均毁伤幅员及其以此为基础而建立的一连串的理论体系,在精确的计算机军事模拟中逐渐显示出其不足。随着计算机技术的发展,建立正确的数学模型,在三维空间中对射击效率进行计算和模拟已经成为可能。

## 1 毁伤场模型

在目标周围存在一个空间  $\Omega$ , 空间  $\Omega$  中每一点都对应一个确定的毁伤概率值, 根据场论的观点我们可以说在目标周围的空間中存在一个场  $\Omega$ , 称其为毁伤场。用数学语言准确地对毁伤场定义如下:

分布在毁伤场中每一点  $X$  处的毁伤概率  $\mu$  是点  $X$  的函数, 设  $\mu=\mu(X)$ , 当以目标中心为原点建立坐标系  $O_{xyz}$  后, 则有

$$X \in \Omega, \mu=\mu(x,y,z) \quad (1)$$

其中,  $\mu(x,y,z)$  称之为目标的毁伤概率函数。为了使毁伤场在任何情况下都具有实际意义我们规定如下假定:

$$\begin{aligned} \mu(x,y,z) \in \Psi(\Omega), \text{ 且} \\ \left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial z}\right)^2 \neq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

## 2 利用毁伤场对射击效率评定

### 2.1 利用毁伤场对单个目标射击效率评定的一般方法

设单炮决定诸元误差的距离中间误差为  $E_d$ , 方向中间误差为  $E_f$ , 高低中间误差为  $E_g$ , 以目标中心为原点建立坐标系  $O_{xyz}$ , 假设瞄准点与原点重合, 则诸元误差的概率密度函数为:

$$f(x_c, z_c, y_c) = \frac{\rho^3}{\pi^{1.5} E_d E_f E_g} e^{-\rho^2 \left( \frac{x_c^2}{E_d^2} + \frac{y_c^2}{E_f^2} + \frac{z_c^2}{E_g^2} \right)} \quad (3)$$

设单炮散布误差的距离公算偏差为  $B_d$ , 方向公算偏差为  $B_f$ , 高低公算偏差为  $B_g$ , 则散布误差的概率密度函数为:

$$\varphi_c(x, z, y) = \frac{\rho^3}{\pi^{1.5} B_d B_f B_g} e^{-\rho^2 \left( \frac{x^2}{B_d^2} + \frac{y^2}{B_f^2} + \frac{z^2}{B_g^2} \right)} \quad (4)$$

在诸元误差为  $(x_c, z_c, y_c)$  条件下, 散布误差的概率密度函数为:

$$\varphi(x, z, y) = \frac{\rho^3}{\pi^{1.5} B_d B_f B_g} e^{-\rho^2 \left( \frac{(x-x_c)^2}{B_d^2} + \frac{(y-y_c)^2}{B_f^2} + \frac{(z-z_c)^2}{B_g^2} \right)} \quad (5)$$

设目标的毁伤场为空间  $\Omega$ , 则任意 1 发炮弹落在毁伤场  $\Omega$  内的概率为:

$$P(x_c, z_c, y_c) = \iiint_{\Omega} \varphi(x, z, y) dx dy dz \quad (6)$$

则任意 1 发炮弹对目标的条件毁伤概率为:

$$R_1(x_c, z_c, y_c) = \iiint_{\Omega} \varphi(x, z, y) \mu(x, y, z) dx dy dz \quad (7)$$

从而  $N$  发能对目标产生毁伤效果的炮弹毁伤目标的条件概率为:

$$R_N(x_c, z_c, y_c) = 1 - [1/R_1(x_c, z_c, y_c)]^N \quad (8)$$

从而  $N$  发能对目标产生毁伤效果的炮弹毁伤目标的全概率为:

$$R_N = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_c, z_c, y_c) R_N(x_c, z_c, y_c) dx_c dy_c dz_c \quad (9)$$

若瞄准点与原点不重合, 设瞄准点坐标为  $M(x_0, z_0, y_0)$ , 则诸元误差  $(x_c, z_c, y_c)$  不变, 而散布中心  $C$  的坐标为  $(x_0 + x_c, z_0 + z_c, y_0 + y_c)$  利用坐标变换代入, 计算公式同上不变。

## 2.2 毁伤场对单个目标射击效率评定的数值积分法

数值积分法计算过程如下:

### (1) 划分小长方体

将毁伤场内诸元误差可能存在的区域划分为许多边长为  $H$  (以  $E_d, E_f, E_g$  为单位) 的小长方体, 并进行编号, 距离上以  $I$  编号, 方向上以  $J$  编号, 高低上以  $K$  编号, 则  $(I, J, K)$  小长方体对目标中心的距离, 方向, 高低偏差量  $(x_c, y_c, z_c)$  为:

$$\begin{cases} x_c = (I - 0.5) H E_d \\ z_c = (J - 0.5) H E_f \\ y_c = (K - 0.5) H E_g \end{cases} \quad (10)$$

### (2) 计算诸元误差落于 $(I, J, K)$ 小长方体内的概率

计算诸元误差落于  $(I, J, K)$  小长方体内的概率, 实际就是根据诸元误差的概率密度函数进行积分, 积分区域就是小长方体的体积  $D$ 。根据对称性原理得公式如下:

$$\begin{aligned} P(I, J, K) = & \frac{1}{8} \left\{ \Phi \left[ (I - 0.5) * H + \frac{H}{2} \right] - \Phi \left[ (I - 0.5) * H - \frac{H}{2} \right] \right\} \times \left\{ \Phi \left[ (J - 0.5) * H + \frac{H}{2} \right] - \Phi \left[ (J - 0.5) * H - \frac{H}{2} \right] \right\} \\ & \times \left\{ \Phi \left[ (K - 0.5) * H + \frac{H}{2} \right] - \Phi \left[ (K - 0.5) * H - \frac{H}{2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

### (3) 计算诸元误差落于 $(I, J, K)$ 小长方体内时的条件毁伤概率

在诸元误差为  $(x_c, y_c, z_c)$  条件下, 发射一发命中目标的条件概率为:



$$B(I,J,K)=\iiint_D \frac{\rho^3}{\pi^{1.5}B_dB_fB_g}e^{-\rho^2\left(\frac{(x-x_c)^2}{B_d^2}+\frac{(y-y_c)^2}{B_f^2}+\frac{(z-z_c)^2}{B_g^2}\right)}dx\,dy\,dz$$

(12)

发射  $N$  发炮弹毁伤目标的条件概率为:

$$R(I,J,K)=1-\left(1-\frac{1}{\omega}B(I,J,K)\right)^N$$

(13)

(4) 计算毁伤目标的全概率:

$$R_N=8\sum_{I=1}^{\infty}\sum_{J=1}^{\infty}\sum_{K=1}^{\infty}P(I,J,K)\times R(I,J,K)$$

(14)

3 算例与结果分析

采用前面建立的毁伤场数学模型,以 122 mm 榴弹炮为例进行计算分析。散布误差的距离中间误差  $B_d$  为 6m,散布误差的方向中间误差  $B_f$  为 8m,散布误差的高低中间误差  $B_g$  为 10m,诸元误差的距离中间误差  $E_d$  为 4m,诸元误差的方向中间误差  $E_f$  为 6m,诸元误差的高低中间误差  $E_g$  为 10m,目标高  $M_y$  为 6m,目标正面  $M_z$  为 8m,纵深  $M_x$  为 4m,榴弹杀伤半径  $r$  为 1.5m,有 1 发命中即毁伤目标,发射 6 发炮弹,试分别计算其毁伤概率。计算结果如表 1。

表 1 传统方法与毁伤场方法计算结果

| 发射弹数 | 毁伤概率  |       |
|------|-------|-------|
|      | 传统方法  | 毁伤场方法 |
| 1    | 0.377 | 0.708 |
| 2    | 0.611 | 0.810 |
| 3    | 0.758 | 0.870 |
| 4    | 0.849 | 0.923 |
| 5    | 0.906 | 0.978 |
| 6    | 0.941 | 0.999 |

而利用平均毁伤幅员计算时,发射 36 和 35 发炮弹的毁伤概率均为 0.99999,毁伤概率为 1.0 时,需发射 37 发炮弹。

由上面计算结果对比可以看出两者计算结果差别很大,一方面利用毁伤场计算结果比平均毁伤幅员计算结果明显偏大,另一方面利用毁伤场计算结果随发射弹数的增加变化比较平稳,而利用平均毁伤幅员计算结果开始时跳跃性较大,直至发射许多发后才趋向平稳。而在炮兵学院南京分院 2000 年实弹射击中对狼山采石场目标射击时,发射 6 发炮弹有 2 发命中,这与毁伤场计算结果更相符。

参 考 文 献

1 刘怡昕主编. 炮兵射击学. 北京: 海军出版社, 2000

2 程云门. 评定射击效率原理. 解放军出版社, 1996

3 刘怡昕, 杨伯忠著. 炮兵射击理论. 北京: 兵器工业出版社, 1997

# 一类军事竞争控制系统模型的数学分析

杨万利 彭金香

(装甲兵工程学院 北京 100072)

**摘 要** 本文用非线性分析的方法研究了一类军事竞争控制系统模型, 并对其进行了定性分析, 得其周期解的存在性。

**关键词** 平衡解 周期解  $k$  次平均值。

在武器装备综合论证研究中, 提出如下军事竞争控制系统模型

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy^n \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dx^k y \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $a, b, c, d$  均为正实数; 令  $D^+ = \{(x, y) | x > 0, y > 0, x, y \in R\}$ 。

则系统在  $D^+$  上有唯一平衡解:

$$(x_0, y_0) = \left( \sqrt[k]{\frac{c}{d}}, \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \right)$$

变形系统 (1) 可得:

$$\frac{a - by^n}{y} dy = \frac{dx^k - c}{x} dx$$

积分得

$$\ln(x^c y^a) - \frac{b}{n} y^n - \frac{d}{k} x^k = \ln C \quad (2)$$

其中,  $C$  为任意正常数。对式 (2) 两端取对数又可得到

$$\frac{x^c}{\exp\left(\frac{dx^k}{k}\right)} \frac{y^a}{\exp\left(\frac{by^n}{n}\right)} = C \quad (3)$$

我们将有如下定理

**定理 1** 在  $D^+$  上, 方程 (3) 是封闭曲线, 从而是系统 (1) 的周期解。

**证明:** 令

$$f(x) = \frac{x^c}{\exp\left(\frac{dx^k}{k}\right)}, \quad g(y) = \frac{y^a}{\exp\left(\frac{by^n}{n}\right)}$$

则

$$\begin{cases} f(0)=0, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=0; & x>0, f(x)>0. \\ g(0)=0, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)=0; & x>0, g(x)>0. \end{cases}$$

以及

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{cx^{c-1} - dx^{c+k-1}}{\exp\left(\frac{dx^k}{k}\right)} = \frac{x^{c-1}(c - dx^k)}{\exp\left(\frac{dx^k}{k}\right)} \\ g'(x) = \frac{ax^{a-1} - bx^{a+n-1}}{\exp\left(\frac{bx^n}{n}\right)} = \frac{x^{a-1}(a - bx^n)}{\exp\left(\frac{bx^n}{n}\right)} \end{cases}$$

从而

$$\begin{cases} \max_{x>0} f(x) = f\left(k\sqrt[k]{\frac{c}{d}}\right) \equiv M_f \\ \max_{x>0} g(x) = g\left(n\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right) \equiv M_g \end{cases}$$

(3) 表明:

$$\begin{cases} C > M_f M_g \text{ 时, (3) 在 } D^+ \text{ 中无解;} \\ C = M_f M_g \text{ 时, (3) 在 } D^+ \text{ 中有唯一解: } (x_0, y_0) = \left(k\sqrt[k]{\frac{c}{d}}, n\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right) \end{cases}$$

当  $C \in (0, M_f M_g)$  时, 引进参变量  $\lambda = C/M_g$ , 则方程

$$f(x) = \lambda$$

在  $\left(0, k\sqrt[k]{\frac{c}{d}}\right)$  与  $\left(k\sqrt[k]{\frac{c}{d}}, \infty\right)$  上各有一个解:

$$x_m \in \left(0, k\sqrt[k]{\frac{c}{d}}\right), \quad x_M \in \left(k\sqrt[k]{\frac{c}{d}}, \infty\right)$$

从而,  $x \in (0, x_m) \cup (x_M, \infty)$  时, 方程

$$\frac{y^a}{\exp\left(\frac{by^n}{n}\right)} = \left(\frac{\lambda}{x^c \exp\left(\frac{dx^k}{k}\right)}\right) M_g, \quad (4)$$

无解.  $x \in (x_m, x_M)$  时, (4) 恰有两个解:

$$y_1(x) \in \left(0, n\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right), \quad y_2(x) \in \left(n\sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \infty\right)$$

且满足

$$\lim_{x \rightarrow x_m} y_1(x) = n\sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \quad \lim_{x \rightarrow x_M} y_2(x) = n\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

由此, 在  $D^+$  上方程 (3) 所确定的曲线为封闭曲线, 也便是系统 (1) 的周期解.

另外, 系统 (1) 有两个特解:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{at} \\ y(t) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = y_0 e^{-at} \end{cases}$$

设  $x(t)$  是周期非负函数, 定义  $x(t)$  的  $k$  次平均值为:

$$\bar{x}_k = \left( \frac{1}{T} \int_0^T x^k(t) dt \right)^{\frac{1}{k}}$$

定理 2 设  $x(t)$ 、 $y(t)$  是方程组(1)的周期解, 则

$$(\bar{x}_k, \bar{y}_n) = \left( \sqrt[k]{\frac{c}{d}}, \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \right)$$

证明 对方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy^n \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dx^k y \end{cases}$$

中的第一个方程两端同除以  $x$ , 得  $\frac{1}{x(t)} dx(t) = (a - by^n(t)) dt$

两端同除以周期  $T$ , 并在区间  $[0, T]$  上积分得

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{dx(t)}{x(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T [a - by^n(t)] dt = \frac{1}{T} \int_0^T a dt - \frac{1}{T} \int_0^T by^n(t) dt = 0$$

由于

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{dx(t)}{x(t)} = \frac{1}{T} [\ln x(T) - \ln x(0)] = 0$$

因此,

$$\frac{1}{T} \int_0^T by^n(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T a dt = a$$

故

$$\frac{1}{T} \int_0^T y^n(t) dt = \frac{a}{b}$$

也即

$$\bar{y}_n = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

同理, 可得

$$\bar{x}_k = \sqrt[k]{\frac{c}{d}}$$

## 参 考 文 献

- 1 张锦炎, 冯贝叶. 常微分方程几何理论与分支问题. 北京: 北京大学出版社, 2003
- 2 张筑生. 微分动力系统原理. 北京: 科学出版社, 1997

# 分布式小卫星星间无线电测量几何精度分析

聂鹏程 易东云 谷德峰

(国防科技大学理学院 长沙 410073)

**摘 要** 以无线电星间自主测量方案为背景,分析了分布式小卫星星间相对运动对无线电测量性能的影响,重点考虑了星间相对运动特征和测量几何精度因子。根据具体的编队构形设计进行仿真,结果验证了分析的正确性。

**关键词** 分布式小卫星 测量性能 几何精度因子 精度分析

## 引 言

编队小卫星的空间状态测量是保证分布式小卫星编队正常运行和有效载荷正常工作的前提。传统的利用地面设备对卫星编队进行状态测量的方法,存在测量弧段较短和测量目标较多等难点。利用小卫星间的相对测量,实现相对状态自主确定是一种可行的方法。无线电测量作用距离远,测量覆盖率高,测量精度较高、实时性强,可满足小型化、低功耗、多卫星相对测量的要求,因此成为星间相对测量方案的一个很好的选择。

无线电相对状态测量是一种几何测量方法。针对不同的编队构形,分析小卫星编队星间相对运动对星间无线电测量性能的影响,是分布式小卫星星间无线电测量方案设计的前提。本文首先简要介绍了星间无线电相对测量方案和星间相对定位与定姿的解算原理;然后给出了星间相对运动特征的求解方法和星间状态测量几何精度因子的定义;最后针对“干涉钟摆”式编队构形,仿真给出了解算结果及其分析,证明了方法的正确性。

## 1 星间无线电测量方案及相对状态解算

### 1.1 星间无线电相对测量方案

分布式小卫星编队无线电相对状态测量方法通过在每个小卫星上安装无线电发射机和接收机,利用无线电距离测量手段,确定小卫星间的相对位置和相对姿态。本文以美国的 DS-3 编队星座<sup>[1]</sup>作为主要背景进行讨论。

DS-3 由 3 个航天器组成,它们保持一定的空间几何构形(典型的为等边三角形),形成空间阵列。由于天线具体的安装方式与卫星的结构和具体的任务有关,为了讨论上的方便,在此假设卫星为边长为 1m 的立方体,天线安装在立方体一个面上的 4 个角上。如图 1,阵列坐标系的定义为(本文中其余坐标系的定义参见文献[2]):以卫星 A 上的某参考点(如质心)为原点建立阵列坐标系,卫星 B 在 x 轴的正向上,卫星 C 在 x-y 平面上且 y 为正, z 轴由右手定则确定。卫星相对整个阵列的姿态定向由旋转角  $\varphi$ 、 $\psi$ 、 $\gamma$  描述,当 3 个旋转角均为 0 时,本体坐标系与阵列坐标系重合。

在每个观测时刻,卫星编队的阵列结构可以用 14 个参数描述:3 个描述卫星位置的坐标  $x_B$ 、 $x_C$ 、 $y_C$ ;

9 个描述卫星姿态的欧拉角  $\varphi_A$ 、 $\psi_A$ 、 $\gamma_A$ 、 $\varphi_B$ 、 $\psi_B$ 、 $\gamma_B$ 、 $\varphi_C$ 、 $\psi_C$  和  $\gamma_C$ ；2 个以等效距离表示的

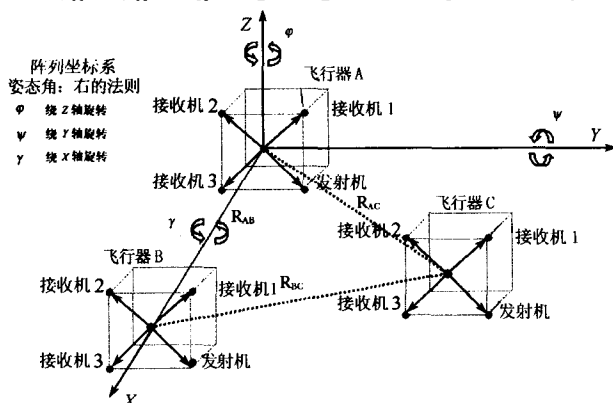


图 1 阵列坐标系的定义

钟差参数  $R_{TAB}$  和  $R_{TAC}$ 。在观测时刻  $t$ ，可以用向量  $X(t)$  来表示卫星阵列在  $t$  时刻的状态，即

$$X(t) = (x_B(t), x_C(t), y_C(t), \varphi_A(t), \psi_A(t), \gamma_A(t), \varphi_B(t), \psi_B(t), \gamma_B(t), \varphi_C(t), \psi_C(t), \gamma_C(t), R_{TAB}(t), R_{TAC}(t))。$$

## 1.2 星间相对定位与定姿方法

星间无线电相对测量的原理是通过距离的变化来敏感编队卫星间相对状态的变化，通过距离测量，建立距离与待估参数的联系，设计参数估计器，对卫星的相对位置和姿态进行估计。在 DS-3 的无线电测量方案中，有三种星间相对定位与定姿方法：(i) 利用单时刻伪距测量进行定位与定姿；(ii) 两时刻伪距测量与相位双差联合处理；(iii) 四时刻伪距测量与相位单差联合处理<sup>[1]</sup>。就本文所论的问题而言，虽然模型影响到星间相对位置和姿态的解算精度，但并不影响几何精度因子的定义，因此下文仅以原理较为简单的单时刻伪距测量模型为例说明问题，对于其他的测量模型可类似推出。

设  $t$  时刻的卫星阵列状态参数为  $X(t)$ ，此时的伪距观测量  $\tilde{R}_k(t)$  可以表示为待估参数  $X(t)$  的函数：

$$\tilde{R}_k(t) = r_k(X(t)) + u_k(t) \quad k=1,2,\dots,18 \quad (1)$$

其中  $u_k(t)$  为伪距观测噪声，假设  $u_k(t) \sim N(0, \sigma_R^2)$ 。

在观测时刻  $t$ ，有 18 个伪距观测量和 14 个待估参数，可采用最小二乘法进行实时解算。

## 2 无线电相对测量几何特征及精度分析

不同的分布式小卫星编队构形具有不同的星间相对运动特征，对无线电测量的影响也不同。本节首先讨论星间相对运动特征的求解方法，然后给出影响无线电测量的几何精度因子，从而对无线电站间测量性能进行定量描述。

### 2.1 星间相对运动特征的求解方法

设卫星质心轨道坐标系为  $OX_0Y_0Z_0$ ，卫星质心轨道坐标系在空间以  $\omega_0$ （轨道角速度矢量）旋转。设卫星体坐标系  $O_{xyz}$  与卫星固联。采用 STK 软件考虑地球  $J_2$  项摄动影响的情况下，产生三颗小卫星在 J2000.0 惯性坐标系下的轨道仿真数据，然后投影到阵列坐标系得到相对位置参数  $x_B$ 、 $x_C$ 、 $y_C$ 。假设分布式小编队小卫星采用对地定向的三轴稳定控制方案，在正常的理想状态下，体坐标系  $O_{xyz}$  与  $OX_0Y_0Z_0$  重合，此时卫星的姿态偏差为零。将卫星在质心轨道坐标系下的姿态，通过坐标系旋转，转换到卫星编队的阵列坐标系中，得到三颗卫星相对整个阵列的旋转角  $\varphi_A$ 、 $\psi_A$ 、 $\gamma_A$ 、 $\varphi_B$ 、 $\psi_B$ 、 $\gamma_B$ 、 $\varphi_C$ 、 $\psi_C$ 、 $\gamma_C$ 、

$\psi_C$  和  $\gamma_C$ 。

### 3.2 无线电相对测量几何精度因子定义

在单时刻伪距观测方程 (1) 式中,  $r_k(\cdot)$  为非线性函数, 用 Gauss-Newton 方法迭代求解, 将 18 个观测方程在概略位置点  $X^*(t)$  进行线性化展开, 可以得到:

$$Y = H \cdot \Delta X(t) + \varepsilon \quad (2)$$

其中向量

$$Y = (\tilde{R}_1(t) - r_1(X^*(t)), \dots, \tilde{R}_{18}(t) - r_{18}(X^*(t)))^T,$$

$$\Delta X(t) = (X(t) - X^*(t))^T, \quad \varepsilon = (u_1(t), \dots, u_{18}(t))^T,$$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial r_1(t)}{\partial x_1(t)} & \dots & \frac{\partial r_1(t)}{\partial x_{14}(t)} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial r_{18}(t)}{\partial x_1(t)} & \dots & \frac{\partial r_{18}(t)}{\partial x_{14}(t)} \end{pmatrix}_{X(t)=X^*(t)}$$

在观测时刻  $t$ , 共有 18 个伪距观测量和 14 个待估参数, 用最小二乘法进行实时解算得到

$$\Delta \hat{X}(t) = (H^T H)^{-1} H^T Y \quad (3)$$

其中  $\Delta \hat{X}(t)$  为  $\Delta X(t)$  的线性无偏估计, 估计协方差矩阵为

$$\text{COV}(\Delta \hat{X}(t)) = \sigma_R^2 (H^T H)^{-1} \quad (4)$$

估计的精度为

$$\sigma_{\Delta \hat{x}_i(t)} = \sigma_R \cdot \lambda_i \quad (5)$$

其中  $\lambda_i = \sqrt{h_{ii}}$ ,  $h_{ii}$  为  $(H^T H)^{-1}$  的对角线上元素。精度因子  $\lambda_i$  ( $i=1, \dots, 14$ ) 随时间变化, 分别与每个时刻的 14 个待估参数相对应。

记向量  $A = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{14})^T$ , 则称  $A$  为伪距测量方法的精度因子向量。可见  $\lambda_i$  是观测噪声到估计精度的误差传播系数, 决定观测噪声对估计精度的影响程度。 $\lambda_i$  越大, 对应的分量  $\Delta x_i(t)$  的估计方差  $\sigma_{\Delta \hat{x}_i(t)}^2$  就越大, 测量的几何精度就越差, 对测量就越不利。

同理, 与分析伪距测量的精度因子一样, 可以通过协方差来分析四时刻伪距测量与相位单差联合处理方法的精度因子变化情况。

## 3 仿真结果及分析

以一个典型的钟摆式编队构形设计<sup>[3]</sup>为例, 分析小卫星编队星间相对运动对无线电测量的影响。在钟摆式编队构形中, 虚拟参考卫星和伴随卫星均运行在圆轨道上, 各伴随卫星在绕飞平面内相对参考卫星作简谐运动。按照 3.1 节的求解方法, 得到下面星间相对运动特征。

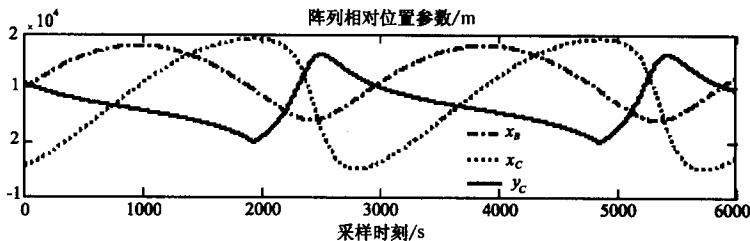


图 2 钟摆式编队阵列相对位置变化图

图 2 给出了钟摆式编队在阵列坐标系下的 3 个相对位置参数在一个周期内的变化情况。图 3 是伴随卫星 A 在阵列坐标系下的 3 个相对姿态参数在一个周期内的变化情况。其中异常区域位于三颗伴随卫星共线附近。由于阵列坐标系的定义要保证  $y_c \geq 0$ , 因此在三颗伴随卫星经过共线区域时, 阵列坐标系的  $y$  轴和  $z$  轴发生翻转。钟摆式编队在理想的三轴稳定状态下, 旋转角  $\varphi$ 、 $\psi$  基本不变, 只有  $\gamma$  缓慢变化。

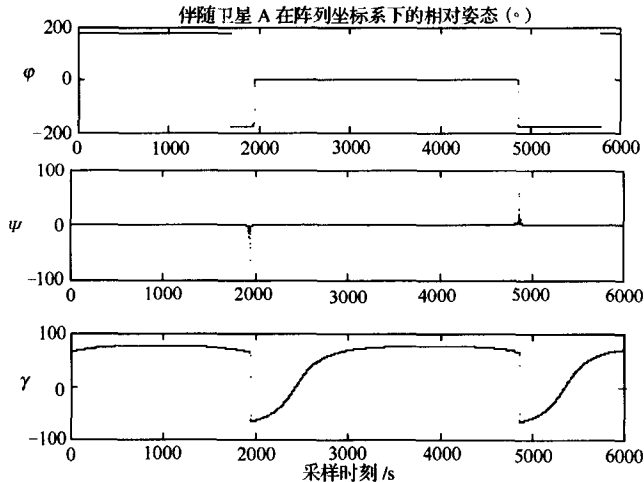


图 3 钟摆式编队阵列相对姿态变化图

下面仿真分析测量几何精度因子。仍以钟摆式编队构形为例, 仿真分析其  $\lambda$  随阵列结构变化情况。以状态参数  $x_{12}(t)$  对应的精度因子  $\lambda_{12}$  为例, 如图 4 所示。对应图 4, 在采样点 4 300~4 800s 之间, 状态参数  $x_{12}(t)$  解算精度随着其对应的精度因子  $\lambda_{12}$  的变化情况如图 5 所示。可以看出, 在对应的采样时刻, 精度因子恰好就反映了该状态参数的估计误差。

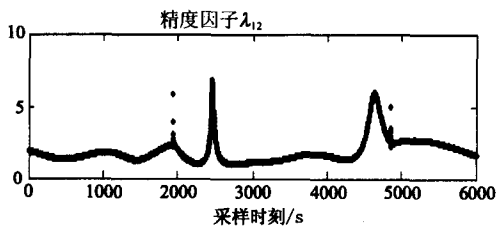


图 4 钟摆式编队阵列精度因子  $\lambda_{12}$  的变化图

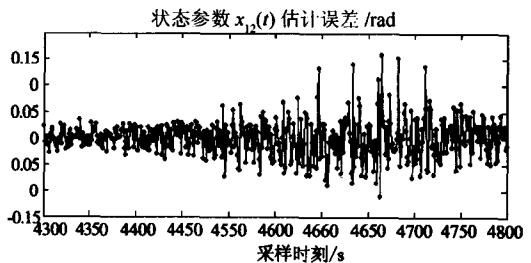


图 5 钟摆式编队状态参数  $x_{12}(t)$  估计误差变化图

通过对精度影响因子  $\lambda$  的各个分量的分析, 可以得到下面的结论: 精度因子向量  $\lambda$  与编队的阵列结构密切相关, 精度因子的不同分量受阵列结构的影响是不同的: 三颗伴随卫星共线附近, 此时编队阵列的平面结构受到破坏, 测量几何精度因子发生突变, 测量几何精度较差, 不宜进行测量; 其余大部分时间内, 精度因子的值在 1~6 之间变化。

## 4 结 论

不同编队构形具有不同的星间相对运动特征, 因此编队构形设计极大地影响了编队的空间状态测量方案及其精度。本文给出了星间相对运动特征的求解方法, 定义了反映相对状态解算精度的测量几何精度因子, 并根据具体的编队构形设计, 仿真分析了钟摆式编队的星间相对运动特征, 以及该构形下相对



运动对测量的影响。仿真结果表明, 测量几何精度因子可以较好地反映相对状态的估计误差。另外, 影响测量精度的因素很多, 比如就伪距和载波相位测量误差模型、测量信号覆盖等问题还可以进一步深入研究。

### 参 考 文 献

- 1 G. Purcell, etc., Autonomous Formation Flyer (AFF) Sensor Technology Development, TMO Progress Report 42 ~134, 1998
- 2 杨大明. 空间飞行器姿态控制系统. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2000
- 3 陈杰, 周荫清, 李春升. 分布式SAR小卫星编队轨道设计方法研究. 中国科学信息科学, 2004