王后雄学案

教材完全解读

总策划：熊 辉

修订版

高二数学（上）

丛书主编：王后雄
本册主编：马春华
万 钧

导航 丛书系列

中国青年出版社

王后雄学案

教材完全解读

高二数学（上）

主编：马春华　万　钧

编委：郑晓玲　章雄钢　周建国　左建华　吴海林　胡福民　秦　俭　程　林　马建华　丁仁贵　姚火生　郑祥贵　刘小燕　黄光文　张　莹　张新平　肖建章　王新佑

X导航丛书系列

中国青年出版社

(京)新登字 083 号

图书在版编目(CIP)数据

教材完全解读. 高二数学. 上：2006 年修订版/马春华主编. —4 版. —北京：
中国青年出版社，2006
ISBN 7－5006－5312－3

Ⅰ.教... Ⅱ.马... Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 021493 号

策　　划：熊　辉
责任编辑：李　扬
封面设计：小　河

教材完全解读
高二数学
2006 年修订版

中国青年出版社出版 发行
社址：北京东四 12 条 21 号　邮政编码：100708
网址：www. cyp. com. cn
编辑部电话：(010)64034328
北京中青人出版物发行有限公司电话：(010)64001911
聚鑫印刷有限责任公司印制　新华书店经销
889×1194　1/16　12.25 印张　334 千字
2003 年 7 月北京第 1 版　2006 年 5 月北京第 4 版　**2006年 6 月第 12 次印刷**
印数：**165001—171000 册**
定价：17.70 元

学考新捷径：《教材完全解读》

——— 中学教材诠解学生版

在现行的教育体制下，掌握教材是学习的根本。优秀的成绩源于对课堂知识的深入体会；源于对课本内容的理性认识；源于对平常知识的点滴累积。基于这种思想，X导航课研组于2003年7月隆重推出《教材完全解读》(上册)。至今已历经数次修订再版，该书以“透析全解、双栏对照、服务学生”为宗旨，助您走向成功。

为了让您更充分地理解本书的特点，请您在选购和使用本书时，先阅读本书的使用方法图示。

1 重难点解读

2 方法·技巧详解

3 综合·创新拓展

4 能力·题型训练

考点解读—“考试解题思维”、“答题要点”，考试解题、答题技巧尽在其中！

掌握考试题型变化趋势，体现实践、综合、创新能力。对考试能力题型设计进行了科学的探索和最新的预测。

名师诠释

讲例对照、双栏排版、双色凸现“解题思维”、“解题依据”和“答题要点”，有效地理清解题思路，提高解题效率。

点击考点

双色凸现测试要点，方便您查阅解题依据，与讲例相互印证。

当解题无措时，建议您参照提示，在“考点解读”栏中寻找解题依据和思路。

教材课后习题解答

详细解答课本课后习题——课后习题完全解密！

答案与提示

以高考“标准答案”为准，解题科学、精炼，帮您养成规范答题的良好习惯，使您在考试答题中避免不必要的失分。

最新5年高考名题诠解

汇集高考名题，讲解细致入微，教纲、考纲，双向例释；练习、考试，讲解透彻；多学、精练，效果显著。

谨此，预祝您在学习和考试中取得好成绩！

《X导航·教材完全解读》丛书主编 王后雄

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

读者反馈表

您只要如实填写以下几项并寄给我们，将有可能成为最幸运的读者，丰厚的礼品等着您拿，数量有限（每学期50名）一定要快呀！

您最希望得到的礼品 200元以下（请您自行填写）

A ____________ B ____________ C ____________

您的个人资料（请您务必填写详细，否则礼品无法送到您的手中）

姓名：	学校：	联系电话：
邮编：	通讯地址：	
职业：	教师 □ 学生 □	调研员 □

您所在学校现使用的教材版本

语文：	数学：	英语：
物理：	化学：	生物：
政治：	历史：	地理：

请在右栏列举3本您喜爱的教辅（参）	

您发现的本书错误：

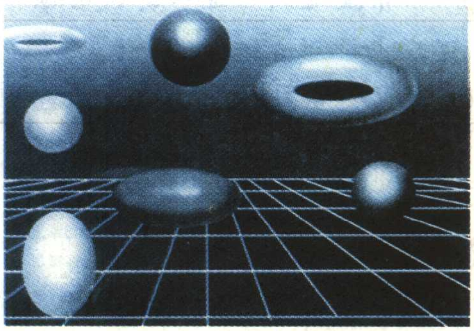
您对本书的意见或建议：

以下为地址，请剪下贴在信封上

信寄：湖北省武汉市江汉区长江日报路图书大世界湖滨路11号"X导航教育研发中心"收

邮编：430015

目录



知识与方法

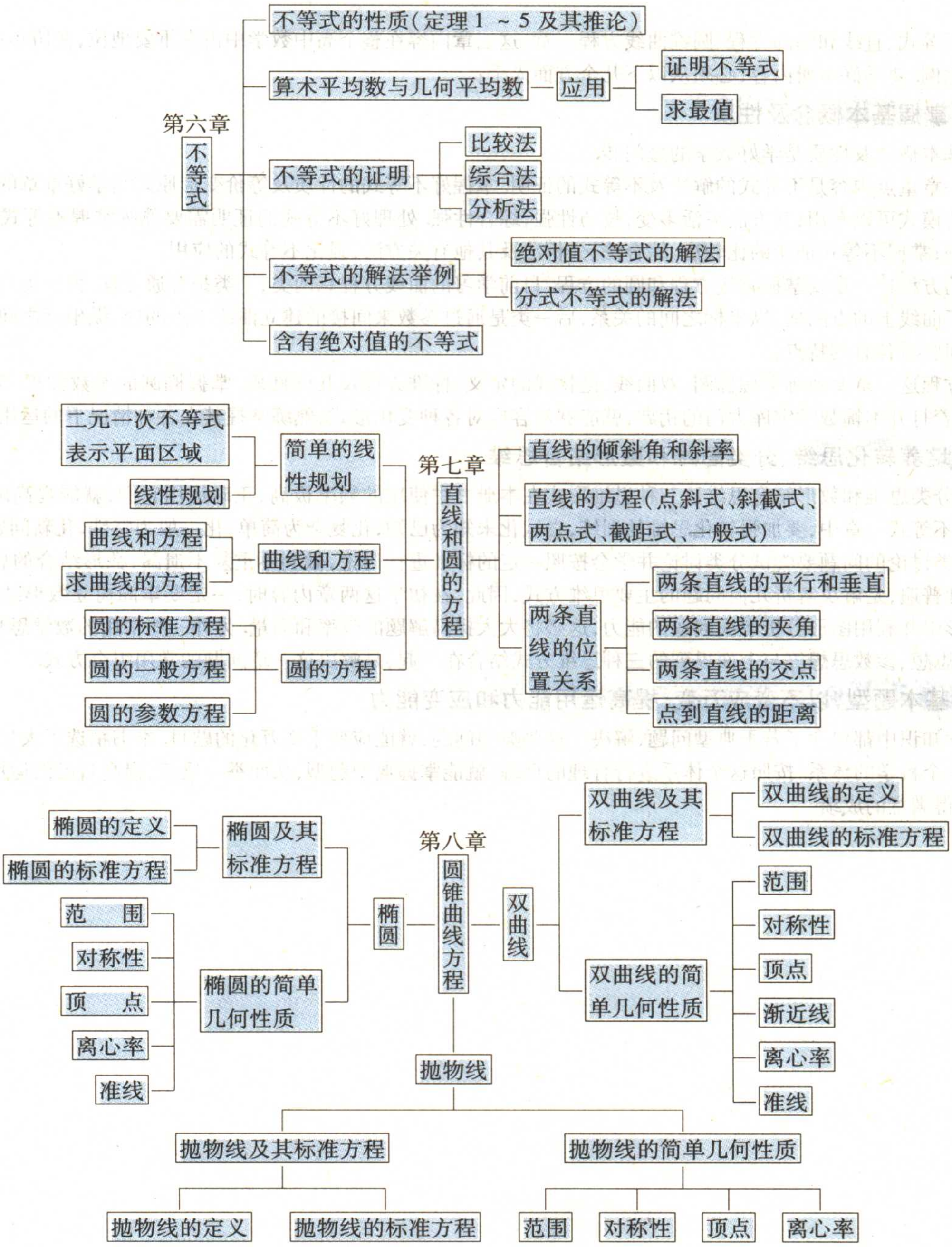
阅读索引

第六章 不等式

第七章 直线和圆的方程

第八章 圆锥曲线方程

高二数学(上)全书知识结构图解



高二数学学习指导

本书包括不等式、直线和圆的方程、圆锥曲线方程三章. 这三章内容在整个高中数学中占有重要地位，在历年数学高考试题中占有相当高的比例. 要学好本册内容，必须从以下几个方面入手：

一、熟练掌握基本概念及性质

掌握数学基本概念及性质是学好数学的敲门砖.

不等式这一章重点内容是不等式的解法及不等式的证明. 掌握好不等式的性质及等价变形原则是学好本章的关键. 不等式的证明没有固定的模式可以套用，其方法灵活多变，技巧性强，综合性强. 处理好不等式的证明需要熟练掌握不等式的基本性质、重要不等式及定理；掌握不等式证明的比较法、综合法、分析法及其他有关方法；强化不等式的应用.

直线和圆的方程这一章要掌握直线方程和圆的方程. 目前学习的曲线方程有两类，一类是普通方程，另一类是参数方程. 前一类是直接给出了曲线上的点的横、纵坐标之间的关系，后一类是通过参数来间接的建立曲线上点的横、纵坐标之间的关系. 两类方程在处理具体问题时各有其特点.

圆锥曲线方程这一章要熟练掌握椭圆、双曲线、抛物线的定义、标准方程及几何性质. 掌握椭圆的参数方程. 掌握这些最基本的东西，犹如拿着打开本幢数学宝库大门的钥匙，就能够从容应对各种变化形式，熟练掌握其在各种情况下的运用.

二、重点培养转化思维、分类思维和数形结合思维

转化思维、分类思维和数形结合思维这三种思维形式在本册书中使用的频率极高，正确运用它们，就能提高解题的速度与正确率. 在本书的不等式一章中，要加强转化思维的训练，尝试化未知为已知，化复杂为简单，化一般为特殊，化新问题为已解决的问题；遇到能够分类讨论的问题要尝试分类讨论并学会按照一定的标准进行讨论，做到不重复不遗漏；数形结合的思维在后两章内容中运用得非常普遍，是解决解析几何问题的主要思维方式，因此，在初学这两章内容时，一定要牢固树立数形结合思想，养成将问题转移到图形中并利用图形分析解决问题的能力，这必将大大提高解题的效率和质量. 另外一些常用的数学思想，如方程思想、函数思想、对称思想、参数思想等与上面提到的三种思维方式结合在一起，是解决这一章问题的常用组合方式.

三、掌握基本题型，以不变应万变，提高运用能力和应变能力

在每章数学知识中都包含了若干典型问题，解决了这些典型问题，就能应变千变万化的题目. 本书精选了大量典型题例，经过精心编排形成一个科学的体系. 按照这个体系进行合理的训练，就能掌握典型题型，从而举一反三，提高自己的运用能力和应变能力，最终能够取得满意的成绩.

第六章 不等式

6.1 不等式的性质

重难点解读

1. 不等式的有关概念

(1) 不等式的定义

用不等号（<，>，≤，≥，≠）表示不等关系的式子叫不等式. 如：$f(x)>g(x)$，$f(x)\leqslant g(x)$等等，用"<"或">"号连结的不等式叫做严格不等式；用"≤"或"≥"号连结的不等式，叫做非严格不等式.

(2) 不等式的分类

①按成立的条件分：如果不论用什么实数代替不等式中的字母它都能够成立，这样的不等式叫绝对不等式.

例如：$a^2+1>a$、$x+5>x+4$、$(a+1)^2>-1$等均为绝对不等式.

如果只有用某些范围内的实数代替不等式中的字母它才能够成立，这样的不等式叫条件不等式.

例如：$2x-1>1-x$、$x^2<x+1$等均为条件不等式.

如果用无论什么样的实数值代替不等式中的字母，不等式都不能成立，这样的不等式叫矛盾不等式.

例如：$|x-1|+|x+1|<1$、$a^2<-2$均为矛盾不等式.

绝对不等式、条件不等式与矛盾不等式相互之间没有包容性，即三者中任意二个都是互斥的.

②按不等号开口方向分：在两个不等式中，如果每一个的左边都大于右边，或每一个的左边都小于右边，这样的两个不等式叫同向不等式.

如果一个不等式的左边大于右边，而另一个不等式的左边小于右边，那么这两个不等式叫异向不等式.

例如：$2a+3>a+1$与$a^2-3>3a+1$是同向不等式.

$3a+2>a+4$与$3a^2-5<2a^2+4$是异向不等式.

2. 实数的运算性质与大小顺序间的关系

对于任意两个实数a，b，如果$a>b$，那么$a-b$是正数；如果$a<b$，那么$a-b$是负数；如果$a=b$，那么$a-b$等于0. 它们的逆命题也正确，这就是说：

名师诠释

◆［考题1］ 给出以下判断：

①不等式$x^2+1>1-x^2$是绝对不等式

②不等式$x^2-2x+1>0$是条件不等式

③不等式$|x|+1<\frac{1}{2}|x|$是矛盾不等式

④不等式$\frac{1}{3}x-\frac{1}{x}>1$与$\frac{2}{x}-x<2$是同向不等式

其中正确的为（　　）.

A. ①②　　B. ②③　　C. ③④　　D. ①④

（北大附中测试题）

［解析］ 对照绝对不等式、条件不等式、矛盾不等式及同向（异向）不等式的概念作出判定.

于是：(1) 由于当$x=0$时，不等式$x^2+1>1-x^2$不成立，故判断①不正确.

(2) 由于当$x=1$时，不等式$x^2-2x+1>0$不成立，而当$x\neq1$时，它却成立，故判断②正确.

(3) 由于$|x|+1<\frac{1}{2}|x|$恒不成立，故它是矛盾不等式，即判断③正确.

(4) ④中所说的两个不等式是同向不等式，故判断④不正确.

综上所述，应选择B.

［点评］ 在判断①与②时，如果不严格对照绝对不等式与条件不等式的定义，就会误认为①正确，而②不正确，避免误判的方法可参照下述评注.

①一个不等式为绝对不等式⇔它们的解集为$\mathbf{R}$；

②一个不等式为条件不等式⇔它们的解集为A满足$\varnothing\subsetneqq A\subsetneqq\mathbf{R}$；

③一个不等式为矛盾不等式⇔它们的解集为$\varnothing$.

以上三点可以判断一个不等式为何种不等式的依据和方法.

◆［考题2］ 现给出下列三个不等式：①$a^2+1>2a$；②$a^2+b^2>2\left(a-b-\frac{3}{2}\right)$；③$(a^2+b^2)(c^2+d^2)>(ac+bd)^2$.

其中恒成立的不等式共有（　　）.

A. 0个　　B. 1个　　C. 2个　　D. 3个

（黄冈中学测试题）

［解析］ 应先作差$A-B$，若暂时无法确定差的符号，应将差进行恒等变形，在变形过程中，常用的方法是因式分解和配方.

于是：对于①：$\because a^2-2a+1=(a-1)^2\geqslant0$，$\therefore$ 当$a=1$时，$a^2+1=2a$，$\therefore a^2+1>2a$不恒成立；

对于②：$\because (a^2+b^2)-2\left(a-b-\frac{3}{2}\right)=(a^2-2a+1)+(b^2+2b+1)+1$

$=(a-1)^2+(b+1)^2+1>0$，$\therefore (a^2+b^2)>2\left(a-b-\frac{3}{2}\right)$恒成立.

对于③：$\because (a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2=a^2d^2+b^2c^2-2abcd$，

$\therefore$ 当$ad=bc$时，$(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2=(ad-bc)^2=0$，

$\therefore (a^2+b^2)(c^2+d^2)>(ac+bd)^2$不恒成立.

$$\boxed{\begin{array}{l}a>b\Leftrightarrow a-b>0;\\ a=b\Leftrightarrow a-b=0;\\ a<b\Leftrightarrow a-b<0.\end{array}}$$

上面等价符号的左式反映的是实数的大小顺序，右式反映的则是实数的运算性质，合起来就成为实数的运算性质与大小顺序之间的关系. 它是不等式这一章的理论基础，是不等式性质的证明、证明不等式和解不等式的主要依据.

利用实数的运算性质与大小顺序间的关系，可以比较两个实数 a 与 b 的大小. 事实上，只需判断它们的差 $a-b$ 的符号.

3. 不等式的性质

(1) 不等式的性质

定理 1　对称性：$a>b\Leftrightarrow b<a$.

定理 2　传递性：$\left.\begin{array}{l}a>b\\ b>c\end{array}\right\}\Rightarrow a>c$.

定理 3　加法性质：$\left.\begin{array}{l}a>b\\ c\in\mathbf{R}\end{array}\right\}\Rightarrow a+c>b+c$.

推论　$\left.\begin{array}{l}a>b\\ c>d\end{array}\right\}\Rightarrow a+c>b+d$.

说明：①定理 3 是不等式移向法则的基础.

②定理 3 的推论是同向不等式相加法则的依据. 它还可以推广到任意有限个同向不等式的两边分别相加，所得不等式与原不等式同向.

定理 4　乘法性质：$\left.\begin{array}{l}a>b\\ c>0\end{array}\right\}\Rightarrow ac>bc$.

推论 1　$\left.\begin{array}{l}a>b>0\\ c>d>0\end{array}\right\}\Rightarrow ac>bd$.

推论 2　$\left.\begin{array}{l}a>b>0\\ n\in\mathbf{N}^*\end{array}\right\}\Rightarrow a^n>b^n$.

定理 5　开方性质：$\left.\begin{array}{l}a>b>0\\ n\in\mathbf{N}^*\end{array}\right\}\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

(2) 不等式的性质共有五个，其中性质 3、4、5 要注意符号，另外还有一些常用的结论，同学们也要掌握："$a>b$ 且 $ab>0$，则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$"，即"同号求倒，方向改变；异号求倒，方向不变"，"$a>b$，$c<d$，则 $a-c>b-d$"，"$a>b>0$，$c>d>0$，则 $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$"；在使用这些性质时，如果不满足条件，要注意符号的变换. 因此，性质的灵活应用，构成本节的难点.

(3) 不等式的基本性质中，对表达不等式性质的各不等式，要注意"箭头"是单向的还是双向的，也就是说每条性质是否具有可逆性. 运用不等式的基本性质解答不等式问题，要注意不等式成立的条件，否则将会出现一些错误.

如，性质"$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n>0(n\in\mathbf{Z},n>1)$"成立的条件是"$n$ 是大于 1 的整数，$a>b>0$"，假如

综上判断可知：应选择 B.

[点评]　(1) 在判断①、③是否恒成立时，如果忽视特殊情况，就会产生判断错误.

(2) 要判定一个不等式恒成立，需要证明，而要判定一个不等式不成立，举出一个反例即可.

(3) 若将①、③中的"$>$"改成"$\geqslant$"后，①、③均恒成立.

◈[考题 3]　分别判断下列各命题是否成立，并简述理由.

(1) $a>b\Rightarrow 2^{-x}\cdot a>2^{-x}\cdot b$；

(2) $a>b,c>d\Rightarrow a-c>b-d$；

(3) $a>b,c<d,cd\neq 0\Rightarrow\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$；

(4) $|a|>b>0\Rightarrow a^n>b^n(n\in\mathbf{N},n\geqslant 1)$.

（华师一附中训练题）

[解析]　以不等式的性质为起点，逐一验证每一个命题的真伪.

(1) 成立. 因为 $2^{-x}>0$，由性质知 $2^{-x}\cdot a>2^{-x}\cdot b$；

(2) 不成立. 令 $a=5,b=4,c=3,d=1$，有 $a-c<b-d$；

(3) 不成立. $a>b>0,c<0,d>0$ 时显然有 $\frac{a}{c}<\frac{b}{d}$；

(4) 不成立. $|a|>b>0\Rightarrow|a|^n>b^n$，但 $|a|^n$ 与 a^n 可能相等，也可能互为相反数.

◈[考题 4]　若 $a<b<0$，则下列不等式中不能成立的是(　　).

A. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　B. $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$

C. $|a|>|b|$　　D. $a^2>b^2$

（全国高考题）

[解析]　$\because a<b<0,\therefore ab>0,\therefore\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，故 A 正确.

$\because$　$a<b<0$，

$\therefore|a|>|b|$ 和 $a^2>b^2$ 两个不等式均成立.

又$\because$　$\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a}=\frac{b}{a(a-b)}$，$a<b<0$，

$\therefore a-b<0,\therefore\frac{b}{a(a-b)}<0$，即 $\frac{1}{a-b}<\frac{1}{a}$，故 B 不成立.

故选 B.

◈[考题 5]　已知三个不等式：①$ab>0$，②$\frac{c}{a}>\frac{d}{b}$，③$bc>ad$. 以其中两个作条件，余下一个作结论，则可组成______个正确命题.

（全国高考题）

[解析]　将命题②作等价变形：$\frac{c}{a}>\frac{d}{b}\Leftrightarrow\frac{bc-ad}{ab}>0$.

由 $ab>0,bc>ad$，可得②成立，即①③$\Rightarrow$②；

若　$ab>0,\frac{bc-ad}{ab}>0$，

则 $bc>ad$，故①②$\Rightarrow$③；

若　$bc>ad,\frac{bc-ad}{ab}>0$，

则 $ab>0$，故②③$\Rightarrow$①.

$\therefore$ 可组成 3 个正确命题.

◈[考题 6]　已知 a、b 为正实数，试比较 $\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}$ 与 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 的大小.

（天津南开中学测试题）

[解析]　解法一：直接作差：$\left(\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\right)-(\sqrt{a}+\sqrt{b})=\left(\frac{a}{\sqrt{b}}-\sqrt{b}\right)+\left(\frac{b}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)=\frac{a-b}{\sqrt{b}}+\frac{b-a}{\sqrt{a}}=\frac{(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{ab}}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{ab}}$.

去掉“$b>0$”这个条件，取 $a=3,b=-4,n=2$，那么就会出现“$3^2>(-4)^2$”即“$9>16$”的错误结论，类似的反例不胜枚举.

2 方法·技巧详解

4. 比较两数（式）大小的方法

（1）要比较两个实数的大小，只要将两个数进行作差，作差后应变形为：①常数；②常数与几个平方和的形式，常用配方法或实数特征 $a^2\geqslant0$ 判断差的符号；③几个因式积的形式，常用因式分解法.

（2）实数比较大小的依据是：

①$a-b>0\Leftrightarrow a>b$;

②$a-b=0\Leftrightarrow a=b$;

③$a-b<0\Leftrightarrow a<b$.

（3）两个实数比较大小，通常用作差法来进行，其一般步骤是：

第一步：作差；

第二步：变形，常采用配方、因式分解等恒等变形手段，将“差”化成“积”；

第三步：定号，就是确定是大于 0，还是等于 0，还是小于 0.

最后得出结论.

概括为“三步，一结论”，这里的“定号”是目的，“变形”是关键.

（4）如果两实数同号亦可采用作商法来比较大小，即作商后看是大于 1，等于 1，还是小于 1.

（5）如果直接比较两个代数式或数（均大于零）的大小，不如比较这两个数或式的平方容易，可变通改为比较两个平方的大小，平方的大小比较出来了，原来两个数或式的大小也就确定了.

5. 利用不等式的性质，探求不等式成立的条件或判断命题的真假

（1）不等式的性质是不等式的基础，包括五个性质定理及三个推论. 不等式的性质是解不等式和证明不等式的主要依据，只有正确地理解每条性质的条件和结论，注意条件的变化才能正确地加以运用. 利用不等式的性质，寻求命题成立的条件是不等式性质的灵活运用.

（2）对于假命题只需举一反例即可，当然亦可从条件入手推出与结论相反的判断.

（3）解决此类问题一定要在理解的基础上记准、记熟不等式的八条性质（五个定理三个推论）.

6. 利用不等式的性质证明不等式

利用不等式的性质及其推论可以证明一些不等式. 解决此类问题一定要在理解的基础上，记准、记熟不等式的八条性质并注意在解题中灵

$\because a、b$ 为正实数，

$\therefore \sqrt{a}+\sqrt{b}>0,\sqrt{ab}>0,(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2>0$,

$\therefore \dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{ab}}\geqslant0.$

当且仅当 $a=b$ 时等号成立，

$\therefore \dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$（当且仅当 $a=b$ 时取等号）.

解法二：平方作差： $\left(\dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}\right)^2=\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{a}+2\sqrt{ab}$,

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}.$

$$\therefore \left(\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}+2\sqrt{ab}-a-b-2\sqrt{ab}$$

$$=\frac{a^3+b^3-ab(a+b)}{ab}=\frac{(a+b)(a-b)^2}{ab}.$$

$\because a、b$ 为正实数，

$\therefore \dfrac{(a+b)(a-b)^2}{ab}\geqslant0$，于是 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}\right)^2\geqslant(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2.$

又 $\dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}>0,\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$,

$\therefore \dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$（当且仅当 $a=b$ 时取等号）.

解法三：作商比较：$\dfrac{\dfrac{b}{\sqrt{a}}+\dfrac{a}{\sqrt{b}}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{(\sqrt{b})^3+(\sqrt{a})^3}{\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a+b-\sqrt{ab})}{\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$

$=\dfrac{a+b-\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}=1+\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}}\geqslant1$，$a=b$ 时取等号.

$\because \dfrac{b}{\sqrt{a}}+\dfrac{a}{\sqrt{b}}>0,\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$,

$\therefore \dfrac{b}{\sqrt{a}}+\dfrac{a}{\sqrt{b}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$（当且仅当 $a=b$ 时取等号）.

◈［考题 7］ 判断下列各命题的真伪，并说明理由.

（1）若 $a<b,c<0$，则 $\dfrac{c}{a}<\dfrac{c}{b}$;

（2）若 $ac^{-3}>bc^{-3}$，则 $a>b$;

（3）若 $a>b$，且 $k\in\mathbf{N}^*$，则 $a^k>b^k$;

（4）若 $a>b,b>c$，则 $a-b>b-c$.

［解析］ （1）$\because a<b$，没有指出 $ab>0$，故 $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$ 不成立，

因此推不出 $\dfrac{c}{a}<\dfrac{c}{b}$，$\therefore$ 是假命题.

（2）当 $c<0$ 时，$c^{-3}<0$，有 $a<b$，$\therefore$ 是假命题.

（3）当 $a=1,b=-2,k=2$ 时，显然命题不成立，$\therefore$ 是假命题.

（4）取 $a=2,b=0,c=-3$ 满足 $a>b,b>c$ 条件，但是 $a-b=2<b-c=3$. $\therefore$ 是假命题.

◈［考题 8］ 比较 $1+\log_x3$ 与 $2\log_x2(x>0,x\neq1)$ 的大小.

［解析］ $(1+\log_x3)-2\log_x2=\log_x\dfrac{3x}{4}$.

当 $\begin{cases}0<x<1,\\0<\dfrac{3x}{4}<1\end{cases}\Rightarrow0<x<1$，或当 $\begin{cases}x>1,\\\dfrac{3x}{4}>1\end{cases}\Rightarrow x>\dfrac{4}{3}$ 时，

有 $\log_x\dfrac{3x}{4}>0$，即 $1+\log_x3>2\log_x2$;

活准确地加以应用.

7. 利用不等式的性质,求取值范围等问题

利用几个不等式的范围来确定某个不等式的范围是一类常见的综合问题,对于这类问题要注意:“同向(异向)不等式的两边可以相加(相减)”,这种转化不是等价变形,在一个解题过程中多次使用这种转化时,就有可能扩大真实的取值范围.解题时务必小心谨慎,先建立待求范围的整体与已知范围的整体的等量关系,最后通过“一次性不等关系的运算,求得待求的范围”,是避免犯错误的一条途径,如考题9易错解为:

$\because y=f(x)$ 过原点,$\therefore$ 可设 $f(x)=ax^2+bx$.

$\therefore f(-1)=a-b,f(1)=a+b.$

$\therefore \begin{cases}1\leqslant a-b\leqslant 2, & ①\\ 3\leqslant a+b\leqslant 4. & ②\end{cases}$

由 $\dfrac{①+②}{2}$ 知,$2\leqslant a\leqslant 3$,　③

由 $\dfrac{②+①\times(-1)}{2}$ 知 $\dfrac{1}{2}\leqslant b\leqslant \dfrac{3}{2}$,　④

又 $f(-2)=4a-2b$,

$\therefore 4\times 2-2\times\dfrac{3}{2}\leqslant f(-2)\leqslant 4\times 3-2\times\dfrac{1}{2}$,

$\therefore 5\leqslant f(-2)\leqslant 11$. 范围过大.

8. 反证法证明不等式

(1)反证法证明不等式的步骤:

反设——归谬——判断

(2)反证法证题的核心是导出矛盾,而矛盾出现的情况是:①与已知条件矛盾,②与客观事实矛盾,③与定理、法则相矛盾,④前后相互矛盾等,另外要注意语言叙述的严谨性.

综合·创新拓展

9. 不等式的性质与函数的联系

(1)不等式的许多性质具有“函数”背景,如“$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n(n\in \mathbf{N}^*)$”,其实就是函数 $y=x^n$ 在 $\mathbf{R}^+$ 上的单调性.反之,不等式也是研究函数性质的有力工具,比如函数单调性的定义就是通过不等式描述的.因此,高考中考查不等式的基本性质常与函数结合在一起进行.

如:若 $x>y>1,0<a<1$,下列各式中正确的一项是(　　).

A. $a^{-x}<a^{-y}$　　B. $(\sin a)^x>(\sin a)^y$

C. $\log_{\frac{1}{a}}x<\log_{\frac{1}{a}}y$　　D. $1+a^{x+y}>a^x+a^y$

解:这里需要考查指数函数 $y=a^x$ 在 $x>0$ 时的单调性,判断A不正确;指数函数 $y=(\sin a)^x$ 在 $0<\sin a<1$ 的单调性判断B不正确;对数函数 $y=\log_a x$,当 $a>1$ 的单调性判断C不正确,从而选D.由此可见将不等式的性质与函数的单调性结合起来,可以更好地解决问题.

当 $\begin{cases}0<x<1,\\ \dfrac{3}{4}x>1;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>1,\\ 0<\dfrac{3}{4}x<1\end{cases}\Rightarrow 1<x<\dfrac{4}{3}$ 时,

有 $\log_x\dfrac{3x}{4}<0$,即　$1+\log_x 3<2\log_x 2$;

当 $\dfrac{3}{4}x=1\Rightarrow x=\dfrac{3}{4}$ 时,有 $\log_x\dfrac{3}{4}x=0$,即 $1+\log_x 3=2\log_x 2$.

综上所述,当 $0<x<1$,或 $x>\dfrac{4}{3}$ 时,$1+\log_x 3>2\log_x 2$;

当 $1<x<\dfrac{4}{3}$ 时,$1+\log_x 3<2\log_x 2$;当 $x=\dfrac{4}{3}$ 时,$1+\log_x 3=2\log_x 2$.

◈ **[考题9]** 若已知二次函数 $y=f(x)$ 的图象过原点,且 $1\leqslant f(-1)\leqslant 2$,$3\leqslant f(1)\leqslant 4$. 求 $f(-2)$ 的范围.　(2000·上海)

[解析] 解法一:利用解方程的思想.

设 $f(x)=ax^2+bx$,

$\therefore \begin{cases}f(1)=a+b,\\ f(-1)=a-b.\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}a=\dfrac{1}{2}[f(1)+f(-1)],\\ b=\dfrac{1}{2}[f(1)-f(-1)].\end{cases}$

$\because f(-2)=4a-2b=3f(-1)+f(1)$,

且 $1\leqslant f(-1)\leqslant 2,3\leqslant f(1)\leqslant 4,\therefore 6\leqslant f(-2)\leqslant 10$.

解法二:待定系数法.

设 $m(a+b)+n(a-b)=f(-2)=4a-2b$,

$\therefore \begin{cases}m+n=4,\\ m-n=-2,\end{cases}\therefore \begin{cases}m=1,\\ n=3.\end{cases}$

$\therefore f(-2)=(a+b)+3(a-b)=f(1)+3f(-1)$.

$\because 1\leqslant f(-1)\leqslant 2,3\leqslant f(1)\leqslant 4,\therefore 6\leqslant f(-2)\leqslant 10$.

◈ **[考题10]** 求证:如果 $a>b>0$,那么 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}(n\in\mathbf{N}$,且 $n>1)$.

[解析] 假设 $\sqrt[n]{a}$ 不大于 $\sqrt[n]{b}$ 则有两种情况:$\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$ 或者 $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$,由推论2和定理1,当 $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$ 时,有 $a<b$;当 $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$ 时,有 $a=b$. 这些都与已知 $a>b>0$ 矛盾,所以 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

◈ **[考题11]** 若 a、b 是任意实数,且 $a>b$,则(　　).

A. $a^2>b^2$　　B. $\dfrac{b}{a}<1$

C. $\lg(a-b)>0$　　D. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^a<\left(\dfrac{1}{2}\right)^b$

(全国高考题)

[解析] $a>b$ 并不保证 a、b 均为正数,从而不能保证A、B成立. 又 $a>b\Rightarrow a-b>0$,但不能保证 $a-b>1$,从而不能保证C成立,显然只有D成立. 事实上,指数函数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 上是减函数,所以 $a>b\Leftrightarrow\left(\dfrac{1}{2}\right)^a<\left(\dfrac{1}{2}\right)^b$ 成立. 故选D.

◈ **[考题12]** 证明:$f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ 在定义域内是减函数.

(北京高考题)

[解析] 首先确定 $f(x)$ 的定义域,其次在证明过程中对 $f(x_2)-f(x_1)$ 的正负难以判断时,必须把定义域分成若干区间进行讨论.

$f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$. 任取 x_1、$x_2\in\mathbf{R}$,且 $x_1<x_2$,

$\therefore f(x_2)-f(x_1)=(\sqrt{x_2^2+1}-x_2)-(\sqrt{x_1^2+1}-x_1)$

$=(\sqrt{x_2^2+1}-\sqrt{x_1^2+1})+(x_1-x_2)$.

(1)当 $x_1<x_2\leqslant 0$ 时,$\because x_1-x_2<0$,且 $x_1^2>x_2^2$,

$\therefore$　$\sqrt{x_2^2+1}<\sqrt{x_1^2+1}$,

合起来使用，可以提高分析问题的能力和解决综合问题的能力.

(2)利用作商法比较多项式的大小就常转化为利用指数函数的单调性. 如 $y=a^x$，当 $a>1,x>0,y=a^x>1$；当 $0<a<1$ 时，$x<0$，则 $y=a^x>1$.

如：比较 a^ab^b 与 b^aa^b 的大小（$a>0,b>0$ 且 $a\neq b$）.

解：作商有 $\dfrac{a^ab^b}{b^aa^b}=\dfrac{a^{a-b}}{b^{a-b}}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b}$.

当 $a>b>0,\dfrac{a}{b}>1,a-b>0,\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b}>1$；

当 $0<a<b,0<\dfrac{a}{b}<1,a-b<0,\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b}>1$.

综上当 $a>0,b>0$ 且 $a\neq b$ 时，$a^ab^b>b^aa^b$.

10. 不等式性质的应用

不等式性质的应用非常广泛，它可以与其他章节知识综合命题，即在所谓知识交汇点处命题，这是现在高考命题的趋势. 解决此类问题，除要综合运用不等式性质外，还要注意其他相关章节知识的运用.

即 $\sqrt{x_2^2+1}-\sqrt{x_1^2+1}<0$.

因此 $f(x_2)-f(x_1)<0,f(x_2)<f(x_1)$.

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 内是减函数.

(2)当 $0<x_1<x_2$ 时，$\because x_1-x_2<0$，且 $x_1^2<x_2^2$，

$\therefore\ \sqrt{x_2^2+1}>\sqrt{x_1^2+1}$，

即 $\sqrt{x_2^2+1}-\sqrt{x_1^2+1}>0$.

又 $f(x_2)-f(x_1)=\dfrac{1}{\sqrt{x_2^2+1}+x_2}-\dfrac{1}{\sqrt{x_1^2+1}+x_1}<0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内是减函数.

由(1)、(2)知，$f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ 在定义域内是减函数.

◇ [考题13] 在等比数列 $\{a_n\}$ 和等差数列 $\{b_n\}$ 中，$a_1=b_1>0,a_3=b_3>0,a_1\neq a_3$，试比较 a_5 与 b_5 的大小.

（湖北八校联考题）

[解析] 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d，

$\because a_1=b_1>0,a_3=a_1q^2,b_3=b_1+2d$，

$\because a_3=b_3,\therefore a_1q^2=a_1+2d,\therefore 2d=a_1(q^2-1)$，

$\therefore a_1\neq a_3,\therefore q^2\neq 1$.

而 $b_5-a_5=(a_1+4d)-a_1q^4=a_1+2a_1(q^2-1)-a_1q^4$

$=-a_1q^4+2a_1q^2-a_1=-a_1(q^2-1)^2<0$，

$\therefore b_5<a_5$.

4 能力·题型训练

点击考点

测试1 不等式①$a^2+2>2a$，②$a^2+b^2\geq 2(a-b-1)$，③$a^2+b^2>ab$ 恒成立的个数是（ ）.

A. 0　B. 1　C. 2　D. 3

测试要点2、4

测试2 若 $x\neq 2$ 或 $y\neq -1$，$M=x^2+y^2-4x+2y$，$N=-5$，则 M 与 N 的大小关系是（ ）.

A. $M>N$　B. $M<N$

C. $M=N$　D. 不能确定

测试要点2、4

测试3 若 a、b 为实数，则 $a>b>0$ 是 $a^2>b^2$ 的（ ）.

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　D. 既不充分也不必要条件

测试要点9

测试4 已知 a、b、$c\in\mathbf{R}$，则下列命题成立的是（ ）.

A. $a>b\Rightarrow ac^2>bc^2$

B. $\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c}\Rightarrow a>b$

C. $a^3>b^3,ab>0\Rightarrow\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$

D. $a^2>b^2,ab>0\Rightarrow\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$

测试要点3、5

测试5 若角 α、β 满足 $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha\leq\beta\leq\dfrac{\pi}{2}$，则 $\alpha-\beta$ 的取值范围是（ ）.

A. $-\pi\leq\alpha-\beta<0$　B. $-\pi<\alpha-\beta\leq 0$

C. $-\pi<\alpha-\beta<\pi$　D. $-\pi\leq\alpha-\beta\leq\pi$

上海春招

测试要点8

测试6 若 $d>0,d\neq 1,m,n\in\mathbf{N}^*$，则 $1+d^{m+n}$ 与 d^m+d^n 的大小关系是（ ）.

A. $1+d^{m+n}>d^m+d^n$　B. $1+d^{m+n}<d^m+d^n$

C. $1+d^{m+n}\geq d^m+d^n$　D. 不能确定

测试要点3、6

测试7 已知 $0<m<n<1$，下列不等式恒成立的是（ ）.

A. $\log_m n>1$　B. $\log_m n<0$

C. $0<\log_m n<1$　D. $\log_m n<-1$

测试要点4、9

测试8 正数 a、b、c、d 满足 $a+d=b+c$，$|a-d|<|b-c|$，则（ ）.

A. $ad=bc$　B. $ad<bc$

C. $ad>bc$　D. ad 与 bc 的大小不定

测试9 $a>0$ 且 $a\neq 1$，$0<x<1$，下列正确的是（ ）.

A. $|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$

B. $|\log_a(1-x)|<|\log_a(1+x)|$

C. $|\log_a(1-x)|=|\log_a(1+x)|$

D. 当 $0<a<1$ 时，选项A中前者较大；$a>1$ 时，后者较大

测试要点7

测试要点9

测试10 当 $0<a<b<1$ 时，下列不等式中正确的是（ ）.

A. $(1-a)^{\frac{1}{b}}>(1-a)^b$　B. $(1+a)^a>(1+b)^b$

C. $(1-a)^b>(1-a)^{\frac{b}{2}}$　D. $(1-a)^a>(1-b)^b$