新三导丛书

XIN SAN DAO CONG SHU

- 内容点睛
- 经典例题
- 习题精解
- 综合练习

矢量分析与场论

（第二版）

导教·导学·导考

任保文 编

西北工业大学出版社

新三导丛书

矢量分析与场论

（第二版）

导教·导学·导考

任保文　编

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书是以矢量分析与场论基础理论中一些典型题目的分析解答为中心，与同名课程相配套的学习辅导书．书中内容符合该课程教学的基本要求，并略有提升，题目的选取力求照顾到各种题型．

本书可供理工科大学相关专业师生参考使用．

图书在版编目（CIP）数据

矢量分析与场论导教·导学·导考/任保文编．—西安：西北工业大学出版社，2006.5

（新三导丛书）

ISBN 7-5612-2061-8

Ⅰ．矢… Ⅱ．任… Ⅲ．①矢量—分析—高等学校—教学参考资料②场论—高等学校—教学参考资料 Ⅳ．①O183.1 ②O412.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 015372 号

出版发行：西北工业大学出版社

通信地址：西安市友谊西路 127 号 **邮编**：710072

电　　话：(029)88493844　88491757

网　　址：www.nwpup.com

印 刷 者：陕西向阳印务有限公司

开　　本：787 mm×960 mm　1/16

印　　张：5.125

字　　数：106 千字

版　　次：2006 年 6 月第 1 版　2006 年 9 月第 2 次印刷

印　　数：4 001～8 000 册

定　　价：8.00 元

前 言

矢量分析与场论是工程数学之一，是数学、物理及许多工程类专业的数学基础课.

本书按照目前高校普遍采用的国家级优秀教材《矢量分析与场论》(第二版，谢树艺主编，高等教育出版社出版)的章节顺序，分为四章，各章均设计了四个板块，即内容点睛、经典例题、习题精解和综合练习.

· 内容点睛：列出了基本概念、主要内容及定理，对核心内容及难点作了不同程度的讲解，如第四章给出了梯度、散度、旋度、调和量的有别于教材的导出方法.

· 经典例题：精选矢量分析与场论中的一些基本问题作了较为详尽的解答. 这些例题的内容涉及电磁学、流体力学等，类型与技巧涉及初等场论中大部分常见情况. 由于学时所限，要扩充内容，又不致使篇幅过大，例题只能选得稍有别于习题，从而才能在有限的时间内，提高学习效率，提升分析解决问题的能力.

· 习题精解：对教材《矢量分析与场论》(第二版，谢树艺主编，高等教育出版社出版)中的习题全部做了解答，方便读者在解题后对照和分析.

· 综合练习：提供进一步的强化训练，检验复习效果，培养独立处理问题的能力. 对部分难题给出了简单提示或参考答案，有理由相信认真学完本书的同学基本能够独立完成综合练习.

本书按以上思路编写，篇幅有些偏大，部分内容稍显偏难，目的在于满足不同学校、不同读者的需要. 课程的具体要求请读者以大纲为准或以授课教师要求为准. 书中打了“*”的部分为超出大纲的内容或稍难的习题.

感谢西安电子科技大学李广民教授的热情帮助.

由于编者水平所限，不妥之处在所难免，恳请读者批评指正.

任保文

2006 年 1 月

于西安电子科技大学

目　录

第 1 章　矢量分析

1.1　内容点睛

1.1.1　矢性函数

1. 矢性函数的概念

常用矢性函数的定义如下：$\boldsymbol{A}=A_x(t)\boldsymbol{i}+A_y(t)\boldsymbol{j}+A_z(t)\boldsymbol{k}$，其中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，分别为沿 x,y,z 三个坐标轴正向的单位矢量，一个矢性函数与三个数性函数是一一对应的关系，多参变量类似.

2. 矢端曲线

把 $\boldsymbol{A}(t)$ 的定义点取在坐标原点，这样，当 t 变化时 $\boldsymbol{A}(t)$ 的终点 p 就描画出一条曲线 l，l 称为矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 的矢端曲线，或称 $\boldsymbol{A}(t)$ 为曲线 l 的矢量方程. 若 $\boldsymbol{A}(t)=\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，则称之为矢径，常用 $\boldsymbol{r}$ 表示.

3. 矢性函数的极限和连续性

(1) 矢性函数极限的定义：

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{A}(t)=\boldsymbol{l}.$$

设 $\boldsymbol{A}=A_x(t)\boldsymbol{i}+A_y(t)\boldsymbol{j}+A_z(t)\boldsymbol{k}$，则在 t_0 处有极限的充要条件是 $A_x(t),A_y(t),A_z(t)$ 在 t_0 处有极限，此时有

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{A}(t)=\lim_{t\to t_0}A_x(t)\boldsymbol{i}+\lim_{t\to t_0}A_y(t)\boldsymbol{j}+\lim_{t\to t_0}A_z(t)\boldsymbol{k},$$

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{A}(t)+\boldsymbol{B}(t)]=\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{A}(t)+\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{B}(t),$$

$$\lim_{t\to t_0}f(t)\boldsymbol{A}(t)=\lim_{t\to t_0}f(t)\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{A}(t),$$

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}(t)]=\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{A}(t)\cdot\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{B}(t),$$

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{A}(t)\times\boldsymbol{B}(t)]=\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{A}(t)\times\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{B}(t).$$

(2) 矢性函数连续性的定义：

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{A}(t)=\boldsymbol{A}(t_0).$$

1.1.2 矢性函数的导数和微分

1. 矢性函数的导数

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}(t)}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{A}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{A}(t+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t)}{\Delta t},$$

$$\boldsymbol{A}=A_x(t)\boldsymbol{i}+A_y(t)\boldsymbol{j}+A_z(t)\boldsymbol{k},$$

记为$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$或$\boldsymbol{A}'(t)$，

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}(t)}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{A}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A_x}{\Delta t}\boldsymbol{i}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A_y}{\Delta t}\boldsymbol{j}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A_z}{\Delta t}\boldsymbol{k}=\frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}.$$

2. 导数的几何意义

$\boldsymbol{A}(t)$的导数$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}(t)}{\mathrm{d}t}$在几何上为矢端曲线的切向矢量，恒指向对应$t$值增大的一方.

3. 矢性函数的微分

(1) 微分的概念与几何意义：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}'(t)\mathrm{d}t=A'_x(t)\mathrm{d}t\,\boldsymbol{i}+A'_y(t)\mathrm{d}t\,\boldsymbol{j}+A'_z(t)\mathrm{d}t\,\boldsymbol{k},$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\mathrm{d}A_x(t)\boldsymbol{i}+\mathrm{d}A_y(t)\boldsymbol{j}+\mathrm{d}A_z(t)\boldsymbol{k}.$$

(2) $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}S}$的几何意义：

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}x\,\boldsymbol{i}+\mathrm{d}y\,\boldsymbol{j}+\mathrm{d}z\,\boldsymbol{k},$$

$$\mathrm{d}S=|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2},$$

$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}S}$为切线方向单位矢量.

1.1.3 矢性函数的导数公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\pm\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t},\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(k\boldsymbol{A})=k\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\quad(k\text{ 为常数}),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t},\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A^2)=2\boldsymbol{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}=2A\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t},\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}[u(t)]=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}.$$

1.1.4 矢性函数的积分

1. 矢性函数的不定积分(k,$\boldsymbol{a}$为常量)

$$\int\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t=\boldsymbol{B}(t)+\boldsymbol{C},\qquad \int k\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t=k\int\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t,$$

$\int a u(t)\mathrm{d}t = a\int u(t)\mathrm{d}t$，　　$\int \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{a}\cdot\int\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t$，

$\int \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{a}\times\int\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t$，　　$\int\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{i}\int A_x(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{j}\int A_y(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{k}\int A_z(t)\mathrm{d}t$.

2. 矢性函数的定积分

$$\int_{T_1}^{T_2}\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t = \lim_{\substack{n\to\infty\\ \lambda\to 0}}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}(\xi_i)\Delta t_i,$$

$$\int_{T_1}^{T_2}\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{B}(T_2) - \boldsymbol{B}(T_1),$$

$$\int_{T_1}^{T_2}\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{i}\int_{T_1}^{T_2}A_x(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{j}\int_{T_1}^{T_2}A_y(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{k}\int_{T_1}^{T_2}A_z(t)\mathrm{d}t\,.$$

1.2　经典例题

例 1-1　求矢径 $\boldsymbol{r}(x,y) = t^2\boldsymbol{i} + (t-1)^2\boldsymbol{j}$ 终点的轨迹方程.（参数 $t > 0$.）

解　由 $x = t^2, y = (t-1)^2$ 可得出 $y = (\sqrt{x}-1)^2 = x + 1 - 2\sqrt{x}$ 表示抛物线 $y = x + 1 \pm 2\sqrt{x}$ 的下支. $y = x + 1$ 是垂直于 x 轴的弦的中点的轨迹，$2\sqrt{x}$ 为半弦长. 常见错解为 $\sqrt{y} = \sqrt{x} - 1$. 注意函数的定义域与值域以及运算的可逆性条件.

例 1-2　求矢径 $\boldsymbol{r}(x,y,z) = \sin t\,\boldsymbol{i} + \sin t\,\boldsymbol{j} + \sqrt{2}\cos\,\boldsymbol{k}$ 终点的轨迹方程及在 $t = \frac{\pi}{4}$ 处的切矢量.

解　因 $x = \sin t, y = \sin t, z = \sqrt{2}\cos t$，所以轨迹方程为$[y = x, x^2 + y^2 + z^2 = 2]$. 其为过球心的平面与球面的交线，即一个大圆.

切矢量为 $\boldsymbol{\tau} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \cos t\,\boldsymbol{i} + \cos t\,\boldsymbol{j} + \sqrt{2}\sin t\,\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{\tau}|_{t=\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.

例 1-3　证明定长矢量 $\boldsymbol{a}(t)$ 与它的导数 $\boldsymbol{a}'(t)$ 垂直，其逆亦真.

证明　由题设，因 $|\boldsymbol{a}(t)|^2 = c$ 即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = c$，有 $2\boldsymbol{a}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} = 0$，$|\boldsymbol{a}(t)| \neq 0$. 所以 $\boldsymbol{a}(t)$ 与 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}(t)}{\mathrm{d}t}$ 垂直.

若 $\boldsymbol{a}(t)$ 与 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}(t)}{\mathrm{d}t}$ 垂直，则 $\boldsymbol{a}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} = 0$，由 $2\boldsymbol{a}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\,|\boldsymbol{a}(t)|^2}{\mathrm{d}t} = 0$，故 $|\boldsymbol{a}(t)|^2 = c$.

例 1-4　证明极坐标系径向单位矢量为 $\boldsymbol{e}(\varphi) = \cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \sin\varphi\,\boldsymbol{j}$，横向单位矢量为 $\boldsymbol{e}_1(\varphi) = -\sin\varphi\,\boldsymbol{i} + \cos\varphi\,\boldsymbol{j}$，且有 $\boldsymbol{e}'(\varphi) = \boldsymbol{e}_1(\varphi)$，$\boldsymbol{e}'_1(\varphi) = \boldsymbol{e}(\varphi)$.

证明　因矢径为 $\boldsymbol{r} = r\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + r\sin\varphi\,\boldsymbol{j}$，单位化为$\dfrac{\boldsymbol{r}}{r} = \cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \sin\varphi\,\boldsymbol{j}$，记为

$$e(\varphi)=\cos\varphi\,\boldsymbol{i}+\sin\varphi\,\boldsymbol{j}.$$

横向垂直于径向，将 $\boldsymbol{e}_1(\varphi)$ 旋转$\frac{\pi}{2}$得

$$\boldsymbol{e}\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\boldsymbol{i}+\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\boldsymbol{j}=-\sin\varphi\,\boldsymbol{i}+\cos\varphi\,\boldsymbol{j}.$$

故横向单位矢量记为

$$\boldsymbol{e}_1(\varphi)=-\sin\varphi\,\boldsymbol{i}+\cos\varphi\,\boldsymbol{j}.$$

因而

$$\boldsymbol{e}'(\varphi)=(\cos\varphi\,\boldsymbol{i}+\sin\varphi\,\boldsymbol{j})'=-\sin\varphi\,\boldsymbol{i}+\cos\varphi\,\boldsymbol{j}=\boldsymbol{e}_1(\varphi).$$

$$\boldsymbol{e}'_1(\varphi)=(-\sin\varphi\,\boldsymbol{i}+\cos\varphi\,\boldsymbol{j})'=-(\cos\varphi\,\boldsymbol{i}+\sin\varphi\,\boldsymbol{j})=-\boldsymbol{e}(\varphi).$$

注：在使用极坐标及柱坐标处理问题时，此结论非常有用.

例 1-5 已知 $\boldsymbol{A}(t)=(1+3t^2)\boldsymbol{i}-4t^3\boldsymbol{j}+2t\,\boldsymbol{k}$，求$\int_0^2\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t$.

解 $\int_0^2\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t=\boldsymbol{i}\int_0^2(1+3t^2)\mathrm{d}t-\boldsymbol{j}\int_0^2 4t^3\mathrm{d}t+\boldsymbol{k}\int_0^2 2t\mathrm{d}t=$

$$\left[(t+t^3)\boldsymbol{i}-t^4\boldsymbol{j}+t^2\boldsymbol{k}\right]\Big|_0^2=10\boldsymbol{i}-16\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}.$$

例 1-6 证明$\int\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t=\boldsymbol{a}\times\int\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t$，其中 $\boldsymbol{a}$ 为常矢量.

证明 因$\int\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t=\int(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times[A_x(t)\boldsymbol{i}+A_y(t)\boldsymbol{j}+A_z(t)\boldsymbol{k}]\mathrm{d}t$，

又 $\int a_x\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t=\int(a_x\boldsymbol{i})\times[A_x(t)\boldsymbol{i}+A_y(t)\boldsymbol{j}+A_z(t)\boldsymbol{k}]\mathrm{d}t=$

$$\int[a_xA_y(t)\boldsymbol{k}-a_xA_z(t)\boldsymbol{j}]\mathrm{d}t=$$

$$a_x\left[\int A_y(t)\mathrm{d}t\,\boldsymbol{k}-\int A_z(t)\boldsymbol{j}\mathrm{d}t\right]=a_x\boldsymbol{i}\times\int\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t.$$

同理有 $\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 分量，相加得

$$\int\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t=\boldsymbol{a}\times\int\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t.$$

例 1-7 在惯性系中，一个质量为 m 的质点在力 $\boldsymbol{f}(x,y,z)$ 作用下，从 M_1 到 M_2 作曲线运动，速度由 $\boldsymbol{v}_1$ 变到 $\boldsymbol{v}_2$，证明$\int_{M_1}^{M_2}\boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2$.（此即单质点动能定理！）

证明 由牛顿第二定律 $\boldsymbol{f}=m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$，两边标乘以元位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 得 $\boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，又 $v^2=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}$，微分得 $v\mathrm{d}v=\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v}$（注：此式很常用！），代入有 $\boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=m\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v}=mv\mathrm{d}v$，由 m 是常量得

$$\boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right),$$

积分有 $$\int_{M_1}^{M_2} \boldsymbol{f} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{v_1}^{v_2} \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2.$$

1.3　习题精解

习题 1

1. 写出下列曲线的矢量方程,并说明它们是何种曲线.

(1) $x = a\cos t, y = b\sin t$;

(2) $x = 3\sin t, y = 4\sin t, z = 3\cos t$.

解　(1) $\boldsymbol{r} = a\cos t\,\boldsymbol{i} + b\sin t\,\boldsymbol{j}$,是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

(2) $\boldsymbol{r} = 3\sin t\,\boldsymbol{i} + 4\sin t\,\boldsymbol{j} + 3\cos t\,\boldsymbol{k}$;是平面 $4x - 3y = 0$ 与圆柱 $x^2 + z^2 = 3^2$ 之交线,为椭圆.

2. 设有定圆 O 与动圆 C,半径均为 a,动圆在定圆外相切而滚动(见图 1-1). 求动圆上一定点 M 所描曲线的矢量方程. [提示:(1) 设开始时间 M 点与 A 点重合;(2) 取 $\angle AOC = \theta$ 为参数;(3) $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM}$.]

解　设 M 点的矢径为 $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r} = x\,\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$, $\angle AOC = \theta$, $\overrightarrow{CM}$ 与 x 轴的夹角为 $2\theta - \pi$;因 $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM}$ 有

$$\boldsymbol{r} = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} = 2a\cos\theta\,\boldsymbol{i} + 2a\sin\theta\,\boldsymbol{j} + a\cos(2\theta - \pi)\boldsymbol{i} + a\sin(2\theta - \pi)\boldsymbol{j},$$

故　$$x = 2a\cos\theta - a\cos 2\theta, y = 2a\sin\theta - a\sin 2\theta.$$

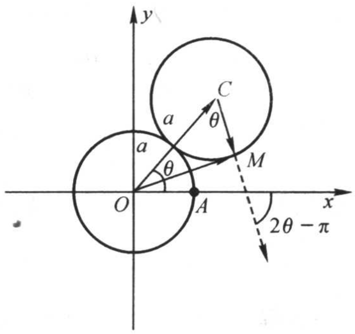

图 1-1

注:此为圆外旋转线

$$x = (a + b)\cos\theta - b\cos\left(\frac{a + b}{b}\theta\right),$$

$$y = (a + b)\sin\theta - b\sin\left(\frac{a + b}{b}\theta\right)$$

的特例,其中 a,b 分别为内外圆半径。

3. (1) 证明 $\boldsymbol{e}(\varphi) \times \boldsymbol{e}_1(\varphi) = \boldsymbol{k}$;

(2) 证明 $\boldsymbol{e}(\varphi + \alpha) = \boldsymbol{e}(\varphi)\cos\alpha + \boldsymbol{e}_1(\varphi)\sin\alpha$.

证明　因 $\boldsymbol{e}(\varphi) = \cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \sin\varphi\,\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{e}_1(\varphi) = -\sin\varphi\,\boldsymbol{i} + \cos\varphi\,\boldsymbol{j}$,则

(1) $$\boldsymbol{e}(\varphi) \times \boldsymbol{e}_1(\varphi) = (\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \sin\varphi\,\boldsymbol{j}) \times (-\sin\varphi\,\boldsymbol{i} + \cos\varphi\,\boldsymbol{j}) = \cos^2\varphi\,\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} - \sin^2\varphi\,\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{k}.$$

(2) $$\boldsymbol{e}(\varphi + \alpha) = \cos(\varphi + \alpha)\boldsymbol{i} + \sin(\varphi + \alpha)\boldsymbol{j} = (\cos\varphi\cos\alpha - \sin\varphi\sin\alpha)\boldsymbol{i} + (\sin\varphi\cos\alpha + \cos\varphi\sin\alpha)\boldsymbol{j} =$$

$$e(\varphi)\cos\alpha + e_1(\varphi)\sin\alpha.$$

4.(1) 设 $\boldsymbol{a}(t),\boldsymbol{b}(t),\boldsymbol{c}(t)$ 均为 t 的可微函数，计算$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})]$；

(2) 若 $\boldsymbol{a}(t)$ 三阶可导，证明$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\boldsymbol{a}\cdot\left(\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}\right)\right]=\boldsymbol{a}\cdot\left(\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\dfrac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^3}\right)$.

解 (1) 因为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}]=\lim_{\Delta\to0}\frac{\Delta(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})}{\Delta t}=\lim_{\Delta\to0}\frac{(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A})\times(\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{B})-(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})}{\Delta t}=$$

$$\lim_{\Delta\to0}\frac{\Delta\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\Delta\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{A}\times\Delta\boldsymbol{B}}{\Delta t}=$$

$$\lim_{\Delta\to0}\frac{\Delta\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}}{\Delta t}+\lim_{\Delta\to0}\frac{\boldsymbol{A}\times\Delta\boldsymbol{B}}{\Delta t}+\lim_{\Delta\to0}\frac{\Delta\boldsymbol{A}\times\Delta\boldsymbol{B}}{\Delta t}=$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t},$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})]=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times[(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})]+\boldsymbol{a}\times\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\right]=$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{a}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{c}}{\mathrm{d}t}.$$

(2) 左边 $=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\cdot\left(\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}\right)+\boldsymbol{a}\cdot\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}\right)=$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}\right)+\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}+\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^3}=$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^3}\right)=\text{右边}.$$

其中用了 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=0,\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B})=0$.

5. 求曲线 $x=a\sin^2t,y=a\sin2t,z=a\cos t$. 在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 处的切矢量.

解

$$\boldsymbol{r}=a\sin^2t\,\boldsymbol{i}+a\sin2t\,\boldsymbol{j}+a\cos t\,\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{\tau}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=a\sin2t\,\boldsymbol{i}+2a\cos2t\,\boldsymbol{j}-a\sin t\,\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{\tau}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=a\,\boldsymbol{i}-a\frac{\sqrt{2}}{2}\,\boldsymbol{k}.$$

6. 求曲线 $\boldsymbol{r}=t\,\boldsymbol{i}+t^2\,\boldsymbol{j}+t^3\,\boldsymbol{k}$ 上这样的点，使该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

解 切线斜率为 $\boldsymbol{\tau}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}+3t^2\boldsymbol{k}$，平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，由题知

$$\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n}=(\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}+3t^2\boldsymbol{k})\cdot(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})=1+4t+3t^2=0,$$

得 $t=-1,-\dfrac{1}{3}$. 故所求点为$(-1,1,-1)$，$\left(\dfrac{-1}{3},\dfrac{1}{9},\dfrac{-1}{27}\right)$.

7. 证明圆柱螺旋线 $\boldsymbol{r}=a\boldsymbol{e}(\theta)+b\,\theta\boldsymbol{k}$ 的切线与 z 轴成定角.

证明　因　$\boldsymbol{\tau}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\theta}=a\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}(\theta)}{\mathrm{d}\theta}+b\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\theta}\boldsymbol{k}$,

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\theta}=a\boldsymbol{e}_1(\theta)+b\,\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{k}=[a\boldsymbol{e}_1(\theta)+b\,\boldsymbol{k}]\cdot\boldsymbol{k}=b=\sqrt{a^2+b^2}\cos\alpha,$$

所以切线与 z 轴成定角 α.

8. 计算$\int\varphi^2\boldsymbol{e}(\varphi)\mathrm{d}\varphi$.

解　由　$\boldsymbol{e}(\varphi)=\cos\varphi\,\boldsymbol{i}+\sin\varphi\,\boldsymbol{j}$，　$\boldsymbol{e}_1(\varphi)=-\sin\varphi\,\boldsymbol{i}+\cos\varphi\,\boldsymbol{j}$,

得
$$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_1(\varphi)=-\boldsymbol{e}(\varphi)\mathrm{d}\varphi,\quad \mathrm{d}\boldsymbol{e}(\varphi)=\boldsymbol{e}_1(\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

又由分部积分法得

$$\int\varphi^2\boldsymbol{e}(\varphi)\mathrm{d}\varphi=\int-\varphi^2\mathrm{d}\boldsymbol{e}_1(\varphi)=-\varphi^2\boldsymbol{e}_1(\varphi)+\int2\varphi\,\boldsymbol{e}_1(\varphi)\mathrm{d}\varphi=-\varphi^2\boldsymbol{e}_1(\varphi)+\int2\varphi\mathrm{d}\boldsymbol{e}(\varphi)=$$

$$-\varphi^2\boldsymbol{e}_1(\varphi)+2\varphi\,\boldsymbol{e}(\varphi)-\int2\boldsymbol{e}(\varphi)\mathrm{d}\varphi=-\varphi^2\boldsymbol{e}_1(\varphi)+2\varphi\,\boldsymbol{e}(\varphi)+2\boldsymbol{e}_1(\varphi)+\boldsymbol{c}.$$

9. 已知$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{P}\times(\boldsymbol{Q}\cos2t+\boldsymbol{R}\sin2t)$，($\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q},\boldsymbol{R}$ 为常矢量)，求 $\boldsymbol{X}$.

解　$\mathrm{d}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\times(\boldsymbol{Q}\cos2t+\boldsymbol{R}\sin2t)\mathrm{d}t$，因为 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q},\boldsymbol{R}$ 为常矢量，所以有

$$\boldsymbol{X}=\int\boldsymbol{P}\times(\boldsymbol{Q}\cos2t+\boldsymbol{R}\sin2t)\mathrm{d}t=\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q}\int\cos2t\mathrm{d}t+\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{R}\int\sin2t\mathrm{d}t=$$

$$\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q}\,\frac{1}{2}\sin2t-\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{R}\,\frac{1}{2}\cos2t+\boldsymbol{c}.$$

10. 设 $\boldsymbol{r}=a\boldsymbol{e}_1(\theta)+b\,\boldsymbol{k}$，求 $\boldsymbol{s}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\theta$.

解　因 $\boldsymbol{r}=a\boldsymbol{e}_1(\theta)+b\,\boldsymbol{k}$，　$\boldsymbol{r}'=a\boldsymbol{e}'_1(\theta)=-a\boldsymbol{e}(\theta)$，

所以
$$\boldsymbol{s}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[(a\boldsymbol{e}_1(\theta)+b\,\boldsymbol{k})\times(-a\boldsymbol{e}(\theta))]\mathrm{d}\theta=$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[(a^2\boldsymbol{k}-ab\boldsymbol{e}_1(\theta))]\mathrm{d}\theta=\pi a^2\boldsymbol{k}.$$

11. 一质点沿曲线 $\boldsymbol{r}=r\cos\varphi\,\boldsymbol{i}+r\sin\varphi\,\boldsymbol{j}$ 运动，其中 r,φ 均为时间 t 的函数.

(1) 求速度 $\boldsymbol{v}$ 在矢径方向及其垂直方向上的投影 v_r 和 v_φ；

(2) 求加速度 $\boldsymbol{a}$ 在同样方向上的投影 a_r 和 a_φ.

[提示：使用圆函数 $\boldsymbol{e}(\varphi)$，则 $\boldsymbol{e}(\varphi)$ 及 $\boldsymbol{e}_1(\varphi)$ 之方向即为矢径方向及与之垂直的方向.]

解　(1) 因 $\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{e}_\varphi$，　$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}[r\boldsymbol{e}(\varphi)]}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\varphi+r\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}(\varphi)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}(\varphi)+\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}r\boldsymbol{e}_1(\varphi)$，

故
$$v_r=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t},\quad v_\varphi=r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}.$$

(2) 求加速度为

$$a=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}(\varphi)+\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}r\boldsymbol{e}_1(\varphi)\right]=$$

$$\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{e}(\varphi)+\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_1(\varphi)+\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}r\boldsymbol{e}_1(\varphi)+\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_1(\varphi)-r\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{e}(\varphi),$$

有
$$\boldsymbol{a}=\left[\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}-r\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}\right]\boldsymbol{e}(\varphi)+\left[2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+r\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}\right]\boldsymbol{e}_1(\varphi),$$

故
$$a_r=\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}-r\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2},\quad a_\varphi=2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+r\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}.$$

12. 求等速圆周运动 $\boldsymbol{r}=R\cos\omega t\,\boldsymbol{i}+R\sin\omega t\,\boldsymbol{j}$ 的速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 和加速度矢量 $\boldsymbol{a}$，并讨论它们与 $\boldsymbol{r}$ 的关系.

解
$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=-\omega R\sin\omega t\,\boldsymbol{i}+\omega R\cos\omega t\,\boldsymbol{j}=\omega R\,\boldsymbol{e}_1(\varphi),\quad \boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{r}.$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-\omega^2R\boldsymbol{e}(\varphi),\quad \boldsymbol{a}=-\omega^2\boldsymbol{r},\quad \boldsymbol{a}\parallel(-\boldsymbol{r}).$$

*13. 已知 $\boldsymbol{A}(t)$ 和一非零常矢量 $\boldsymbol{B}$，恒满足 $\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}=t$，又 $\boldsymbol{A}'(t)$ 和 $\boldsymbol{B}$ 之间的夹角 θ 为常数. 试证明 $\boldsymbol{A}'(t)\perp\boldsymbol{A}''(t)$.

证明 因 $\boldsymbol{B}$ 为常矢量，又 $\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}=t$，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}]=1,\quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}(t)}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}(t)\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}=1,$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}(t)}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{B}=1=|\boldsymbol{A}'(t)||\boldsymbol{B}|\cos\theta$$

由题知 θ 为常数，然而 $|\boldsymbol{A}'(t)|$ 为常数，即 $\boldsymbol{A}'(t)$ 为定长矢量，由定长矢量与其导数垂直得

$$\boldsymbol{A}'(t)\perp\boldsymbol{A}''(t).$$

1.4 综合练习 1

1. 求矢径 $\boldsymbol{r}(x,y)=\sin t\,\boldsymbol{i}+\sin 2t\,\boldsymbol{j}$ 终点的轨迹方程及在 $t=\frac{\pi}{17}$ 处的切矢量.

2. 求矢径 $\boldsymbol{r}(x,y)=7\cos t\,\boldsymbol{i}+4\sin t\,\boldsymbol{j}$ 终点的轨迹方程及平面面积矢量 $\boldsymbol{s}=\frac{1}{2}\int_0^\pi(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}')\mathrm{d}t$.

3. 证明矢性函数的泰勒公式 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)=\boldsymbol{r}(t)+\boldsymbol{r}^{(1)}(t)(\Delta t)+\frac{1}{2!}\boldsymbol{r}^{(2)}(t)(\Delta t)^2+\cdots+\frac{1}{n!}\boldsymbol{r}^{(n)}(t)(\Delta t)^n+\frac{1}{(n+1)!}\boldsymbol{r}^{(n+1)}(\zeta)(\Delta t)^{(n+1)}$.

4. 证明 $\int\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t=\boldsymbol{a}\cdot\int\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t$，其中 $\boldsymbol{a}$ 为常矢量.

5. 试证矢量 $\boldsymbol{A}(t)$ 与矢量 $\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{A}}{A^2}\right)\right]$ 互相垂直.

6. 证明定向矢量 $\boldsymbol{a}(t)$ 与它的导数 $\boldsymbol{a}'(t)$ 平行，其逆亦真. [提示：$\boldsymbol{a}(t)$ 与 $\boldsymbol{a}'(t)$ 平行，即有 $\boldsymbol{a}(t)\times\boldsymbol{a}'(t)=0$.]

7. 试求积分 $\boldsymbol{F}=\int_L I\mathrm{d}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{B}$，其中 I，$\boldsymbol{B}$ 为常量，L 为 $\boldsymbol{r}=a\cos t\,\boldsymbol{i}+b\sin t\,\boldsymbol{j}$，$t\in[0,\pi]$.

第2章　场　论

2.1　内容点睛

2.1.1　场

1. 场的概念

设在空间的某个区域内定义了数量函数或矢量函数，则称定义了相应函数的空间区域为场．若研究的是数量函数则称此场为数量场，研究的是矢量函数则称此场为矢量场．场论就是研究数量场或矢量场数学性质的一门数学分支．

2. 数量(标量)场 u 的等值面

$u = u(x,y,z) = C$ 是将数量场形象化的一种几何方法．

3. 矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的矢量线

若 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(x,y,z) = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$，则 $\boldsymbol{A}\times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$，或$\dfrac{\mathrm{d}x}{A_x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{A_y} = \dfrac{\mathrm{d}z}{A_z}$．矢量线是将矢量场形象化的一种几何方法．矢量面、矢量管也是如此．

4. 平行平面场

平行平面数量(标量)场 $u = u(x,y) = C$，平行平面矢量场 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(x,y) = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j}$．在特殊情况下用平面场近似三维场，这也是一种化繁为简的常用方法．

2.1.2　数量(标量)场的方向导数和梯度

1. 方向导数定义

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = \lim_{\substack{M\to M_0\\ M\in l}} \frac{u(M) - u(M_0)}{\overline{M_0M}}.$$

2. 计算公式

$\dfrac{\partial u}{\partial l} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \dfrac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$，$\boldsymbol{l}$ 方向：$\boldsymbol{l}^0 = \cos\alpha\,\boldsymbol{i} + \cos\beta\,\boldsymbol{j} + \cos\gamma\,\boldsymbol{k}$．

$\dfrac{\partial u}{\partial l} = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}S} = \dfrac{\partial u}{\partial S}$，$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}S}$ 为 u 对 S 的全导数．

3. 梯度定义

与数量(标量)场 $u = u(x,y,z)$ 相关的一个矢量场 $\mathrm{grad}u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$.

4. 梯度的主要性质

(1) 梯度 $\mathrm{grad}u$ 描述了场内任一点 M 邻域内,函数的变化状况,它是标量场非均匀性的量度;

(2) 梯度 $\mathrm{grad}u$ 是与标量场 u 相关联的一个矢量场,即用标量场来描述矢量场;

(3) 梯度 $\mathrm{grad}u$ 的方向与 u 等势面的法线重合,且指向 u 增大的方向,大小是 $\boldsymbol{n}$ 方向的方向导数 $\frac{\partial u}{\partial n}$;

(4) 梯度矢量 $\mathrm{grad}u$ 在任一方向 $\boldsymbol{l}$ 上的投影等于该方向上的方向导数,$\frac{\partial u}{\partial l} = (\mathrm{grad}u)\cdot \boldsymbol{l}^0$;

(5) $\mathrm{grad}u$ 的方向,即等势面的法线方向,是 u 变化最快的方向,$-\mathrm{grad}u$ 是 u 下降最快的方向;

(6) 梯度矢量 $\mathrm{grad}u$ 满足 $\mathrm{d}u = \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{grad}u$,反之,若 $\mathrm{d}u = \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{A}$,则 $\boldsymbol{A} = \mathrm{grad}u$;

(7) 若 $\boldsymbol{A} = \mathrm{grad}u$,则 $\oint_L \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$,反之,若 $\oint_L \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$,则 $\boldsymbol{A} = \mathrm{grad}u$;

(8) 梯度矢量的定义与坐标系的选择无关.

5. 运算公式

(1) $\mathrm{grad}c = \boldsymbol{0}$,

(2) $\mathrm{grad}(cu) = c\,\mathrm{grad}u$,

(3) $\mathrm{grad}(u \pm v) = \mathrm{grad}u \pm \mathrm{grad}v$,

(4) $\mathrm{grad}(uv) = v\,\mathrm{grad}u + u\,\mathrm{grad}v$,

(5) $\mathrm{grad}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{v^2}(v\,\mathrm{grad}u - u\,\mathrm{grad}v)$,

(6) $\mathrm{grad}f(u) = f'(u)\,\mathrm{grad}u$.

2.1.3 矢量场的通量及散度

1. 通量定义

$$\Phi = \iint_S A_n \mathrm{d}S = \iint_S |\boldsymbol{A}||\mathrm{d}\boldsymbol{S}|\cos\theta = \iint_S \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

其中

$$\boldsymbol{A} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k},$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}^0\mathrm{d}S = \mathrm{d}S\cos(n,x)\boldsymbol{i} + \mathrm{d}S\cos(n,y)\boldsymbol{j} + \mathrm{d}S\cos(n,z)\boldsymbol{k} = \mathrm{d}y\mathrm{d}z\,\boldsymbol{i} + \mathrm{d}z\mathrm{d}x\,\boldsymbol{j} + \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,\boldsymbol{k},$$

θ 为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的夹角. 通量 Φ 可能 >0, <0, $=0$,这与法向的选择也有关,是个标量.

闭曲面上的通量

$$\Phi = \oiint_S A_n \mathrm{d}S = \oiint_S |\boldsymbol{A}||\mathrm{d}S|\cos\theta = \oiint_S \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oiint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

正法向向外. 若通量 $\Phi > 0$,内有正源;$\Phi < 0$,内有负源;$\Phi = 0$,不定,正源与负源相消,或无源.

2. 奥氏公式(高斯定理)

设 V 是由分片光滑的闭曲面 S 所围成的有界闭区域,场 $\boldsymbol{A} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ 在区域 V 上有连续的一阶偏导数,则

$$\Phi = \oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的法向量 $\boldsymbol{n}^0$ 由 V 的内部指向外部. V 中可以有若干空腔,V 的边界 S 相应地也就由几部分组成.

3. 散度定义

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} \equiv \lim_{V \to M_0} \frac{\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{V} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

即通量的体积变化率.

4. 散度的主要性质

(1) 散度 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}$ 描述了场内任一点 M 邻域内函数的变化状况,它是矢量场散发或吸收通量的量度;

(2) 散度 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}$ 是与矢量场 $\boldsymbol{A}$ 相关联的一个标量场,即用标量场来描述矢量场;

(3) 散度的定义与坐标系的选择无关.

5. 散度的运算公式

(1) $\mathrm{div}c\boldsymbol{A} = c\,\mathrm{div}\boldsymbol{A}$,

(2) $\mathrm{div}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \mathrm{div}\boldsymbol{A} + \mathrm{div}\boldsymbol{B}$,

(3) $\mathrm{div}u\boldsymbol{A} = u\,\mathrm{div}\boldsymbol{A} + (\mathrm{grad}u) \cdot \boldsymbol{A}$.

6. 平面矢量场的通量和散度定义

$$\boldsymbol{A} = P(x,y)\boldsymbol{i} + Q(x,y)\boldsymbol{j}.$$

(1) 通量定义:$\Phi = \int_l A_n \mathrm{d}l = \int_l \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}l = \int_l \boldsymbol{A} \cdot (\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{k}) = \int_l P\mathrm{d}y - Q\mathrm{d}x$.

(2) 散度定义:$\mathrm{div}\boldsymbol{A} \equiv \lim\limits_{\Delta\sigma \to M_0} \dfrac{\oint_l \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}l}{\Delta S} = \lim\limits_{\Delta\sigma \to M_0} \dfrac{\oint_l \boldsymbol{A} \cdot (\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{k})}{\Delta S}$.

(3) 散度的计算公式:$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y}$.

2.1.4 环量及旋度

1. 环量定义

$$\Gamma = \oint_l \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_l P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z.$$