高一新生必读

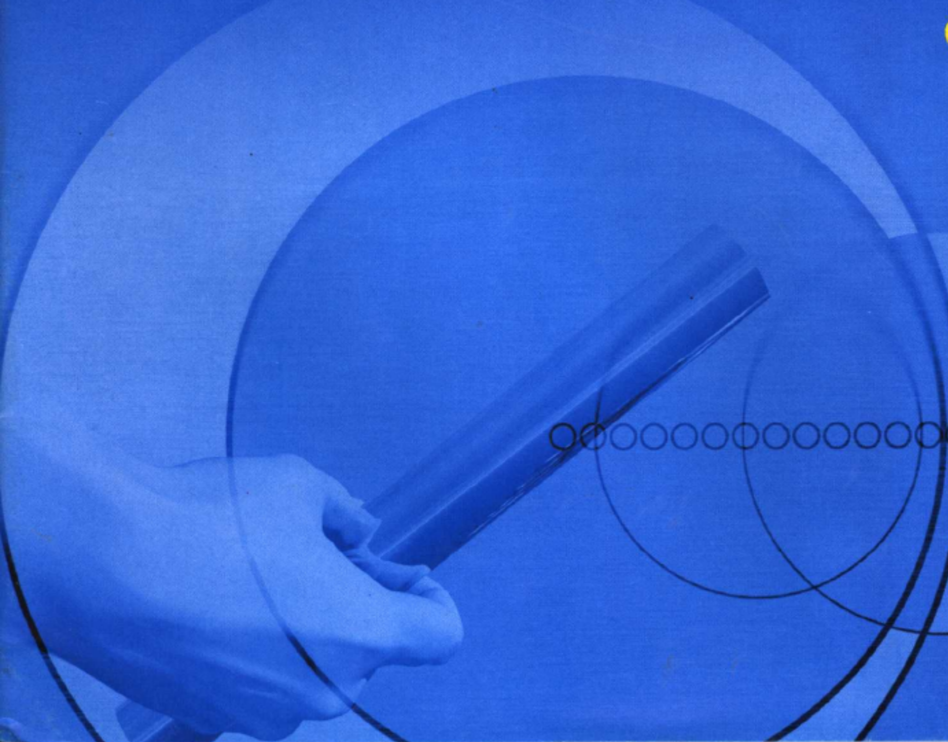
CHUGAOZHONG XIANJIEDAOYIN

初高中衔接导引

数学

《初高中衔接导引》编写组 编

- 衔接教材内容
- 提示规律方法
- 跨越知识台阶
- 赢在起跑线上



浙江人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

初高中衔接导引. 数学 /《初高中衔接导引》编写组编. —杭州:浙江人民出版社,2006.7
ISBN 7-213-03309-3

Ⅰ.初… Ⅱ.初… Ⅲ.数学课—初中—升学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 065487 号

初高中衔接导引·数学

《初高中衔接导引》编写组 编

出版发行 浙江人民出版社
(杭州体育场路 347 号)
责任编辑 赵一明
责任校对 张振华
封面设计 大米原创工作室
激光照排 杭州富春电子印务有限公司
印　　刷 浙江双溪印业有限公司
(金华上浮桥荷塘路 1 号)
开　　本 787×1092 毫米 1/16
印　　张 4.5
字　　数 10.4 万
印　　数 1-10000
版　　次 2006 年 7 月第 1 版
2006 年 7 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 7-213-03309-3
总 定 价 20.00 元(共 5 册)

目录

第一讲 绝对值 /1
第二讲 因式分解 /4
第三讲 分式、根式运算 /8
第四讲 方程与方程组 /12
第五讲 字母系数的方程与方程组 /16
第六讲 一元二次方程 /20
第七讲 函数的图象与性质 /25
第八讲 二次函数 /31
第九讲 三角形、梯形的中位线 /38
第十讲 比例线段及其应用 /43
第十一讲 点的轨迹 /47
第十二讲 圆中的有关证明 /51
第十三讲 相似形的有关证明 /57
第十四讲 常用的数学方法 /64
第十五讲 常用的数学思想 /68

CONTENTS

第一讲 绝对值

学习目标

绝对值在初中数学中有着重要地位，它贯穿于整个初中阶段代数、几何中，学好绝对值能为顺利解决高中阶段学习解绝对值不等式和复数模打下坚实的基础.

1. 绝对值的意义：正数的绝对值是它本身，负数的绝对值是它的相反数，零的绝对值是零.

2. 绝对值的几何意义：数 x 的绝对值，就是这个数 x 在数轴上所表示的点到原点的距离，我们把它记作 $|x|$，更一般地说，$|x-a|$ 即表示在数轴上的点 x 到点 a 的距离.

3. 解有关绝对值的问题，一般先根据绝对值的意义去掉绝对值符号，如果不能确定绝对值里面的数或式的符号，就要分类讨论. 还可以借助数轴来“帮忙”，利用绝对值的几何意义使一些看似很难的问题变得简单，且解法简捷、明快.

范例精析

例 1 已知 $|a-3|+|a+2b+5|=0$，求 $a+b$ 的值.

解 $\because$ $|a-3|$ 与 $|a+2b+5|$ 都是非负数，且它们的和为零，

$\therefore$ $a-3=0$ 且 $a+2b+5=0$， $\therefore$ $a=3, b=-4$， $\therefore$ $a+b=3-4=-1$.

反思 如果几个数的绝对值的和等于 0，则其中每个数的绝对值都等于 0，这是非负数的一个重要性质. 解题中应充分利用好绝对值的非负性.

例 2 解方程 $x^2-6x-9|x-3|+29=0$.

解 (1) 当 $x\geqslant 3$ 时，原方程可化简为 $x^2-6x-9(x-3)+29=0$，

整理得 $x^2-15x+56=0$，即 $(x-7)(x-8)=0$.

解得 $x_1=7, x_2=8$，满足 $x\geqslant 3$ 的前提条件；

(2) 当 $x<3$ 时，原方程可化简为 $x^2-6x+9(x-3)+29=0$，

整理得 $x^2+3x+2=0$，即 $(x+1)(x+2)=0$，

解得 $x_3=-1, x_4=-2$，满足 $x<3$ 的前提条件.

$\therefore$ $x_1=7, x_2=8, x_3=-1, x_4=-2$.

反思 按常规，应按 $x\geqslant 3$ 与 $x<3$ 分类讨论，但若把 $|x-3|$ 看成一个整体，则可避免分类讨论，请读者给出这一解法.

例 3 若 x 满足条件 $|x-2|+|x-3|=1$，求 x 的值或 x 的范围.

解 $\because$ $|x-2|$ 即表示数 x 在数轴上所表示的点到点 2 的距离，$|x-3|$ 即表示数 x 在数轴上所表示的点到点 3 的距离，所以本题的条件为数轴上数 x 所表示的点到点 2 和到点 3 的距离之和为 1，从数轴上看(如图)，显然 x 表示的点可能是点 2 和点 3 之间的任意

(例 3)

一点(含点 2 和点 3),

即 $2\leqslant x\leqslant 3$.

反思 此题一般是按分段讨论求解,但也可利用数形结合法求解,如注意到 $(x-2)-(x-3)=1$,再利用性质"若 $|a|+|b|=|a-b|$,则 a 与 b 异号"即可,请读者给出这一解法.

例 4 求 a 的取值范围,使方程 $||x-2|-1|=a$ 恰有三个整数解.

分析 去绝对值符号,求出 x 值再讨论.

解 当 $a=0$ 时,$|x-2|-1=0$,$|x-2|=1$,$x-2=\pm 1$,

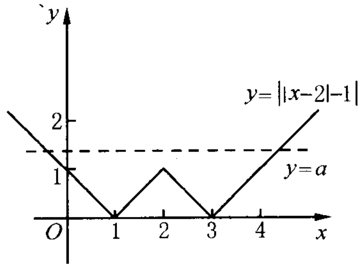
$\therefore$ $x=3$ 或 $x=1$;

当 $a>0$ 时,$|x-2|-1=\pm a$,$|x-2|=1\pm a$,

由 $|x-2|=1+a$,得 $x=3+a$ 或 $x=1-a$,

由 $|x-2|=1-a$,根据题意,必有 $a=1$,这时 $x=2$,

故 $a=1$ 时,方程恰有三个整数解 $x=0,2,4$.



(例 4)

另解 作 $y=||x-2|-1|$ 的图象,如图所示,由于方程 $||x-2|-1|=a$ 解的个数就是直线 $y=a$ 与 $y=||x-2|-1|$ 的图象的交点个数,把直线 $y=a$ 平行于 x 轴上、下移动,通过观察得仅当 $a=1$ 时方程有三个整数解.

同时,我们还可以得到以下几个结论:

(1) 当 $a<0$ 时,方程没有解;

(2) 当 $a=0$ 或 $a>1$ 时,方程有两个解;

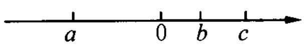
(3) 当 $0<a<1$ 时,方程有 4 个解.

自我检测

1. 计算 $\left|\frac{131}{111}-\frac{131}{99}\right|+\left|\frac{131}{111}-\frac{32}{99}\right|=$________.

2. (1) 已知 $a\neq 0$,那么 $\frac{a}{|a|}=$________;

(2) 已知 $ab\neq 0$,那么 $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}=$________.



(第 3 题)

3. 表示 a,b,c 的点在数轴上的位置如图所示,化简 $|b-c|+|b-a|-|a|=$________.

4. 如果 $|a-4|+a-4=0$,那么 a 的取值范围是________________.

5. 若实数 x 满足条件 $|1-x|=|x|+1$,那么 $\sqrt{(x-1)^2}$ 等于( )

A. 1　　B. $-(x+1)$　　C. $x-1$　　D. $1-x$

6. 满足 $|2a+7|+|2a-1|=8$ 的整数 a 的值有( )

A. 5 个　　B. 4 个　　C. 3 个　　D. 2 个

7. 设 x 是实数,且 $y=|x-1|+|x+1|$,下面四个结论中正确的是( )

A. 没有最小值　　B. 只有一个 x 使 y 有最小值

C. 有不止一个 x 使 y 取得最小值　　D. 有无数多个 x 使 y 取得最小值

8. 方程 $|xy|+|x-y+1|=0$ 的图象是(　　)

A. 三条直线：$x=0,y=0,x-y+1=0$

B. 两条直线：$x=0,x-y+1=0$

C. 一个点和一条直线：$(0,0),x-y+1=0$

D. 两个点：$(0,1),(-1,0)$

9. 已知 $|ab-2|+|b-1|=0$，求代数式 $\frac{1}{ab}+\frac{1}{(a+1)(b+1)}+\frac{1}{(a+2)(b+2)}+\cdots+\frac{1}{(a+2\ 006)(b+2\ 006)}$ 的值.

10. 解方程：

(1) $|x-|2x+1||=3$；

(2) $|x^2+4x-5|=6-2x$；

(3) $|2x-1|+|x-2|=|x+1|$.

11. 求方程 $|x-2|+|x-3|=1$ 的实数根的个数.

12. 求 $|3-x|+|x-1|$ 的最小值.

13. 求满足不等式 $|x+1|+|x-2|>3$ 的 x 的范围.

14. 求 a 的取值范围，使方程 $|x|=ax+1$ 有一个负根，而且没有正根.

第二讲　因式分解

学习目标

一、因式分解的意义

把一个多项式化成几个整式的积的形式，叫把这个多项式因式分解，也叫把这个多项式分解因式，因式分解的各种方法都要遵从这一要旨.

二、因式分解的基本方法

1. 提公因式法.形如 $ma+mb+mc=m(a+b+c)$

2. 运用公式法：

平方差公式：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

完全平方公式：$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$

立方和差公式：$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$

p、q 公式(简称)：$x^2+(p+q)x+pq=(x+p)(x+q)$

求根法：$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq 0)$

3. 分组分解法.

分组分解法的情况：

(1) 分组后能直接提公因式；(2) 分组后能直接运用公式(包括上面几个公式).

4. 配方法.

5. 拆项、添项法.

范例精析

例 1　分解因式：

(1) $2(x-y)^2-2(x-y)^3$；　(2) $2x^2+3x-1$；　(3) $2x^3y+2x^2y^2-12xy^3$.

分析　(1) ①因式分解时，无论有几项，首先考虑提取公因式.提公因式时，不仅注意数，也要注意字母，字母可能是单项式也可能是多项式，一次提尽.②当某项完全提出后，该项应为“1”.③注意 $(a-b)^{2n}=(b-a)^{2n}$，$(a-b)^{2n+1}=-(b-a)^{2n+1}$.④分解结果要求(ⅰ) 不带中括号；(ⅱ) 数字因数在前，字母因数在后，单项式在前，多项式在后；(ⅲ) 相同因式写成幂的形式；(ⅳ) 分解结果应在指定范围内不能再分解为止；若无指定范围，一般在有理数范围内分解.

(2) 可应用公式 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq 0)$.

(3) 对于二次三项齐次式，将其中一个字母看作“未知数”，另一个字母视为“常数”.首先考虑提公因式后，如余下因式的项数为 3 项，可考虑完全平方式或十字相乘法继续分解；如果项数为 2，可考虑平方差、立方差、立方和公式.

答案　(1) $2(x-y)^2(1-x+y)$；(2) $2\left(x-\dfrac{-3+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x-\dfrac{-3-\sqrt{17}}{4}\right)$；

(3) $2xy(x+3y)(x-2y)$.

例 2 分解因式：

(1) $4x^2-4xy+y^2-z^2$；

(2) $a^3-a+2b-2a^2b$；

(3) $x^2-2xy+y^2+2x-2y-3$.

分析 对于四项或四项以上的多项式的因式分解，一般采用分组分解法，四项式一般采用“二、二”或“三、一”分组，五项式一般采用“三、二”分组，分组后再试用提公因式法、公式法或十字相乘法继续分解.

答案 (1) $(2x-y+z)(2x-y-z)$(三、一分组后再用平方差)；

(2) $(a-2b)(a+1)(a-1)$(二、二分组后再提取公因式)；

(3) $(x-y+3)(x-y-1)$(三、二、一分组后再用十字相乘法).

例 3 分解因式：m^3-4m+3.

分析 本题缺 m^2 项，我们可以把它看作 $0\times m^2$，把它拆作 m^2 和 $-m^2$，这样 $m^3-4m+3=m^3-m^2+m^2-4m+3$，再分组求解. 我们又可以直接把 $-4m$ 拆为 $-m$ 和 $-3m$，或把 3 拆成 4 和 -1，然后分组分解.

解 m^3-4m+3

$=m^3-m^2+m^2-4m+3$

$=(m^3-m^2)+(m^2-4m+3)$

$=m^2(m-1)+(m-1)(m-3)$

$=(m-1)(m^2+m-3)$.

反思 拆项分组分解法的灵活性较大，解法往往不唯一，分解时要根据题目的具体特点，选择简捷的分解方法.

例 4 已知关于 x 的二次项式 ax^2-2x+3 可以分解出一个因式 $x+3$，试求二次项系数 a 的值及另一个因式.

分析 一个二次三项式如果能分解因式，那么它必有两个一次因式，已知其中的一个因式为 $x+3$，则另一个因式的一次项系数必为 a，又知二次三项式的常数项是 3，而一次因式 $x+3$ 的常数项也是 3，所以另一个因式的常数项必为 1，因此可设另一个因式为 $ax+1$. 根据已知条件，有等式：$ax^2-2x+3=(x+3)(ax+1)$，利用这个恒等式的左右两式的对应项系数相等，可求出 a 的值.

解 设 $ax^2-2x+3=(x+3)(ax+1)$，则 $ax^2-2x+3=ax^2+(3a+1)x+3$，

$\therefore\ 3a+1=-2,\quad \therefore\ a=-1.\quad \therefore$ 另一个因式为 $ax+1=-x+1=1-x$.

反思 在解题过程中，我们运用了一种叫“待定系数”的数学方法，即在一个含有未定系数的多项式恒等式中，根据多项式恒等原理，即两个多项式相等，则对应项的系数相等，从而可以确定未知的系数.

例 5 化简 $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{3-\sqrt{6}-\sqrt{10}+\sqrt{15}}$.

解 原式 $=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{3+\sqrt{15}-\sqrt{6}-\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{5})-\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{5})}$

$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{5})}=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

反思 应用因式分解能使一些化简变得简单.

例 6 已知 $2^{50}-4$ 能被 60～70 之间的两个数整除,求这两个数.

解
$$\begin{aligned}2^{50}-4&=4(2^{48}-1)=4(2^{24}+1)(2^{24}-1)\\&=4(2^{24}+1)(2^{12}+1)(2^{12}-1)\\&=4(2^{24}+1)(2^{12}+1)(2^{6}+1)(2^{6}-1)\\&=4\times65\times63\times(2^{24}+1)(2^{12}+1).\end{aligned}$$

故这两个整数是 65、63.

例 7 已知凸四边形 $ABCD$ 四条边的长依次是 a、b、c、d,且 $a^2+ab-ac-bc=0$,$b^2+bc-bd-cd=0$,则四边形 $ABCD$ 是什么形状?

解 $\because$ $a^2+ab-ac-bc=0$,$b^2+bc-bd-cd=0$,

$\therefore$ $a(a+b)-c(a+b)=0$,即$(a+b)(a-c)=0$,

$b(b+c)-d(b+c)=0$,即$(b+c)(b-d)=0$.

$\because$ a、b、c、d 为四边形 $ABCD$ 的四条边,

$\therefore$ $a+b\neq0$,$b+c\neq0$,则有 $a-c=0$ 及 $b-d=0$, $\therefore$ $a=c$,$b=d$.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

自我检测

一、填空题

1. 分解因式:

(1) $-x^2+2xy-y^2=$________________;

(2) $x^2-7xy-18=$________________;

(3) $(x+y)^2-10(x+y)+25=$________________.

2. 若 $a^2+a+1=0$,那么 $a^{2\,008}+a^{2\,007}+a^{2\,006}=$________.

3. 如果 $2^8+2^{10}+2^n$为完全平方数,则 $n=$________.

4. m,n 满足$|m-2|+\sqrt{n-4}=0$,分解因式$(x^2+y^2)-(mxy+n)=$________________.

5. 方程 $x^2-xy-5x+5y-1=0$ 的整数解是________________.

二、选择题

6. 把多项式 $ab-1+a-b$ 因式分解的结果是(　　)

A. $(a+1)(b+1)$　　B. $(a-1)(b-1)$

C. $(a+1)(b-1)$　　D. $(a-1)(b+1)$

7. 如果二次三项式 x^2+ax-1 可分解为$(x-2)(x+b)$,则 $a+b$ 的值为(　　)

A. -1　　B. 1　　C. -2　　D. 2

8. 若 $9x^2+mxy+16y^2$ 是一个完全平方式,那么 m 的值是(　　)

A. 24　　B. 12　　C. ±12　　D. ±24

9. 已知 $2^{48}-1$ 可以被在 60～70 之间的两个整数整除,则这两个数是(　　)

A. 61,63　　B. 61,65　　C. 61,67　　D. 63,65

三、解答题

10. 因式分解：

(1) $6x^{n+1}-14x^{n}+8x^{n-1}$；　　(2) $(x^2+3x)^2-2(x^2+3x)-8$；

(3) $a^2+b^2-2ab-2b+2a+1$；　　(4) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$；

(5) $(1-a^2)(1-b^2)-4ab$；　　(6) x^3-7x+6.

11. 已知 $x^2-6x+8y+y^2+25=0$，求 $\sqrt{2x-3y}$ 的值.

12. 观察下列等式：

$1^3=1^2$，

$1^3+2^3=3^2$，

$1^3+2^3+3^3=6^2$，

$1^3+2^3+3^3+4^3=10^2$，…

想一想，等式左边各项幂的底数与右边幂的底数有何关系？猜一猜可引出什么规律？用等式将其规律表示出来：____________.

13. 已知 a、b、c 是△ABC 的三边，且满足 $a^4+b^2c^2=b^4+a^2c^2$，试判断△ABC 的形状.

阅读下面解题过程：

解 由 $a^4+b^2c^2=b^4+a^2c^2$，得

$a^4-b^4=a^2c^2-b^2c^2$，　　①

$(a^2+b^2)(a^2-b^2)=c^2(a^2-b^2)$，　　②

即 $a^2+b^2=c^2$，　　③

∴ △ABC 为直角三角形.　　④

试问：以上解题过程是否正确：________. 若不正确，请指出错在哪一步？（填代号）________；错误原因是________________________；本题的结论应为________________.

14. 设 x,y,z 均为不超过 1 的非负实数，若 $k=x+y(1-x)+z(1-x)(1-y)$，求 k 的取值范围.

第三讲　分式、根式运算

学习目标

1. 了解分式的概念，能区别分式和整式；掌握分式的基本性质，会熟练利用分式的基本性质进行约分和通分；能熟练地进行分式的加、减、乘、除等运算.

2. 理解根式和最简根式的概念，掌握根式的性质，会利用根式的性质进行化简；能进行根式的加、减、乘、除等运算，特别是对根式里含字母的代数式的化简和运算.

3. 在运算过程中要注意数学思想方法的应用，如整体思想、分类讨论思想等在解题过程中的应用.

范例精析

例 1　若分式$\dfrac{x^2-9}{x^2-4x+3}$的值为零，则x的值为(　　)

A. 3　　　　B. 3或-3　　　　C. -3　　　　D. 0

分析　分式的值为零要满足两个条件：①分式要有意义；②分子的值为零.

解　由$x^2-9=0$且$x^2-4x+3\neq 0$可解得$x=-3$，应选C.

反思　在解答分式的值为零的相关问题中，常忽略“分母不为零”这一重要条件而出错. 一般地，式子$\dfrac{A}{B}$有意义$\Leftrightarrow$分母$B\neq 0$；式子$\dfrac{A}{B}$无意义$\Leftrightarrow$分母$B=0$；式子$\dfrac{A}{B}$的值为零$\Leftrightarrow$分子$A=0$且分母$B\neq 0$.

例 2　已知a,b为实数，且$ab=1$，设$M=\dfrac{a}{a+1}+\dfrac{b}{b+1}$，$N=\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}$，则$M,N$的大小关系是(　　)

A. $M>N$　　　　B. $M=N$　　　　C. $M<N$　　　　D. 不确定

分析　先把两个式子化简之后再进行比较.

解　$\because$　$ab=1$，

$\therefore$　$M=\dfrac{a(b+1)+b(a+1)}{(a+1)(b+1)}=\dfrac{2ab+a+b}{ab+a+b+1}=\dfrac{2+a+b}{a+b+2}=1$，

$N=\dfrac{b+1+a+1}{(a+1)(b+1)}=\dfrac{2+a+b}{a+b+2}=1$，　$\therefore$　$M=N$. 应选B.

反思　要比较分式的值的大小，需先对分式化简，然后再用“作差与0比较”或“作商与1比较”或“取中间值进行比较”等方法比较出大小.

例 3　化简$\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{1-x^2}\right)\div\dfrac{3x}{x+1}$.

分析　按运算顺序先化简括号内的式子然后再进行运算.

解　原式$=\left[\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)(x-1)}\right]\cdot\dfrac{x+1}{3x}=\dfrac{x}{(x+1)(x-1)}\cdot\dfrac{x+1}{3x}=\dfrac{1}{3x-3}$.

反思　分式的混合运算首先要注意运算顺序，同时又要注意式子的整体结构特征，根据题目的结构特征来计算较方便；更多的时候需要将分子、分母进行因式分解，约分化简后再进行运算；另外对于式子中的符号处理也要引起注意.

例4　化简$\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.对此题有两位同学作如下解答：

甲：原式$=\dfrac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=\dfrac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$.

乙：原式$=\dfrac{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$.

这两位同学的解答正确吗？若不正确，请指出错误原因.

分析　甲同学的解答把原分式的分子和分母同乘以$(\sqrt{x}-\sqrt{y})$，表面看来是正确的，其实错误就在这里，若$\sqrt{x}-\sqrt{y}=0$呢？

解　甲同学的解答是不正确的，原因是$\sqrt{x}-\sqrt{y}$有可能为零；乙同学的解答是正确的.

反思　在根式的化简过程中，采用先因式分解然后约分的方式是一种重要的解题手段.对于比较复杂的式子的化简更要注意采用合理正确的方法.

例5　已知：$a=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$，$b=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$，求$ab^3+a^3b$的值.

分析　如果把a，b的值直接代入计算，因a^3，b^3的计算都较为繁琐，故应另辟蹊径.考虑到$\sqrt{3}+\sqrt{2}$与$\sqrt{3}-\sqrt{2}$互为有理化因子，可计算$a+b$，$a\cdot b$，然后将求值式子化为$a+b$与$a\cdot b$的形式.

解　$\because$　$a+b=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}=\sqrt{3}$，$a\cdot b=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{4}$，

$ab^3+a^3b=ab(b^2+a^2)=ab[(a+b)^2-2ab]$.

将$a+b$与$a\cdot b$的值代入，　$\therefore$　$\dfrac{1}{4}\left[(\sqrt{3})^2-2\cdot\dfrac{1}{4}\right]=\dfrac{1}{4}\left(3-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{5}{2}=\dfrac{5}{8}$.

反思　显然上面的解法非常简捷，在运算过程中我们必须注意寻求合理的运算途径，提高运算能力.

例6　化简$\sqrt{\dfrac{2}{a}}+\sqrt{\dfrac{a}{2}}+\sqrt{\dfrac{a^2+4}{2a}+2}+\sqrt{\dfrac{a^2+4}{2a}-2}$.

解　原式$=\dfrac{1}{a}\sqrt{2a}+\dfrac{1}{2}\sqrt{2a}+\sqrt{\dfrac{a^2+4a+4}{2a}}+\sqrt{\dfrac{a^2-4a+4}{2a}}$

$$=\frac{1}{a}\sqrt{2a}+\frac{1}{2}\sqrt{2a}+\frac{|a+2|}{2a}\sqrt{2a}+\frac{|a-2|}{2a}\sqrt{2a}.$$

$\because$　原题只保证$a>0$，因此要按$a\geqslant 2$时，及$0<a<2$时分类讨论.

当$a\geqslant 2$时，

$$\text{原式}=\frac{1}{a}\sqrt{2a}+\frac{1}{2}\sqrt{2a}+\frac{a+2}{2a}\sqrt{2a}+\frac{a-2}{2a}\sqrt{2a}$$

$$=\frac{(2+a+a+2+a-2)}{2a}\sqrt{2a}=\frac{3a+2}{2a}\sqrt{2a};$$

当 $0<a<2$ 时，

原式 $=\frac{1}{a}\sqrt{2a}+\frac{1}{2}\sqrt{2a}+\frac{a+2}{2a}\sqrt{2a}+\frac{2-a}{2a}\sqrt{2a}$

$=\frac{2+a+a+2+2-a}{2a}\sqrt{2a}=\frac{a+6}{2a}\sqrt{2a}$.

反思 在分式的化简过程中，要注意根式性质 $\sqrt{a^2}=|a|$ 的应用，谨防绝对值的遗漏.

自我检测

一、选择题

1. 把 $\sqrt{\frac{2}{27}}$ 化成最简二次根式，结果为（　　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{9}$　　C. $\frac{\sqrt{6}}{9}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{9}$

2. 下列各式中，正确的是（　　）

A. $(-\sqrt{7})^2=-7$　　B. $\sqrt{(-0.7)^2}=0.7$

C. $(-\sqrt{7})^2=7^2$　　D. $(\sqrt{-0.7})^2=0.7$

3. 要使分式 $\frac{x-1}{x^2-3x+2}$ 有意义，x 应满足的条件是（　　）

A. $x\neq1$ 或 $x\neq2$　　B. $x\neq1$　　C. $x\neq2$　　D. $x\neq1$ 且 $x\neq2$

4. 若分式 $\frac{3}{1-2x}$ 的值为正数，则 x 取值范围是（　　）

A. $x>0$　　B. $x=0$　　C. $x<\frac{1}{2}$　　D. x 为任意实数

5. 若分式 $\frac{|x|-2}{2x^2-5x+2}$ 的值等于零，则 x 的值是（　　）

A. ±2　　B. 2　　C. -2　　D. 不存在

6. 已知 $t<1$，化简 $1-t-\sqrt{t^2-2t+1}$，得（　　）

A. $2-2t$　　B. $2t$　　C. 2　　D. 0

二、填空题

7. 当 $x=$________时，分式 $\frac{2x^2+x-3}{2x+3}$ 的值为零.

8. 化简 $\left(x-\frac{1}{y}\right)\div\left(y-\frac{1}{x}\right)$ 的结果为________.

9. 若 $\frac{\sqrt{x-3}}{x-4}$ 有意义，则 x 的取值范围是________________.

10. 若 $x>3$，则 $\sqrt{(2-x)^2}-\sqrt{(x-2)^2}=$________.

三、解答题

11. 计算：

(1) $(2\sqrt{2}+3\sqrt{3})\times(2\sqrt{2}-3\sqrt{3})$；　　(2) $\left(-\frac{x^2y^2}{3(x+y)}\right)^4\cdot\left(\frac{x^2-y^2}{x^2y^2}\right)^3$.

12. 先化简，后求值：

(1) $\dfrac{3x^2-xy}{3x^2+5xy-2y^2}$，其中 $x=-\dfrac{2}{3}$，$y=\dfrac{1}{2}$；

(2) $\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$，其中 $x=\sqrt{2}$，$y=1$.

13. 若$\sqrt{5}$的整数部分为 a，小数部分为 b，求 $a-\dfrac{1}{b}$的值.

14. 化简$\dfrac{x^2-y^2}{x^2-(y-z)^2}\div\dfrac{x^2+2xy+y^2}{(x-y)^2-z^2}\cdot\dfrac{x^2+xy-xz}{x^2-xy}$.

15. 计算$\dfrac{\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{7}}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{5}+\sqrt{7})}+\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{11}+6}{(\sqrt{7}+3)(\sqrt{11}+3)}$.

16. 计算$(2\sqrt{5}+1)\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{19}+\sqrt{20}}\right)$.

17. 观察下列各式及验证过程：

$2\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\sqrt{2+\dfrac{2}{3}}$，验证：$2\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\sqrt{\dfrac{2^3}{3}}=\sqrt{\dfrac{(2^3-2)+2}{2^2-1}}=\sqrt{\dfrac{2(2^2-1)+2}{2^2-1}}=\sqrt{2+\dfrac{2}{3}}$；

$3\sqrt{\dfrac{3}{8}}=\sqrt{3+\dfrac{3}{8}}$，验证：$3\sqrt{\dfrac{3}{8}}=\sqrt{\dfrac{3^3}{8}}=\sqrt{\dfrac{(3^3-3)+3}{3^2-1}}=\sqrt{\dfrac{3(3^2-1)+3}{3^2-1}}=\sqrt{3+\dfrac{3}{8}}$.

(1) 按照上述两等式及验证过程的思路，猜想 $4\sqrt{\dfrac{4}{15}}$的变形结果并验证；

(2) 针对上述各式反映的规律，给出用 n（n 为任意自然数，且 $n\geqslant 2$）表示的等式，并进行证明.

第四讲　方程与方程组

学习目标

1. 掌握根式方程和分式方程的一般解法和特殊解法，核心思想是化为整式方程.
2. 掌握高次方程的解法，主要是可化为一元一次或一元二次的方程，核心是降次.
3. 掌握二次方程组的解法，核心是消元.
4. 用方程和方程组解应用题.

范例精析

例 1　解方程 $x^2-3x-2\sqrt{x^2-3x-1}=4$.

分析　解根式方程的基本方法是两边平方法或者利用换元法，一般如此结构类型的题使用换元法比较好.

解　令 $\sqrt{x^2-3x-1}=y$，则 $y\geqslant 0$ 且 $x^2-3x-1=y^2$，

则原方程可化为 $y^2-2y-3=0$，

解得　$y_1=3, y_2=-1$，显然 y_2 舍去，

$\therefore$　$x^2-3x-1=9$，　$\therefore$　$x_1=-2, x_2=5$. 经检验 $x_1=-2, x_2=5$ 是原方程的解.

反思　利用换元法还是两边平方法，其核心思想是将原方程化为整式方程来解，所以在换元过程中一定要将 $\sqrt{x^2-3x-1}$ 换为 y，不是将根号里的式子换为 y；并且在这个换元的过程中，y 一定是个非负数，如果得到 y 的负根就可以舍去，这样在最后检验的时候就比较方便.

例 2　解方程 $x^3-2x^2-4x+8=0$.

解　原方程可变形为 $x^2(x-2)-4(x-2)=0$，

$(x-2)(x^2-4)=0$，

$(x-2)^2(x+2)=0$.

$\therefore$　$x_1=x_2=2, x_3=-2$.

反思　当 $ad=bc\neq 0$ 时，形如 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 的方程可这样解：$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k\neq 0$，则 $a=bk, c=dk$，于是方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 可化为 $bkx^3+bx^2+dkx+d=0$，即 $(kx+1)(bx^2+d)=0$.

例 3　解方程：$x^2+\left(\dfrac{2x}{x+2}\right)^2=5$.

解　方程的左边是平方和的形式，添项后可配成完全平方的形式.

$\left(x-\dfrac{2x}{x+2}\right)^2+4\cdot\dfrac{x^2}{x+2}=5$，

$\therefore$　$\left(\dfrac{x^2}{x+2}\right)^2+4\dfrac{x^2}{x+2}-5=0, \left(\dfrac{x^2}{x+2}+5\right)\left(\dfrac{x^2}{x+2}-1\right)=0$，

$\frac{x^2}{x+2}+5=0$ 或 $\frac{x^2}{x+2}-1=0$.

当 $\frac{x^2}{x+2}+5=0$ 时，得 $x^2+5x+10=0$，这个方程无实数解；

当 $\frac{x^2}{x+2}-1=0$ 时，得 $x^2-x-2=0$，所以 $x_1=-1, x_2=2$.

经检验，$x=-1, x_2=2$ 是原方程的根.

反思 解方程时一定要认真分析方程的结构特点，选择恰当的方法和技巧，这样才能获得事半功倍的效果.

例 4 解方程组：$\begin{cases} x^2+2xy+y^2=9, & ① \\ (x-y)^2-7(x-y)+10=0. & ② \end{cases}$

分析 解二元二次方程组的基本思想是消元或降次，从而将它转化为解一元二次方程或二元一次方程组来进行.

解 由①，得 $x+y=3$ 或 $x+y=-3$，

由②，得 $x-y=2$ 或 $x-y=5$，

则原方程组就变为：$\begin{cases} x+y=3, \\ x-y=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x+y=3, \\ x-y=5 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x+y=-3, \\ x-y=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x+y=-3, \\ x-y=5. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x_1=\frac{5}{2}, \\ y_1=\frac{1}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=4, \\ y_2=-1; \end{cases}$ $\begin{cases} x_3=-\frac{1}{2}, \\ y_3=-\frac{5}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x_4=1, \\ y_4=-4. \end{cases}$

反思 在解方程组的具体过程中，一定要根据方程组的特点进行转化，如上题，可以将每个方程进行因式分解，从而将二次方程组转化为一次方程组，达到降次的目的.

自我检测

一、选择题

1. 下列方程中，是无理方程的是(　　)

A. $x^2-4x-1=0$　　B. $\frac{4}{x-1}=\frac{\sqrt{2}}{x}$　　C. $\sqrt{x+1}=x$　　D. $xy=5$

2. 下列方程中，是二元二次方程的是(　　)

A. $2x-y=5$　　B. $y=x^2+x-3$　　C. $(x^2+3)y=2$　　D. $\frac{x^2}{y}-2=y$

3. 下列方程有解的是(　　)

A. $\frac{x}{x-1}=1$　　B. $\sqrt{x+2}-x=-1$

C. $|x+2|+\sqrt{x}=0$　　D. $\sqrt{x^2-1}+2=0$

4. 解方程 $x^2+\frac{1}{x^2}-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0$，设 $y=x+\frac{1}{x}$，那么原方程变形为(　　)

A. $y^2-3y=0$　　B. $y^2-3y+2=0$　　C. $y^2-3y-4=0$　　D. $y^2-3y+4=0$

5. 若方程$\frac{5ax+1}{2a-3x}=\frac{41}{2}$有根为$x=2$，则$a$的值为(　　)

A. 2　　B. 4　　C. -3　　D. -1

6. 赵强同学借了一本书，共280页，要在两周内读完，当他读了一半时，发现平均每天要多读21页才能在借期内读完，则他读前一半时平均每天读多少页？如果设读前一半时平均每天读x页，则下面所列方程中，正确的是(　　)

A. $\frac{140}{x}+\frac{140}{x-21}=14$　　B. $\frac{280}{x}+\frac{280}{x+21}=14$

C. $\frac{140}{x}+\frac{140}{x+21}=14$　　D. $\frac{10}{x}+\frac{10}{x+21}=1$

二、填空题

7. 方程$\frac{3}{x}=\frac{4}{70-x}$的解为________.

8. 方程$\sqrt{x+2}=1$的解为________.

9. 二元二次方程组$\begin{cases}x+y=3,\\xy=-10\end{cases}$的解为____________________.

10. 若方程$\frac{3}{x-1}+1=\frac{m}{1-x}$有增根，则$m$的值为________.

11. 若方程$x+\frac{1}{x}=a+\frac{1}{a}$的解是$x_1=a$，$x_2=\frac{1}{a}$，则方程$x+\frac{1}{x+1}=a+\frac{1}{a+1}$的解是

____________________.

三、解答题

12. 解方程或方程组：

(1) $\frac{6}{4-x}=\frac{25}{1-3x}-\frac{16}{x-4}$；　　(2) $\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{4}{x(x+1)^2}=\frac{5}{2x(x+1)}$；

(3) $\sqrt{1-x}+\sqrt{12+x}-5=0$；　　(4) $x^2-3x+2=0$；

(5) $\begin{cases}x^2+y^2=10,\\3x^2-2xy-y^2=0.\end{cases}$