锦囊妙解

中学生数理化系列

主编/吴小平

不可不读的题

高考数学

MATH

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

锦囊妙解 中学生数理化系列

不可不读的题

高考数学

总策划　司马文

丛书生编　万强华

编　　委　刘　芬　江华平　欧阳晔
　　　　　郑永盛　吴小平　管厚坤
　　　　　胡志芳　吴小菲　王智军
　　　　　张和良　张延良　黄维

本册主编　吴小平

编　　者　饶安民　马才水　郝宜清
　　　　　杨水生　张廷芹

机械工业出版社

本书是“锦囊妙解中学生数理化系列”的《不可不读的题 高考数学》分册，它体现了新课标改革精神，不受任何版本限制。书中每章节按选择题、填空题、解答题等题型分开编写。题目内容选取大部分以近两年的高考题为主，经典题为辅。题型全，解析简要，解答规范。本书内容新颖，题材广泛，目的是要从本质上提高学生的知识理解能力，分析问题和解决问题的能力。

图书在版编目(CIP)数据

不可不读的题. 高考数学/吴小平主编. —北京：机械工业出版社，2006. 6

（锦囊妙解中学生数理化系列）

ISBN 7-111-18933-7

Ⅰ. 不... Ⅱ. 吴... Ⅲ. 数学课—高中—习题—升学参考资料 Ⅳ. G634. 75

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 056590 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）

策划编辑：石晓芬 责任编辑：石晓芬 付方敏

责任印制：李 妍

保定市中画美凯印刷有限公司印刷

2006 年 9 月第 1 版 · 第 1 次印刷

169mm×230mm · 15. 75 印张 · 392 千字

定价：21. 50 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

本社购书热线电话：(010)68326294

编辑热线：(010)88379037

封面无防伪标均为盗版

前 言

武林竞技，想要取胜，或“一把枪舞得风雨不透”，或有独门绝技，三招之内，挑敌于马下。古有“锦囊妙计”，今有“锦囊妙解”辅导系列。继“锦囊妙解——中学生英语系列”、“锦囊妙解——中学生语文系列”之后，我们又隆重推出了“锦囊妙解——中学生数理化系列”。

这是一套充满智慧的系列丛书，能使你身怀绝技，轻松过关斩将，技增艺长。这更是一套充满谋略的系列丛书，能使你做到“风雨不透”，意外脱颖而出，圆名校梦。

这套丛书紧密结合教材内容，力求将教学需求和实际中高考要求完美结合。在体例设计、内容编排、方法运用、训练考查等方面都充分考虑各个年级学生的实际，由浅入深，循序渐进，稳步提高，并适度、前瞻性地把握中高考动态和趋向，在基础教学中渗透中高考意识。

本丛书作者均为多年在初中、高中一线教学的精英，每册都由有关专家最后审稿定稿。

这套丛书按中高考数、理、化必考的知识点分成三大系列：《不可不读的题》、《不可不知的素材》和《不可不做的实验》。从七年级到高考，并按数学、物理、化学分类，配套中学新课标教材，兼顾老教材，共有 36 册。

本丛书有如下特点：

1. 选材面广，知识点细，针对性强

在《不可不读的题》中，我们尽量选用当前的热点题，近几年各地的中高考题，并有自编的创新题。在《不可不知的素材》中，我们力求做到：知识面广、知识点细而全、知识网络清晰，并增加一些高考的边缘知识和前瞻性知识。在《不可不做的实验》中，我们针对目前中学生实验水平低、实验技能差、实验知识缺乏的情况，结合教材的知识网络，详细而全面地介绍了实验。有实验目的、原理、步骤、仪器，实验现象、结论、问题探讨，并增加了实验的一般思路和方法。除介绍课本上的学生实验和教师的演示实验外，还增加了很多中高考中出现的课外实验和探究实验。

2. 指导到位

本丛书在指导学生处理好学习中的基础知识的掌握、解题能力的娴熟、实验能力的提高方面，有意想不到的功效。选择本丛书潜心修炼，定能助你考场

上游刃有余，一路顺风，高唱凯歌。

3. 目标明确

在强调学生分析问题和解决问题能力的同时，在习题、内容上严格对应中高考命题方式，充分体现最新中高考的考试大纲原则和命题趋势。

梦想与你同在，我们与你同行。我们期盼：静静的考场上，有你自信的身影。我们坚信：闪光的金榜上，有你灿烂的笑颜。

本丛书特邀江西师范大学附属中学高级教师、南昌市学科带头人万强华担任主编。本分册由吴小平主编。

我们全体策编人员殷切期待广大读者对丛书提出宝贵意见。无边的学海仍然警示着我们：只有不懈努力，才会取得胜利，走向辉煌。

编　者

2006 年 6 月

目 录
Contents

第1章 集合与简易逻辑

1.1 集　合

一、选择题

题 1 若 $X=\{x\mid x=4n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，$Y=\{y\mid y=4n-3,n\in\mathbf{Z}\}$，$Q=\{z\mid z=8n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，则 X,Y,Q 的关系是 (　　)

A. $X\supsetneqq Y\supsetneqq Q$　　B. $X\subsetneqq Y\subsetneqq Q$

C. $X=Y\supsetneqq Q$　　D. $X=Y=Q$

解 设 $n=k+1,k\in\mathbf{Z}$，则 $Y=\{y\mid y=4k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，所以 $X=Y$. 当 $n=2k$（n 是偶数）时，$x=8k+1\in Q$；当 $n=2k-1$ 或 $n=2k+1$（n 是奇数）时，$x=8k+5$ 或 $8k-3$. 可知集合 Q 是由集合 X 中的 n 取偶数时的元素组成的集合，所以 $X\supsetneqq Q$，$X=Y\supsetneqq Q$，故选 C.

题 5 已知集合 $A\subsetneqq\{2,3,7\}$，且 A 中至多有 1 个奇数，则这样的集合共有 (　　)

A. 2 个　B. 4 个　C. 5 个　D. 6 个

解 集合 A 可有 3 类：第 1 类是空集；第 2 类是 A 中不含奇数；第 3 类是 A 中只含有 1 个奇数，它们是 $\varnothing$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{7\}$，$\{2,3\}$，$\{2,7\}$，故选 D.

题 3 (2003 北京春季)若集合 $M=\{y\mid y=2^{-x}\}$，$P=\{y\mid y=\sqrt{x-1}\}$，则 $M\cap P=$ (　　)

A. $\{y\mid y>1\}$　　B. $\{y\mid y\geqslant1\}$

C. $\{y\mid y>0\}$　　D. $\{y\mid y\geqslant0\}$

解 $M=\{y\mid y>0\}$，$P=\{y\mid y\geqslant0\}$，则 $M\cap P=\{y\mid y>0\}$. 故选 C.

题 5 (2004 桂、蒙、琼、陕、藏)设集合 $M=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1,x\in\mathbf{R},y=\mathbf{R}\}$，$N=\{(x,y)\mid x^2-y=0,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$，则集合 $M\cap N$ 中元素的个数为 (　　)

A. 1　B. 2　C. 3　D. 4

解 由图 1-1 知 $M\cap N$ 中元素个数为 2.

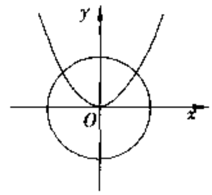

图 1-1

题 5 若同时满足 $M\subseteq\{1,2,3,4,5\}$，$a\in M$，则 $6-a\in M$ 的非空集合 M 有 (　　)

A. 16 个　B. 15 个　C. 7 个　D. 6 个

解 若 $a\in M$，$6-a\in M$，则 1 和 5，2 和 4 必同时属于 M，故将 5 个数分为 3 部分，即 $(1,5)$，$(2,4)$，(3)，$C_3^1+C_3^2+C_3^3=2^3-1=7$.

题 5 设 $f(n)=2n+1(n\in\mathbf{N})$，$P=\{1,2,3,4,5\}$，$Q=\{3,4,5,6,7\}$. 记 $\hat{P}=\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)\in P\}$，$\hat{Q}=\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)\in Q\}$，则 $(\hat{P}\cap\complement_{\mathbf{N}}\hat{Q})\cup(\hat{Q}\cap\complement_{\mathbf{N}}\hat{P})=$ (　　)

A. $\{0,3\}$　　B. $\{1,2\}$

C. $\{3,4,5\}$　　D. $\{1,2,6,7\}$

解 由条件得 $\hat{P}=\{0,1,2\}$　$\hat{Q}=\{1,2,3\}$

$\therefore(\hat{P}\cap\complement_{\mathbf{N}}\hat{Q})\cup(\hat{Q}\cap\complement_{\mathbf{N}}\hat{P})=\{0,3\}$，选 A.

题 7 (全国Ⅰ)设 I 为全集，S_1、S_2、S_3 是 I 的三个非空子集且 $S_1\cup S_2\cup S_3=I$，则下面论断正确的是 (　　)

A. $\complement_I S_1\cap(S_2\cup S_3)=\varnothing$

B. $S_1\subseteq(\complement_I S_2\cap\complement_I S_3)$

C. $\complement_I S_1\cap\complement_I S_2\cap\complement_I S_3=\varnothing$

D. $S_1\subseteq(\complement_I S_2\cup\complement_I S_3)$

解 $\because S_1\cup S_2\cup S_3=I$

$\therefore\complement_I(S_1\cup S_2\cup S_3)=\complement_I(I)=\varnothing$

$\therefore \complement_I S_1 \cap \complement_I S_2 \cap \complement_I S_3 = \varnothing$，选 C.

题 8 两个集合 A 与 B 之差记作"A/B"，定义为：$A/B=\{x|x\in A$，且 $x\notin B\}$，如果集合 $A=\{x|\log_2 x<1, x\in\mathbf{R}\}$，集合 $B=\{x||x-2|<1, x\in\mathbf{R}\}$，那么 A/B 等于（　　）

A. $\{x|x\leqslant 1\}$　　B. $\{x|x\geqslant 3\}$

C. $\{x|1\leqslant x<2\}$　　D. $\{x|0<x\leqslant 1\}$

解　$\because A=(0,2)$，$B=(1,3)$，$\therefore A/B=(0,1]$. 故选 D.

题 8 (1) 设 $f(x)=x^2$，集合 $A=\{x|f(x)=x, x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x|f[f(x)]=x, x\in\mathbf{R}\}$，则 A 与 B 的关系是（　　）

A. $A\cap B=A$　　B. $A\cap B=\varnothing$

C. $A\cup B=\mathbf{R}$　　D. $A\cup B=\{-1,1,0\}$

解　由 $f(x)=x$ 得 $x^2=x$，$\therefore A=\{0,1\}$，由 $f[f(x)]=x$ 得 $x^4=x$，$\therefore B=\{0,1\}$. $\therefore A\cap B=A$，选 A.

题 10 (2004 广东) 已知 $A=\{x||2x-1|>3\}$，$B=\{x|x^2+x-6\leqslant 0\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $(-3,-2]\cup(1,+\infty)$

B. $(-3,-2]\cup[1,2)$

C. $[-3,-2)\cup(1,2]$

D. $(-\infty,-3)\cup(1,2]$

解　$A=\{x|x<-2$ 或 $x>1\}$

$B=\{x|-3\leqslant x\leqslant 2\}$

$\therefore A\cap B=\{x|-3\leqslant x<-2$ 或 $1<x\leqslant 2\}$，故选 C.

题 11 集合 $\{x\in\mathbf{N}|0<|x-1|<3\}$ 的真子集个数为（　　）

A. 16　　B. 15　　C. 8　　D. 7

解　由 $0<|x-1|<3$，有 $\begin{cases}|x-1|>0\\|x-1|<3\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x\neq 1\\-2<x<4\end{cases}$. 所以 $-2<x<4$ 且 $x\neq 1$. 又 $x\in\mathbf{N}$，所以 $x\in\{-1,0,2,3\}$. 真子集有 $2^4-1=15$ 个，故选 B.

题 11 若不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $\{x|\alpha<x<\beta\}$，其中 $\beta>\alpha>0$，则不等式 $cx^2-bx+a>0$ 的解集是（　　）

A. $\left\{x\left|\frac{1}{\alpha}<x<\frac{1}{\beta}\right.\right\}$

B. $\left\{x\left|-\frac{1}{\alpha}<x<-\frac{1}{\beta}\right.\right\}$

C. $\left\{x\left|\frac{1}{\beta}<x<\frac{1}{\alpha}\right.\right\}$

D. $\left\{x\left|-\frac{1}{\beta}<x<-\frac{1}{\alpha}\right.\right\}$

解　$\because$ 不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $\{x|\alpha<x<\beta\}$，且 $\beta>\alpha>0$.

$\therefore a<0$ 且有 α,β 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根，$\therefore \alpha+\beta=-\frac{b}{a}$，$\alpha\beta=\frac{c}{a}$.

由于 $\alpha\beta=\frac{c}{a}$，$\alpha\beta>0$，$a<0$，$\therefore c<0$.

$\therefore$ 不等式 $cx^2-bx+a>0$ 可化为 $x^2-\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}<0$.

由 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$，$\alpha\beta=\frac{c}{a}$，可知 $-\frac{b}{c}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$，$\frac{a}{c}=\frac{1}{\alpha\beta}$.

$\therefore$ 不等式 $x^2-\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}<0$ 等价于 $x^2+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)x+\frac{1}{\alpha\beta}<0$.

$\therefore \left(x+\frac{1}{\alpha}\right)\left(x+\frac{1}{\beta}\right)<0$. $\because 0<\alpha<\beta$，

$\therefore \frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\beta}$，$\therefore -\frac{1}{\alpha}<-\frac{1}{\beta}$，

$\therefore$ 不等式 $cx^2-bx+a>0$ 的解集为 $\left\{x\left|-\frac{1}{\alpha}<x<-\frac{1}{\beta}\right.\right\}$，故选 B.

题 13 若不等式 $|ax+2|<6$ 的解集为 $(-1,2)$，则实数 a 等于（　　）

A. 8　　B. 2　　C. -4　　D. -8

解　$\because |ax+2|<6$，$\therefore -6<ax+2<6$，即 $-8<ax<4$.

(1) 当 $a>0$ 时，有 $-\frac{8}{a}<x<\frac{4}{a}$，而已知原

不等式的解集为$(-1,2)$，所以有$\begin{cases}\dfrac{4}{a}=2\\-\dfrac{8}{a}=-1\end{cases}$，此方程无解，故舍去.

(2)当$a<0$时，有$-\dfrac{8}{a}>x>\dfrac{4}{a}$，而已知原不等式的解集为$(-1,2)$，所以有

$\begin{cases}-\dfrac{8}{a}=2\\\dfrac{4}{a}=-1\end{cases}$，可得$a=-4$.故选C.

题 14 已知集合$A=\{x|x^2-2x-3\leqslant0\}$，$B=\{x|x^2+px+q<0\}$，且满足$A\cap B=\{x|-1\leqslant x<2\}$，则$p,q$满足 （ ）

A. $2p+q+4=0$　　B. $p+q+5=0$

C. $p+q=0$　　D. $p-q=0$

解 $A=\{x|-1\leqslant x\leqslant3\}$，由已知得$B\neq\varnothing$，设$B=\{x|x_1<x<x_2\}$，观察数轴得$x_1<-1$，$x_2=2$，$\therefore 4+2p+q=0$，故选A.

题 17 若关于x的不等式$ax-b>0$的解集为$(1,+\infty)$，则关于x的不等式$\dfrac{ax+b}{x-2}>0$的解集是 （ ）

A. $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

B. $(-1,2)$

C. $(1,2)$

D. $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$

解 由关于x的不等式$ax-b>0$的解集为$(1,+\infty)$，可得$\begin{cases}a>0\\\dfrac{b}{a}=1\end{cases}$，即$a=b>0$，则$\dfrac{ax+b}{x-2}>0$等价于$(ax+a)(x-2)>0$，又$a>0$，$\therefore(x+1)(x-2)>0$，$\therefore x>2$或$x<-1$.故选A.

题 17 设集合$P=\{m|-1<m<0\}$，$Q=\{m\in\mathbf{R}|mx^2+4mx-4<0$，$x$为任意实数$\}$，则下列关系成立的是 （ ）

A. $P\subsetneqq Q$　　B. $Q\subsetneqq P$

C. $P=Q$　　D. $P\cap Q=\varnothing$

解 当$m=0$时，$-4<0$恒成立；

当$m\neq0$时，$mx^2+4mx-4<0$恒成立，

$\therefore\begin{cases}m<0,\\\Delta<0,\end{cases}\therefore -1<m<0.$

综上，当$m\in(-1,0]$时，$mx^2+4mx-4<0$恒成立，即$Q=(-1,0]$，又$P=(-1,0)$，可得$P\subsetneqq Q$，故选A.

题 17 设集合A和B都是坐标平面上的点集$\{(x,y)|x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$，映射$f:A\to B$把集合$A$中的元素$(x,y)$映射成集合$B$中的元素$(x+y,x-y)$，则在映射$f$下，像$(2,1)$的原像是 （ ）

A. $(3,1)$　　B. $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

C. $\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$　　D. $(1,3)$

解 由条件得$x+y=2$，且$x-y=1$，解得$x=\dfrac{3}{2}$，$y=\dfrac{1}{2}$，故选B.

题 18 已知集合$M=\{(x,y)|y=\sqrt{9-x^2}\}$，$N=\{(x,y)|y=x+b\}$，且$M\cap N=\varnothing$，则$b$应满足的条件是 （ ）

A. $|b|\geqslant3\sqrt{2}$

B. $0<b<\sqrt{2}$

C. $-3\leqslant b\leqslant3\sqrt{2}$

D. $b>3\sqrt{2}$或$b<-3$

解 由$y=\sqrt{9-x^2}$知$x^2+y^2=9(y\geqslant0)$的图像是半圆(图1-2).当直线$y=x+b$与半圆无公共点时，截距$b>3\sqrt{2}$或$b<-3$，故选D.

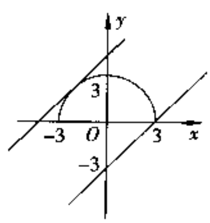

图 1-2

二、填空题

题 17 给出以下说法：

①任何一个集合A至少有两个子集；②自然数集的补集是负整数集；③无限集的真子集

是有限集；④任何一个集合 A 必有一个真子集；⑤集合 $\{x|y=x^2-2x-1\}$ 与集合 $\{y|y=x^2-2x+1\}$ 为同一集合；⑥设全集为 U，若 $A\cap B=U$，则 $A=B=U$；⑦若 $A\cap B=\varnothing$，则 $A=\varnothing$ 或 $B=\varnothing$；⑧若 $a\in A\cup B$，则 $a\in A$；⑨若 $a\in A\cap B$，则 $a\in A\cup B$；⑩若 $A\subseteq B$，则 $A\cup B=B$；⑪若 $A\cup B=A$，则 $A\cap B=B$；⑫若 $A\cup B=B\cup C$，则 $A=C$；⑬若 $A\cap B=B\cap C$，则 $A=C$；⑭若 M,N 为全集 U 的非空子集，且 $\complement_U M\supseteq N$，则 $M\subsetneqq \complement_U N$.

其中正确的序号为________.

解 ①错．当 $A=\varnothing$ 时，A 只有一个子集为它本身；

②错，因为未指明全集，如全集为 $\mathbf{R}$，显然错误；

③错，举反例 $\mathbf{N}\subsetneqq\mathbf{Z}$，$\mathbf{N}$，$\mathbf{Z}$ 均为无限集；

④错，当该集合为 $\varnothing$ 时，无真子集；

⑤错，$\because\{x|y=x^2-2x+1\}$ 代表 $y=x^2-2x+1$ 中的 x 的取值范围，$\therefore\{x|y=x^2-2x+1\}=\mathbf{R}$，而 $\{y|y=x^2-2x+1\}$ 代表 $y=x^2-2x+1$ 中 y 的取值范围，$\therefore\{y|y=x^2-2x+1\}=\{y|y\geqslant 0\}$，故⑤错；

⑥正确，$\because A\cap B=U$，$\therefore A\supseteq U$ 且 $B\supseteq U$，而 U 为全集，$\therefore A\subseteq U$ 且 $B\subseteq U$，故 $A=B=U$；

⑦错，若 $A=\{1\}$，$B=\{2\}$，显然有 $A\cap B=\varnothing$，但 $A\neq\varnothing$ 且 $B\neq\varnothing$；

⑧错，若 $a\in A\cup B$，则 $a\in A$，或 $a\in B$；

⑨正确，$\because A\cap B\subseteq A\cup B$，$\therefore$⑨正确；

⑩正确；

⑪正确，由 $A\cup B=A$ 有 $B\subseteq A$，

$\therefore A\cap B=B$；

⑫错，若 $A=\{1,2\}$，$B=\{2\}$，$C=\{1\}$，则有 $A\cup B=B\cup C=\{1,2\}$，但 $A\neq C$；

⑬错，若 $A=\{1,2\}$，$B=\{1\}$，$C=\{1\}$，则 $A\cap B=B\cap C=\{1\}$，但 $A\neq C$；

⑭错，借助 Venn 图可知，若 $\complement_U M\supseteq N$，则 $M\subseteq\complement_U N$，因为由 $\complement_U M\supseteq N$ 可能有 $\complement_U M=N$，此时 $M=\complement_U N$，故⑭错.

题 20 (2002 上海春季)若全集 $I=\mathbf{R}$，$f(x)$，$g(x)$ 均为 x 的二次函数，$P=\{x|f(x)<0\}$，$Q=\{x|g(x)\geqslant 0\}$，则下列不等式组 $\begin{cases}f(x)<0\\g(x)<0\end{cases}$ 的解集可用 P、Q 表示为________.

解 $\because Q=\{x|g(x)\geqslant 0\}$，$\therefore\complement_I Q=\{x|g(x)<0\}$，$\therefore$ 显然不等式组 $\begin{cases}f(x)<0\\g(x)<0\end{cases}$ 的解集应为：

$$\left\{x\left|\begin{cases}f(x)<0\\g(x)<0\end{cases}\right.\right\}=\{x|f(x)<0\}\cap\{x|g(x)<0\}=P\cap\complement_I Q.$$

题 21 已知集合 $A=\left\{x\left|\begin{cases}x^2-4x+3<0\\x^2-6x+8<0\end{cases}\right.\right\}$，集合 $B=\{x|2x^2-9x+a<0\}$，若 $A\subseteq B$，则 a 的取值范围是________.

解 $A=\left\{x\left|\begin{cases}x^2-4x+3<0\\x^2-6x+8<0\end{cases}\right.\right\}=\left\{x\left|\begin{cases}1<x<3\\2<x<4\end{cases}\right.\right\}=\{x|2<x<3\}$. 令 $f(x)=2x^2-9x+a$，则欲满足 $A\subseteq B$，则方程 $2x^2-9x-a=0$ 的两个根 x_1，x_2 必满足 $x_1\leqslant 2$，且 $x_2\geqslant 3$，从而实数 a 必须满足 $\begin{cases}f(2)\leqslant 0\\f(3)\leqslant 0\end{cases}$，解得 $a\leqslant 9$，故 a 的取值范围是 $(-\infty,-9]$.

题 22 若 $\left\{x\left|\dfrac{(x+a)(x+b)}{x-c}\geqslant 0\right.\right\}=[-1,2)\cup[3,+\infty)$，则 $a+b=$________.

解 由题可知 $c=2$，所以有 $\begin{cases}-a=-1\\-b=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-a=3\\-b=-1\end{cases}$，故 $\begin{cases}a=1\\b=-3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-3\\b=1\end{cases}$，从而 $a+b=-2$.

题 22 集合 $\left\{a,\dfrac{b}{a},1\right\}$，也可表示为 $\{a^2,a+b,0\}$，则 $a^{2005}+b^{2006}=$________.

解 设 $A=\left\{a,\dfrac{b}{a},1\right\}$，$B=\{a^2,a+b,0\}$.

$\because A=B$，$\therefore 0\in A$. 从而 $\dfrac{b}{a}=0$（$\because a\neq 0$），$\therefore b=0$. 又 $1\in B$，若 $a+b=1$，则 $a=1$，此时 $A=\{1,0,1\}$，$\therefore$ 舍去，故 $a^2=1$，且 $a\neq 1$，$\therefore a=-1$，

$\therefore a^{2005}+b^{2006}=(-1)^{2005}\cdot 0^{2006}=-1$.

题 24 (2004 湖北)设 A、B 为两个集合，下列四个命题：

①$A\not\subseteq B\Leftrightarrow$对任意 $x\in A$，$x\notin B$；②$A\not\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$；③$A\not\subseteq B\Leftrightarrow A\not\supseteq B$；④$A\not\subseteq B\Leftrightarrow$存在 $x\in A$，使得 $x\notin B$. 其中真命题的序号是________.(把符合要求的命题序号都填上)

解 ①反例 $A=\{1,2\}$，$B=\{2,3,4\}$.

$A\not\subseteq B$，取 $2\in A$ 但 $2\in B$. 此命题错.

②仍取上式反例 $A\cap B=\{2\}\neq\varnothing$，此命题错.

③$A=\{1,2,3\}$，$B=\{1,2\}$

$A\not\subseteq B$ 但 $B\subseteq A$，此命题错. ①正确.

题 25 设命题 p：$|4x-3|\leqslant 1$；命题 q：$x^2-(2a+1)x+a(a+1)\leqslant 0$. 若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要而不充分条件，则实数 a 的取值范围是________.

解 p：$|4x-3|\leqslant 1\Rightarrow \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$，

q：$a\leqslant x\leqslant a+1$，由题设可知 $p\Rightarrow q$，$q\nRightarrow p$

$\therefore\left[\frac{1}{2},1\right]\subsetneqq(a,a+1)$

$\therefore a\leqslant\frac{1}{2}$ 且 $a+1\geqslant 1\Rightarrow 0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$

三、解答题

题 25 设集合 $A=\{x\mid |x-2|<1\}$，$B=\{x\mid |ax+1|\leqslant 1+a\}$，若 $A\cup B=B$，求实数 a 的取值范围.

解法 1 由 $|x-2|<1$ 得 $-1<x-2<1$，即 $1<x<3$，$\therefore A=\{x|1<x<3\}$.

(1)当 $1+a<0$ 时，不等式 $|ax+1|\leqslant 1+a$ 无解，$\therefore B=\varnothing$.

(2)当 $1+a=0$ 时，不等式 $|ax+1|\leqslant 1+a$ 的解为 $x=1$，$\therefore B=\{1\}$.

(3)当 $1+a>0$，$a>-1$ 时，不等式 $|ax+1|\leqslant 1+a$ 可化为 $-(1+a)\leqslant ax+1\leqslant 1+a$，即 $-2-a\leqslant ax\leqslant a$.

①当 $a>0$ 时，其解为 $-\frac{2}{a}-1\leqslant x\leqslant 1$，

$\therefore B=\left\{x\,\middle|\,-\frac{2}{a}-1\leqslant x\leqslant 1\right\}$；

②当 $a=0$ 时，其解集为 $\mathbf{R}$，$\therefore B=\mathbf{R}$；

③当 $-1<a<0$ 时，其解为 $1\leqslant x\leqslant -1-\frac{2}{a}$，$\therefore B=\{x|1\leqslant x\leqslant -1-\frac{2}{a}\}$.

又 $A\cup B=B$，$\therefore A\subseteq B$，而 $A=\{x|1<x<3\}$，由上面的讨论可知，只有当 $a=0$ 或 $-1<a<0$ 且 $-1-\frac{2}{a}\geqslant 3$ 时，才有 $A\subseteq B$. 故所求的 a 的取值范围为 $-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 0$.

解法 2 由题可得 $A=\{x|1<x<3\}$，$B=\{x|-2-a\leqslant ax\leqslant a\}$.

(1)若 $a=0$，则 $B=\mathbf{R}$，满足题意.

(2)若 $a>0$，则 $B=\{x|-\frac{2}{a}-1\leqslant x\leqslant 1\}$，显然有 $A\cup B\neq B$.

(3)若 $a<0$，则 $B=\left\{x\,\middle|\,-\frac{2}{a}-1\geqslant x\geqslant 1\right\}$，

则 $-\frac{2}{a}-1\geqslant 3\Rightarrow a\geqslant-\frac{1}{2}$，$\therefore 0>a\geqslant-\frac{1}{2}$.

题 24 已知 $M=\{a,a+d,a+2d\}$，$N=\{a,aq,aq^2\}$，$a\neq 0$，且 $M=N$，求 q 的值.

解 $\because M=N$，$\therefore$它们的元素可能有两种对应相等关系，

即①$\begin{cases}a+d=aq\\a+2d=aq^2\end{cases}$，或②$\begin{cases}a+d=aq^2\\a+2d=aq\end{cases}$.

由①得 $q^2-2q+1=0$，解得 $q=1$ 与 N 矛盾舍去；

由②得 $2q^2-q-1=0$，解得 $q=-\frac{1}{2}$($q=1$ 舍去).

$\therefore q=-\frac{1}{2}$.

注 尽管①求得的 q 值不符题意舍去，但得出①并解之求 q 的过程是不可缺少的，结果必须检验是否与已知矛盾.

题 24 设 $f(x)=x^2+px+q$，$A=\{x|x=f(x)\}$，$B=\{x|f[f(x)]=x\}$(其中 p,q 均为实数).

(1)求证 $A\subseteq B$;

(2)已知 $A=\{-1,3\}$,求 B.

(1)证明　设 x_0 是集合 A 中的任一元素,即有 $x_0\in A$,

$\because A=\{x|x=f(x)\}$,$\therefore f(x_0)=x_0$,从而 $f[f(x_0)]=f(x_0)=x_0$.

$\therefore x_0\in B$,故 $A\subseteq B$.

(2)解　$\because A=\{-1,3\}=\{x|x^2+px+q=x\}$,$\therefore$ 方程 $x^2+(p-1)x+q=0$ 有两根 -1 和 3.应用韦达定理,得

$\begin{cases}-1+3=-(p-1)\\(-1)\times 3=q\end{cases}$,从而 $\begin{cases}p=-1\\q=-3\end{cases}$.

$\therefore f(x)=x^2-x-3$,于是集合 B 的元素是方程 $f[f(x)]=x$,也即 $(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-3=x$　①的根,将方程①变形得 $(x^2-x-3)^2-x^2=0$,即 $(x^2-2x-3)(x^2-3)=0$,解得 $x=-1,\sqrt{3},-\sqrt{3},3$.故 $B=\{-\sqrt{3},-1,\sqrt{3},3\}$.

题 29　设集合 $M=\left\{x\left|\dfrac{ax-5}{x^2-a}<0\right.\right\}$.

(1)当 $a=4$ 时,求集合 M;

(2)若 $3\in M$ 且 $5\notin M$,求实数 a 的取值范围.

解　(1)当 $a=4$ 时,有 $\dfrac{4x-5}{x^2-4}<0$,即 $(x^2-4)(4x-5)<0$,$\therefore x<-2$,或 $\dfrac{5}{4}<x<2$,

从而此时 $M=\left\{x\left|x<-2,\text{或}\dfrac{5}{4}<x<2\right.\right\}$.

(2)$\because 3\in M$,$\therefore \dfrac{3a-5}{9-a}<0$,即 $(a-9)(3a-5)>0$,

$\therefore a>9$,或 $a<\dfrac{5}{3}$　①

又 $5\notin M$,$\therefore \dfrac{5a-5}{25-a}\geqslant 0$ 或 $25-a=0$,

即有 $(5a-5)(a-25)\leqslant 0$,$\therefore 1\leqslant a\leqslant 25$　②

由①,②可知 $1\leqslant a<\dfrac{5}{3}$,或 $9<a\leqslant 25$,从而实数 $a\in\left[1,\dfrac{5}{3}\right)\cup(9,25]$.

题 31　已知集合 $A=\{x|x=3a+5b,a,b\in\mathbf{Z}\}$,$B=\{y|y=7m+10n,m,n\in\mathbf{Z}\}$,试证明 $A=B$.

证明　一方面,任取 $x\in A$,则有 $x=3a+5b$ 且 $a,b\in\mathbf{Z}$,

$\because 3a+5b=7(-a+5b)+10(a-3b)$,且 $-a-5b\in\mathbf{Z}$,$a-3b\in Z$,

$\therefore x\in B$,即 $A\subseteq B$.

另一方面,任取 $x\in B$,则有 $x=7m+10n$,且 $m,n\in\mathbf{Z}$,

$\because 7m+10n=3(-m-5n)+5(2m+5n)$,且 $-m-5n\in\mathbf{Z}$,$2m+5n\in\mathbf{Z}$.

$\therefore x\in A$,即 $B\subseteq A$.

综上,$A=B$,事实上 $A=B=\mathbf{Z}$.

题 31　已知 $M=\{(x,y)|x^2+2x+y^2=0\}$,$N=\{(x,y)|y=x+a\}$,且 $M\cap N\supsetneqq\varnothing$,求 a 的范围.

解法 1　由 $M\cap N\supsetneqq\varnothing$ 可知方程组 $\begin{cases}x^2+2x+y^2=0\\y=x+a\end{cases}$ 有解.即 $2x^2+(2+2a)x+a^2=0$ 有解

$(2+2a)^2-4\cdot 2a^2\geqslant 0$ 可解得

$1-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant 1+\sqrt{2}$.

解法 2　可用图解.

图 1-3 中 M 为以 $(-1,0)$ 为圆点,1 为半径的圆.N 为斜率为 1,截距为 a 的直线.

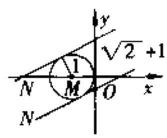

图 1-3

由图可知

$1-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant 1+\sqrt{2}$.

题 31　已知集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$,$B=\{x|x^2-ax+(a-1)=0\}$,$C=\{x|x^2-mx+2=0\}$,且 $A\cup B=A$,$A\cap C=C$,求实数 a 的值和 m 的取值范围.

解　由 $A\cup B=A$ 可知 $B\subseteq A$,由方程 $x^2-3x+2=0$,得 $x=1$ 或 $x=2$,

$\therefore A=\{1,2\}$.

又方程 $x^2-ax+(a-1)=0$ 的两个根为 1 或 $a-1$,

∴B中的元素$a-1$可能为1或2.

当$a-1=1$,即$a=2$时,$B=\{1\}$;

当$a-1=2$,即$a=3$时,$B=\{1,2\}$.

所以a的值为2或3.

又由$A\cap C=C$可知$C\subseteq A$,∴C中的元素有3种可能性:

若方程$x^2-mx+2=0$有两个不同的根1或2时,此时$m=3$;

若方程$x^2-mx+2=0$有两个相等根时,即$\Delta=m^2-8=0$,$m=\pm 2\sqrt{2}$,此时方程的根为$\sqrt{2}$,则$C\nsubseteq A$,故$m\neq\pm 2\sqrt{2}$;

若方程$x^2-mx+2=0$无实根,即$\Delta=m^2-8<0$,$-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$时,$C=\varnothing$,满足$A\cap C=C$.

∴$m=3$或$-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$.

注 欲求a或m,只有从$A\cup B=A$,$A\cap C=C$中去确定B与A,或C与A的关系,从而再判断B、C中元素的可能性,求得a或m;另外不能记为$B=\{1,a-1\}$,因为$a-1$可能为1.注意对$C=\varnothing$时的讨论.

题33 设$A=\{x\mid x^3-7x^2+14x-8=0\}$,$B=\{x\mid x^3+2x^2-c^2x-2c^2=0,c>0\}$.

(1)求A、B的各个元素;

(2)以集合$A\cup B$的任意元素a、b作为二次方程$x^2+px+q=0$的两个根,试在$f(x)=x^2+px+q$的最小值中,求出最大的或最小的.

解 (1)$x^3-7x^2+14x-8=(x-1)(x-2)(x-4)$,

$x^3+2x^2-c^2x-2c^2=(x+2)(x+c)(x-c)$,

∵$c>0$∴$A=\{1,2,4\}$,$B=\{-2,c,-c\}$.

(2)设$x^2+px+q=0$的根为a、b,则$f(x)$的最小值是$-\frac{1}{4}(a-b)^2$,

当$a=b$时,$-\frac{1}{4}(a-b)^2$最大值是0;

当$|a-b|$最大时,$-\frac{1}{4}(a-b)^2$有最小值;

∵$a,b\in\{-2,-c,1,2,4,c\}$,

$c\geqslant 4$时$|a-b|$的最大值是$c-(-c)=2c$,$f(x)$有最小值$-c^2$;

$2\leqslant c\leqslant 4$时$|a-b|$的最大值是$4-(-c)=4+c$,$f(x)$有最小值$-\frac{(4+c)^2}{4}$;

$0<c\leqslant 2$时$|a-b|$的最大值是$4-(-2)=6$,$f(x)$有最小值-9.

题34 设函数$f(x)=ax+2$,且集合$A=\{x\mid |f(x)|<6\}=(-1,2)$,试求不等式$\frac{x}{f(x)}\leqslant 1$的解集.

解 ∵$|ax+2|<6$,∴$(ax+2)^2<36$,即$a^2x^2+4ax-32<0$,由题设可得$\begin{cases}-\frac{4a}{a^2}=-1+2,\\ -\frac{32}{a^2}=(-1)\times 2,\end{cases}$解得$a=-4$,∴$f(x)=-4x+2$.由$\frac{x}{f(x)}\leqslant 1$即$\frac{x}{-4x+2}\leqslant 1$,得

$$\frac{5x-2}{4x-2}\geqslant 0 \quad ①,$$

而①等价于$\begin{cases}(5x-2)(4x-2)\geqslant 0,\\ 4x-2\neq 0,\end{cases}$解得$x>\frac{1}{2}$或$x\leqslant\frac{2}{5}$.

故原不等式解集为$\left\{x\,\middle|\,x>\frac{1}{2},或x\leqslant\frac{2}{5}\right\}$.

题34 已知集合$A=\{(x,y)\mid |x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1\}$,$B=\{(x,y)\mid (x-a)^2+(y-a)^2\leqslant 1\}$,其中$a$为实数.

(1)当$A\cap B\neq\varnothing$时,求a的取值范围;

(2)若记点集$A\cap B$的面积为$f(a)$,求$f(1.5)$.

解 集合A的平面区域是正方形$-1\leqslant x\leqslant 1$,$-1\leqslant y\leqslant 1$;B的平面区域是以$P(a,a)$为圆心,1为半径的圆的内部和圆周.

(1)点$P(a,a)$在直线$y=x$上,当圆心P沿直线$y=x$由上往下运动且$A\cap B=\{(1,1)\}$时(图1-4a),$|OP|=\sqrt{2}+1$,则$a=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}+1)=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$,即$P$点坐标为$\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2},1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.由对

称性可知，当 $A\cap B=\{(-1,-1)\}$ 时，圆心 P 的坐标为 $\left(-1-\frac{\sqrt{2}}{2},-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

故 a 的取值范围是 $-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant a\leqslant 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

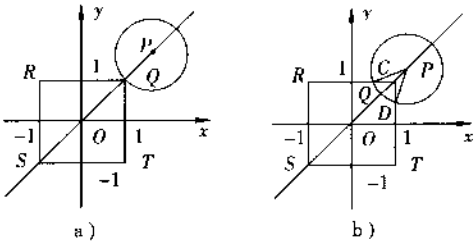

图 1-4

(2)当 $a=1.5$ 时，知 $f(1.5)$ 表示圆 $(x-1.5)^2+(y-1.5)^2=1$ 与正方形 $PQTS$ 相交部分的面积(图 1-4b).

$|PQ|=\sqrt{(1.5-1)^2+(1.5-1)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\angle CQP=135^\circ$.

在 $\triangle CQP$ 中，由正弦定理得 $\frac{|CP|}{\sin 135^\circ}=\frac{|PQ|}{\sin\angle PCQ}$，

$\therefore \sin\angle PCQ=\frac{|PQ|\sin 135^\circ}{|CP|}$.

$\because |CP|=1$，$\therefore \sin\angle PCQ=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$，

$\therefore \angle PCQ=30^\circ$，则 $\angle CPQ=180^\circ-135^\circ-30^\circ=15^\circ$，$\therefore \angle CPD=30^\circ$.

$\therefore f(1.5)=S_{扇形CPD}-2S_{\triangle CQP}=\frac{\pi}{12}-2\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sin 15^\circ=\frac{\pi+3-3\sqrt{3}}{12}$.

题 36 设 S 是实数组成的集合，且当 $a\in S$ 时，$\frac{1}{1-a}\in S$.

(1)如果 $3\in S$，那么 S 中至少含有哪几个元素?

(2)S 能否为单元素集合?

(3)如果 $a\in S$，那么 S 中至少含有哪几个元素?

解 (1)$\because 3\in S$，

$\therefore \frac{1}{1-3}=-\frac{1}{2}\in S$，

$\therefore \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}\in S$，

$\therefore \frac{1}{1-\frac{2}{3}}=3\in S$.

$\therefore S$ 中至少含有元素 $3,-\frac{1}{2},\frac{2}{3}$.

(2)由题意有 $a=\frac{1}{1-a}$，即 $a^2-a+1=0$，此时方程无实根，故 S 不可能为单元素集合.

(3)设 $a\in S$，则 $\frac{1}{1-a}\in S$，$\therefore \frac{1}{1-\frac{1}{1-a}}=\frac{1-a}{-a}=1-\frac{1}{a}\in S$，由(2)可知，$S$ 中至少有三个元素 $a,\frac{1}{1-a},1-\frac{1}{a}$.

1.2 简易逻辑

一、选择题

题 37 已知 p 是 r 的充分不必要条件，s 是 r 的必要条件，q 是 s 的必要条件，那么 p 是 q 的 ( )

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

解 由 p 是 r 的充分不必要条件可知 $p\Rightarrow r$，但 $r\not\Rightarrow p$ ①

"s 是 r 的必要条件"知 $r\Rightarrow s$ ②

"q 是 s 的必要条件"可得 $s\Rightarrow q$ ③

由①，②，③可知 $p\Rightarrow q$，从而 p 是 q 的充分条件，假设"p 是 q 的必要条件"则 $q\Rightarrow p$，再由

$r\Rightarrow s, s\Rightarrow p$,可得 $r\Rightarrow p$,这与①相矛盾,从而 $q\not\Rightarrow p$.从而 p 是 q 的充分不必要条件,故选 A.

题 38 条件 p:$|x|=x$,条件 q:$x^2\geqslant -x$,则 p 是 q 的 ( )

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

解 由 $|x|=x$ 得 $x\geqslant 0$,由 $x^2\geqslant -x$ 得 $x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 0$,所以若 p 成立则 q 成立,而 q 成立则 p 不一定成立,故 p 是 q 的充分不必要条件,故选 A.

题 39 已知不等式 $|x-m|<1$ 成立的充分不必要条件是 $\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$,则实数 m 的取值范围是 ( )

A. $\left[-\frac{4}{3},\frac{1}{2}\right]$ B. $\left[-\frac{1}{2},\frac{4}{3}\right]$

C. $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ D. $\left[\frac{4}{3},+\infty\right)$

解 由题易知不等式 $|x-m|<1$ 的解集为 $\{m|m-1<x<m+1\}$,

从而有 $\{m\ m-1<x<m+1\}\supsetneqq\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$,

$\therefore\begin{cases}m+1>\frac{1}{2}\\ m-1<\frac{1}{3}\end{cases}$,解得 $-\frac{1}{2}<m<\frac{4}{3}$,

而 $m+1=\frac{1}{2}$ 与 $m-1=\frac{1}{3}$ 不同时成立,

$\therefore m=-\frac{1}{2}$ 及 $m=\frac{4}{3}$ 亦满足题意,

$\therefore -\frac{1}{2}\leqslant m\leqslant\frac{4}{3}$,故选 B.

题 38 在 $\triangle ABC$ 中,"$A>30^\circ$"是"$\sin A>\frac{1}{2}$"的 ( )

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

解法 1 若 $\sin A>\frac{1}{2}$,则 $30^\circ<A<150^\circ$(A 为 $\triangle ABC$ 的内角),

$\therefore$"$A>30^\circ$"为"$\sin A>\frac{1}{2}$"的必要条件,若"$A>30^\circ$",如 $A=175^\circ$,则"$\sin A<\frac{1}{2}$",

$\therefore$"$A>30^\circ$"是"$\sin A>\frac{1}{2}$"的必要而不充分条件.

解法 2 $M=\{A\mid \sin A>\frac{1}{2}$,且 A 为 $\triangle ABC$ 的内角$\}=\{A|30^\circ<A<150^\circ\}$,$N=\{A|A>30^\circ\}$,

$\because M\subsetneqq N$,$\therefore$"$A>30^\circ$"是"$\sin A>\frac{1}{2}$"的必要而不充分条件,故选 B.

题 38 一元二次方程 $ax^2+2x+1=0$($a\neq 0$)有一个正根和一个负根的充分不必要条件是 ( )

A. $a<0$ B. $a>0$

C. $a<-1$ D. $a>1$

解法 1 方程 $ax^2+2x+1=0(a\neq 0)$ 有一正一负两根 $\Leftrightarrow\begin{cases}f(0)>0\\ a<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(0)<0\\ a>0\end{cases}$,其中 $f(x)=ax^2+2x+1(a\neq 0)$,

$\because f(0)=1>0$,$\therefore a<0$,而题设要求充分不必要条件,故选 C.

解法 2 设 x_1、x_2 为方程 $ax^2+2x+1=0$($a\neq 0$)的两根,则方程 $ax^2+2x+1=0(a\neq 0)$ 有一正一负两根 $\Leftrightarrow x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}<0$,$\therefore a<0$,又 $a<-1$,必可得 $a<0$. 反之不然,故选 C.

题 38 函数 $f(x)=x^2-2ax-3$ 在区间 $[1,2]$ 上存在反函数的充分必要条件是 ( )

A. $a\in(-\infty,1]$

B. $a\in[2,+\infty)$

C. $a\in[1,2]$

D. $a\in(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$

解 由函数 $f(x)=x^2-2ax-3$ 可知,此函数为二次函数,对称轴为 $x=a$.

因此，函数有反函数的充要条件是 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上是单调函数，亦即对称轴不穿过定义区间，$\therefore a\leqslant 1$ 或 $a\geqslant 2$，故选 D.

题 43 (2004 湖南)设集合 $U=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$，$A=\{(x,y)\mid 2x-y+m>0\}$，$B=\{(x,y)\mid x+y-n\leqslant 0\}$，那么点 $P(2,3)\in A\cap(\complement_U B)$ 的充要条件是 ( )

A. $m>-1,n<5$　　B. $m<-1,n<5$

C. $m>-1,n>5$　　D. $m<-1,n>5$

解　$\complement_U B=\{(x,y)\mid x+y-n>0\}$

$P(2,3)\in A\cap(\complement_U B)$ 的充要条件是 $2\times 2-3+m>0$ 且 $2+3-n>0$

则 $m>-1$ 或 $n<5$. 故选 A.

题 44 若命题甲："$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$"；命题乙："$ABCD$ 是平行四边形"，则甲是乙的 ( )

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

解　由 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ 不能推出 $ABCD$ 是平行四边形；若 $ABCD$ 是平行四边形则一定有 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. 选 B.

题 43 命题甲：$\left(\frac{1}{2}\right)^x,2^{1-x},2^{x^2}$ 成等比数列；命题乙：$\lg x,\lg(x+1),\lg(x+3)$ 成等差数列，则甲是乙的 ( )

A. 充分非必要条件

B. 必要非充分条件

C. 充要条件

D. 既非充分又非必要条件

解　由命题甲：$2(1-x)=-x+x^2\Rightarrow x=1$ 或 $x=-2$

由命题乙：$(1+x)^2=x(x+3)\Rightarrow x=1$

$\therefore$ 甲 $\nRightarrow$ 乙，而乙 $\Rightarrow$ 甲.

$\therefore$ 甲是乙的必要不充分条件，选 B.

题 43 (2004 辽宁)已知 α、β 是不同的两个平面，直线 $a\subset\alpha$，直线 $b\subset\beta$. 命题 p：a 与 b 无公共点；命题 q：$\alpha/\!/\beta$. 则 p 是 q 的 ( )

A. 充分而不必要的条件

B. 必要而不充分的条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要的条件

解　如图 1-5 所示，则 p 不是 q 的充分条件，又 $\alpha/\!/\beta$. 则 a 与 b 无公共点. p 是 q 的必要条件，故选 B.

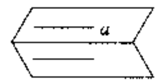

图 1-5

题 47 给出下列关于互不相同的直线 m、l、n 和平面 α、β 的四个命题：

①$m\subset\alpha$，$l\cap\alpha=A$，点 $A\notin m$，则 l 与 m 不共面；

②m、l 是异面直线，$l/\!/\alpha$，$m/\!/\alpha$，且 $n\perp l$，$n\perp m$，则 $n\perp\alpha$；

③若 $l/\!/\alpha$，$m/\!/\beta$，$\alpha/\!/\beta$，则 $l/\!/m$；

④若 $l\subset\alpha$，$m\subset\alpha$，$l\cap m=$ 点 A，$l/\!/\beta$，$m/\!/\beta$，则 $\alpha/\!/\beta$.

其中为假命题的是 ( )

A. ①　　B. ②　　C. ③　　D. ④

解　①由异面直线的判定定理得 l 与 m 为异面直线，故①正确；②由线面垂直的判定定理知②正确；③l 可能与 m 相交或异面. 故③错误；④由线面垂直的判定定理得 $\alpha/\!/\beta$，故④正确. 选 C.

题 43 "$a=b$"是"直线 $y=x+2$ 与圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=2$ 相切"的 ( )

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分又不必要条件

解　若 $a=b$ 则有圆心 (a,b) 到直线 $y=x+2$ 的距离 $d=r$，$\therefore$ 相切.

若相切则有 $\frac{|a-b+2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\Rightarrow a=b$ 或 $a-b=-4$. 选 A.

题 43 (北京高考题)"$m=\frac{1}{2}$"是"直线

$(m+2)x+3my+1=0$ 与直线 $(m-2)x+(m+2)y-3=0$ 相互垂直"的 ( )

A. 充分必要条件

B. 充分而不必要条件

C. 必要而不充分条件

D. 既不充分也不必要条件

解 直线 $(m+2)x+3my+1=0$ 与直线 $(m-2)x+(m+2)y-3=0$ 相互垂直的充要条件是：$(m+2)(m-2)+3m(m+2)=0$

解得 $m=\frac{1}{2}$ 或 $m=2$，选 B.

题 52 命题 p：$x=\pi$ 是 $y=|\sin x|$ 的一条对称轴，q：2π 是 $y=|\sin x|$ 的最小正周期. 下列复合命题：

①p 或 q ②p 且 q ③非 p ④非 q. 其中真命题个数为 ( )

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

解 由题意知 p 真 q 假，则①、④为真命题，故选 C.

二、填空题

题 52 设计如图 1-6 所示的四个电路图，条件 A 为开关 S_1 闭合；条件 B 为灯泡 L 亮，那么 A 是 B 的什么条件？(1)甲________；(2)乙________；(3)丙________；(4)丁________.

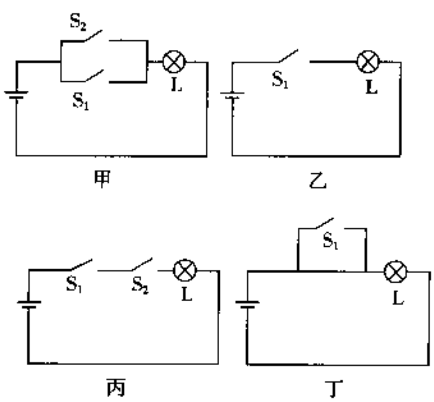

图 1-6

解 (1)开关 S_1 闭合则灯泡 L 亮，反之，灯泡 L 亮不一定有开关 S_1 闭合，即 $A\Rightarrow B$，但 $B\not\Rightarrow A$，从而 A 是 B 的充分不必要条件；(2)中易知 A 为 B 的充要条件；同理，对(3)有 $A\not\Rightarrow B$，但 $B\Rightarrow A$，所以 A 是 B 的必要不充分条件；(4)中条件 A 的有无，对条件 B 没有影响，从而 A 是 B 的既不充分也不必要条件.

题 52 给定两个命题 p、q，p：若 $x+y\leqslant 4$ 或 $xy\leqslant 4$，则 $x\leqslant 2$ 或 $y\leqslant 2$；q：有一个偶数是质数，则"p 且 q"为________命题（填"真"或"假"）.

解 直接判断 p 的真假较为困难，可转化为判断命题 p 的逆否命题，易得 p 的逆否命题为"若 $x>2$ 且 $y>2$，则 $x+y>4$ 且 $xy>4$"，显然是真命题，而原命题与其逆否命题等价，从而命题 p 为真命题；对于命题 q，易知存在一个偶数 2，2 为质数，从而命题 q 亦为真命题，从而"p 且 q"为真命题.

三、解答题

题 53 设命题为"若 $m>0$，则关于 x 的方程 $x^2+x-m=0$ 有实数根"，试写出它的否命题、逆命题和逆否命题，并分别判断它们的真假.

解 否命题为"若 $m>0$，则关于 x 的方程 $x^2+x-m=0$ 没有实数根"；

逆命题为"若关于 x 的方程 $x^2+x-m=0$ 有实数根，则 $m>0$"；

逆否命题"若关于 x 的方程 $x^2+x-m=0$ 没有实数根，则 $m\leqslant 0$".

由方程的判别式 $\Delta=1+4m$ 得 $\Delta>0$，即 $m>-\frac{1}{4}$ 时，方程有实根.

$\therefore m>0$ 使 $1+4m>0$，方程 $x^2+x-m=0$ 有实根，

$\therefore$ 原命题为真，从而逆否命题为真，否命题为假.

而方程 $x^2+x-m=0$ 有实根，必须 $m>-\frac{1}{4}$，不能推出 $m>0$，故逆命题为假.

题 54 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=p^n+q(p\neq 0, p\neq 1)$，求数列 $\{a_n\}$ 是等比数列的