



高等学校电子信息类专业规划教材

信号处理原理学习指导

王朝英 冯新喜 编 著



清华大学出版社
<http://www.tup.tsinghua.edu.cn>



北京交通大学出版社
<http://press.bjtu.edu.cn>

21 世纪高等学校电子信息类专业规划教材

信号处理原理 学 习 指 导

王朝英 冯新喜 编 著

清华大学出版社
北京交通大学出版社
· 北京 ·

内 容 简 介

本书是《信号处理原理》的教学辅助教材。书中首先简要地归纳总结了《信号处理原理》各章的基本概念和学习要点,包括模拟信号的离散化及重构过程、离散时间信号与系统的时域特性、 z 变换、离散傅里叶变换(DFT 变换)、快速傅里叶变换(FFT 变换)、数字滤波器的常见实现形式、IIR 数字滤波器及 FIR 的数字滤波器设计技术;其次在每章中给出了学习要点的 MATLAB 实现,这将有助于提高读者的科学计算能力;最后给出了教材各章习题的详细解答。

本书可与《信号处理原理》配套使用,也可供高等院校相关专业的学生、从事信息处理专业技术人员学习参考。

版权所有,翻印必究。举报电话:010-62782989 13501256678 13801310933

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

本书防伪标签采用特殊防伪技术,用户可通过在图案表面涂抹清水,图案消失,水干后图案复现;或将表面膜揭下,放在白纸上用彩笔涂抹,图案在白纸上再现的方法识别真伪。

图书在版编目(CIP)数据

信号处理原理学习指导/王朝英,冯新喜编著. —北京:清华大学出版社;北京交通大学出版社,2006.6

(21 世纪高等学校电子信息类专业规划教材)

ISBN 7-81082-788-X

I. 信… II. ①王… ②冯… III. 信号处理-高等学校-教学参考资料 IV. TN911.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 050256 号

责任编辑:计鑫

出版者:清华大学出版社 邮编:100084 电话:010-62776969

北京交通大学出版社 邮编:100044 电话:010-51686414

印刷者:北京鑫海金澳胶印有限公司

发 行 者:新华书店总店北京发行所

开 本:185×260 印张:11.75 字数:283 千字

版 次:2006 年 6 月第 1 版 2006 年 6 月第 1 次印刷

书 号:ISBN 7-81082-788-X/TN·47

印 数:1~4 000 册 定价:19.00 元

本书如有质量问题,请向北京交通大学出版社质监组反映。对您的意见和批评,我们表示欢迎和感谢。

投诉电话:010-51686043,51686008;传真:010-62225406;E-mail: press@center.bjtu.edu.cn。

前 言

本书是《信号处理原理》的教学辅助教材,内容涵盖教材核心内容的学习指导、学习要点的 MATLAB 实现和教材中习题的解答,可与教材配套使用,也可以单独作为高等院校电子工程、通信工程、计算机技术、自动控制等不同专业学习信号处理原理课程的教学与学习参考书。

在内容编排方面,本书与教材互相补充,在教材中详细介绍的信号处理的基本概念、性质、原理、各种算法及滤波器设计技术等内容本书只作简单归纳总结或直接引用,而对于教材中一些未能深入的问题则做了详细的讲解,例如信号处理的 MATLAB 实现。

本书共分为 8 章,每章包括三方面的内容:

- (1) 学习要点;
- (2) MATLAB 实现;
- (3) 习题解答。

信号的处理涉及大量的数值运算。为了解决比较复杂的信号处理问题,我们必须借助于计算机及其相应软件的支持。早在 20 世纪 90 年代中期, MATLAB 就已被公认为解决信号处理问题的标准软件和开发平台。在编写《信号处理原理》教材时,编者就想把信号处理的概念、原理与 MATLAB 语言结合起来,但由于才疏学浅,总觉得不能很好地处理两者之间的关系,所以最终只是把 MATLAB 放在了教材的附录里,这是一个缺憾。因此在编写学习指导时,由于相关的概念均已在教材中详细讨论过,所以在每一章就可以详细讨论相关内容的 MATLAB 实现了,希望能弥补在教材中的缺憾。在讨论过程中,着重用 MATLAB 诠释信号处理的概念及设计技术,希望使读者能清楚地了解解决实际问题的思路和算法,提高读者学以致用及科学计算的能力。

在习题解答部分,着重阐述解题的思路及对问题的分析。在学习过程中,读者最好先独立地求解习题,然后再对照习题解答纠正概念和解法的错误,在做题过程中使独立解决问题的能力有所提高。

本书在编写过程中得到了刘作良、周生炳、任邵东、姚佩阳等教授的精心指导和大力支持,他们提出了很多宝贵的意见和建议,使得本书得以顺利完成;王曦、马亮、季鹏、李珉、张利剑、金锐等参与了部分的文字录入工作;曹锦、肖李珍等在校对方面付出了艰辛劳动,在这里一并表示诚挚的感谢。同时,在编写过程中参阅了大量有关的参考文献,借用了其中的一些内容和习题,同时借鉴了这些作者的宝贵经验,在此向所有参考文献的作者表示诚挚的谢意。另外,对出版社编辑的辛勤劳动表示深深的谢意。由于时间仓促,更限于作者的水平,书中难免存在一些错误和不足,敬请广大读者批评指正。

编 者

2006 年 5 月

目 录

第 1 章 模拟信号的离散化和重构	(1)
1.1 学习要点	(1)
1.1.1 模拟信号、离散时间信号和数字信号	(1)
1.1.2 采样定理	(2)
1.1.3 正弦信号采样的特点	(3)
1.1.4 模拟信号的重构	(3)
1.1.5 模拟信号的量化	(5)
1.2 模拟信号采样与重构的 MATLAB 仿真	(6)
1.3 教材第 1 章习题解答	(7)
第 2 章 离散时间信号和离散时间系统	(17)
2.1 学习要点	(17)
2.1.1 离散时间信号及其运算	(17)
2.1.2 离散时间系统	(19)
2.1.3 线性时不变系统的时域表征	(20)
2.2 MATLAB 实现	(21)
2.2.1 常用典型信号的 MATLAB 实现	(21)
2.2.2 序列运算的 MATLAB 实现	(22)
2.2.3 差分方程递推解法的 MATLAB 实现	(25)
2.3 教材第 2 章习题解答	(27)
第 3 章 z 变换	(44)
3.1 学习要点	(44)
3.1.1 z 变换	(44)
3.1.2 逆 z 变换	(45)
3.1.3 z 变换的性质和定理	(48)
3.1.4 系统函数	(50)
3.1.5 频率响应	(51)
3.2 MATLAB 实现	(53)
3.2.1 利用 MATLAB 求逆 z 变换	(53)
3.2.2 利用 MATLAB 求系统的频率响应	(54)
3.3 教材第 3 章习题解答	(56)
第 4 章 离散傅里叶变换	(74)
4.1 学习要点	(74)
4.1.1 序列傅里叶变换的定义及性质	(74)
4.1.2 周期序列的离散傅里叶级数	(76)

4.1.3	傅里叶变换的几种可能形式的归纳总结	(77)
4.1.4	离散傅里叶变换(DFT)	(78)
4.1.5	DFT的应用	(80)
4.2	MATLAB 实现	(82)
4.2.1	利用 MATLAB 计算 DTFT	(82)
4.2.2	利用 MATLAB 计算 DFS	(83)
4.2.3	利用 MATLAB 计算 DFT	(84)
4.2.4	DFT 的应用	(85)
4.3	教材第 4 章习题解答	(87)
第 5 章	快速傅里叶变换	(100)
5.1	学习要点	(100)
5.1.1	DFT 的计算量及特点	(100)
5.1.2	快速算法的特点及基本思路	(100)
5.2	MATLAB 实现	(102)
5.3	教材第 5 章习题解答	(104)
第 6 章	数字滤波器实现	(112)
6.1	学习要点	(112)
6.1.1	差分方程与滤波器	(112)
6.1.2	IIR 系统的实现方式	(112)
6.1.3	FIR 系统的实现方式	(116)
6.2	MATLAB 实现	(119)
6.3	教材第 6 章习题解答	(122)
第 7 章	IIR 滤波器的设计	(135)
7.1	学习要点	(135)
7.1.1	IIR 数字滤波器的性能指标	(135)
7.1.2	模拟低通滤波器的设计	(136)
7.1.3	模拟滤波器的频率变换	(139)
7.1.4	用模拟 IIR 滤波器设计 IIR 数字滤波器	(141)
7.2	MATLAB 实现	(143)
7.3	教材第 8 章习题解答	(148)
第 8 章	FIR 滤波器的设计	(160)
8.1	学习要点	(160)
8.1.1	FIR 滤波器线性相位的特点	(160)
8.1.2	FIR 数字滤波器的设计方法	(161)
8.2	MATLAB 实现	(165)
8.3	教材第 9 章习题解答	(171)
参考文献		(181)

第 1 章 模拟信号的离散化和重构

教材第 1 章主要讨论模拟信号的离散化与重构,由于数字信号处理具有模拟信号处理不可比拟的优点,因此本书第 1 章的目的是为用数字信号处理方法处理模拟信号打下良好的基础。总的来说,模拟信号的数字处理分为三个阶段:

(1) 模拟信号数字化,换句话说,信号被采样,然后量化成有限的位,这个过程称为 A/D 转换;

(2) 采用数字信号处理方法处理数字化的样本;

(3) 用模拟重构器(D/A 转换)把处理结果转换回模拟形式。

其原理如图 1-1 所示。

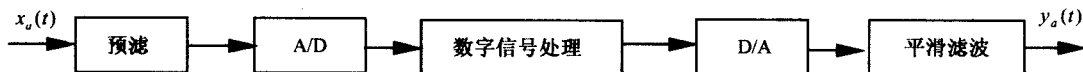


图 1-1 模拟信号的数字处理框图

本章主要介绍模拟信号的数字化和模拟信号的重构。

1.1 学习要点

1.1.1 模拟信号、离散时间信号和数字信号

本章涉及三种类型的信号:模拟信号、离散时间信号和数字信号。我们首先应澄清这些信号的区别。

模拟信号:也称连续时间信号,通常其自变量取连续值,因变量取任意值,大多数实际信号属于此类信号。

离散时间信号:自变量只在离散的时刻上定义,通常模拟信号经采样后得到的信号即为离散时间信号,因此因变量仍是可以连续取值的模拟量;换句话说,若离散时间信号由模拟信号采样所得,在采样时刻,离散信号的值严格等于原模拟信号的值,但也有一些离散时间信号是固有的,例如每天计算一次利息等。

数字信号:自变量和因变量均取离散值的信号,例如采样信号量化后即可得数字信号,由此看出,量化后所得的数字信号与原模拟信号的采样值之间不可避免地存在着误差——量化误差;同样在实际应用中也存在数字信号,例如每日股票的市场价格、人口的统计数和仓库的存量等。

在频域讨论上述各种信号时,总会涉及模拟角频率、模拟频率和数字频率的概念,这是很多人容易混淆的问题,读者应注意这些概念之间的联系和区别。

模拟角频率由 Ω 表示,其单位为弧度/秒,模拟频率由 f 表示,其单位为 Hz,两者之间的关系为

$$\Omega = 2\pi f \quad (1-1)$$

数字角频率用 ω 表示,其单位为弧度,与模拟角频率 Ω 的关系为

$$\omega = \Omega t \quad (1-2)$$

1.1.2 采样定理

采样定理:若连续信号 $x(t)$ 是有限带宽的,其频谱的最高频率为 f_c ,对 $x(t)$ 采样时,若保证采样频率

$$f_s \geq 2f_c \quad (\text{或 } \Omega_s \geq 2\Omega_c) \quad (1-3)$$

那么,可由采样信号 $x(nT)$ 恢复出 $x(t)$,即 $x(nT)$ 保留了 $x(t)$ 的全部信息。

使频谱不发生混叠的最小采样频率 $f_s = 2f_c$,称为 Nyquist 率。对于任意的采样频率 f_s , $f_s/2$ 称为 Nyquist 频率或折叠频率,它定义了 Nyquist 区间的端点,即 Nyquist 的区间为

$$[-f_s/2, f_s/2]$$

模拟信号 $x(t)$ 与采样信号 $\hat{x}(t)$ 的关系为

$$\text{时域:} \quad \hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT) \quad (1-4)$$

$$\text{频域:} \quad \hat{X}(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j\Omega - jk\Omega_s) \quad (1-5)$$

下面是采样定理的含义。

(1) 从频域考察,采样信号的频谱是原模拟信号的频谱以 Ω_s 为周期,进行周期性延拓而成的。注意,其幅度降为原来的 $1/T$,如图 1-2 所示,设 $x(t)$ 为带宽有限信号,最高截止频率为 Ω_c ,其频谱如图 1-2(a) 所示,经过采样(采样频率为 Ω_s ,采样信号频谱如图 1-2(b) 所示)后的离散信号的频谱如图 1-2(c) 所示,由图可以看出,若 $\Omega_s \geq \Omega_c$,或用频率表示为 $f_s \geq 2f_c$,则原模拟信号的频谱(称为基带频谱)与其他周期延拓形成的谱不重叠,因此可以用理想低通滤波器从采样信号中不失真地提取原模拟信号。反之,若 $f_s \leq 2f_c$,则会出现频谱混叠,如图 1-2(d) 所示。这种情况,用理想低通滤波器滤波后得到的则是失真信号,而不是原信号。

(2) 实际中的信号并不全都是带宽有限的,因此为了防止混叠,在采样前必须用低通滤波器进行滤波。这就是图 1-1 框图中出现的第一个框预滤的原因。为了使用所希望的频率 f_s 对信号进行采样,并且满足采样定理的要求,信号必须经过一个模拟低通滤波器进行预滤,我们把它称作抗混叠预滤波器。预滤波器的截至频率 $f_{\max}$ 最大不能超过 $f_s/2$,即 $f_{\max} \leq f_s/2$ 。

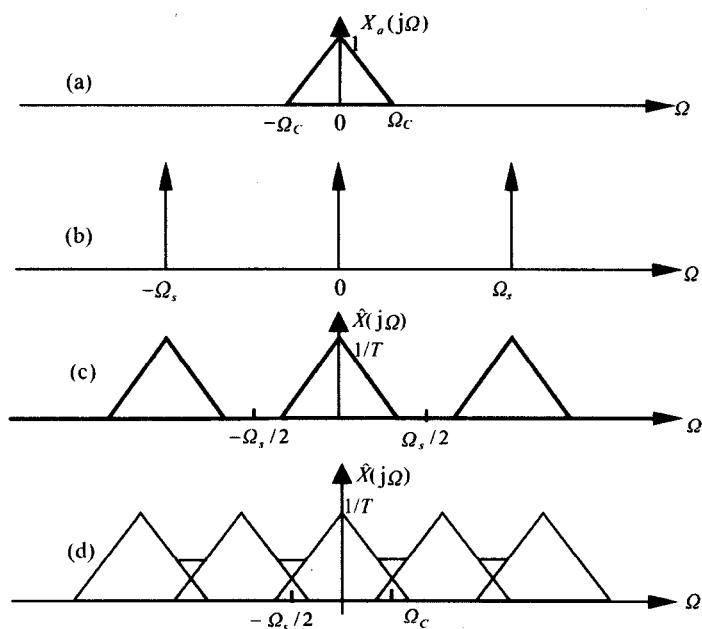


图 1-2 采样信号的频谱

1.1.3 正弦信号采样的特点

正弦信号的周期性及线谱特性决定其采样有一些特殊性。

(1) 为了保证对任意相位正弦信号 $x(t) = A\sin(2\pi f_0 t + \varphi)$ 的正确采样,只要在一个周期内均匀抽取三个点,即可由 $x(n)$ 重建原信号 $x(t)$ 。

(2) 假定有一正弦信号族为

$$x_k(t) = A\sin(2\pi(f_0 + kf_s)t + \varphi) \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1-6)$$

其中 f_s 为采样频率。在采样频率 f_s 对正弦信号采样时,所得的离散信号 $x(nT)$ 所对应的模拟信号并不唯一,它可能来自于式(1-6)所示的正弦信号族。这一现象称为正弦信号采样的不确定性。但在 $x_k(t)$ 正弦信号族中,位于 Nyquist 区间内的频率是唯一的,这可通过原始频率 f 按 f_s 取模得到,即

$$f_a = f \bmod(f_s) \quad (1-7)$$

这就是正弦信号通过截至频率为 $f_s/2$ 的模拟重构器后恢复出来的正弦信号频率,因此,重构的正弦信号为

$$x_a(t) = A\sin(2\pi f_a t + \varphi) \quad (1-8)$$

由此看出,只有当 f 位于 Nyquist 区间内 ($|f| \leq f_s/2$),即符合采样定理时, $f_a = f$ 。如果 f 位于 Nyquist 区间外,即 $|f| \geq f_s/2$,不满足采样定理条件,则混叠频率 f_a 与原始频率 f 不同,因此重构的模拟信号与原始信号不同,虽然在采样点上两者值相同。

1.1.4 模拟信号的重构

模拟信号的重构从某种意义上说是对采样信号的低通滤波。假定模拟信号为 $y(t)$,采

样信号为 $\hat{y}(t)$, 模拟重构器的单位脉冲响应为 $h(t)$, 其重构的模拟信号为 $y_a(t)$, 我们可得它们之间的关系为

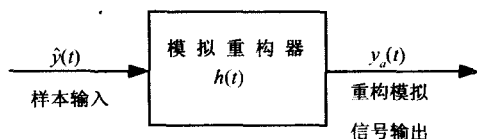


图 1-3 模拟重构器

时域:

$$y_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) \hat{y}(\tau) d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(nT) h(t - nT) \quad (1-9)$$

频域:

$$Y_a(j\Omega) = H(j\Omega) \hat{Y}(j\Omega) \quad (1-10)$$

其中

$$\hat{Y}(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y(j\Omega - jk\Omega_s)$$

选择不同形式的 $h(t)$, 可得不同的重构器。

(1) 理想重构器

理想重构器 $Y(j\Omega)$ 是一理想低通滤波器, 其截至频率为 $\Omega_s/2$ 或用频率表示为 $f_s/2$, 即

$$H(j\Omega) = \begin{cases} T & |\Omega| \leq \Omega_s/2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (1-11)$$

其中幅度 T 抵销了式(1-5)中因子 $1/T$ 的作用。

时域:

$$h(t) = \frac{\sin(\Omega_s t/2)}{\Omega_s t/2} = \frac{\sin(\pi f_s t)}{\pi f_s t} = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} \quad (1-12)$$

重构的模拟信号为

时域:

$$\begin{aligned} y_a(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(nT) h(t - nT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(nT) \frac{\sin(\pi(t - nT)/T)}{\pi(t - nT)/T} \end{aligned} \quad (1-13)$$

频域: 在 Nyquist 区间

$$Y_a(j\Omega) = H(j\Omega) \hat{Y}(j\Omega) = T \cdot \frac{1}{T} Y(j\Omega) = Y(j\Omega) \quad (1-14)$$

$h(t)$ 保证了在各个采样点上, 即 $t = nT$ 时, 重构的 $y_a(t)$ 等于原采样值, 而在采样点间, 则是由各采样点乘以 $h(t - nT)$ 的波形伸展叠加填补而成。由于 $h(t)$ 函数所起的作用是在各采样点之间内插, 因此称它为内插函数, 由式(1-14)可看出, 理想重构器可完全重构原模拟信号。不足之处在于理想重构器的脉冲响应是非因果的(当 $t < 0$ 时, $h(t) \neq 0$), 因此它是非物理可实现的。在实际应用中通常采用零阶保持重构器。

(2) 零阶保持重构器

时域:

$$h(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (1-15)$$

频域:

$$H(j\Omega) = T \frac{\sin(\Omega t/2)}{\Omega t/2} e^{-j\Omega T/2} \quad (1-16)$$

零阶保持重构器又称阶梯重构器,它仍残余有高频分量,因此,阶梯重构器不能像理想重构器那样完全消除原模拟信号的复制或镜像。频谱复制或镜像的残余部分可以通过附加的后低通滤波器滤除,这个滤波器称为抗镜像后滤波器,它的截止频率为折叠频率 $f_s/2$ 。从时域看,后滤波器的效果是使阶梯输出变得光滑。从频域看,阶梯重构器后跟着抗镜像滤波器,其总体效果就是尽可能地滤除频谱镜像的残余部分,尽量逼近理想重构器。

1.1.5 模拟信号的量化

采样和量化是模拟信号进行数字信号处理的两个先决条件。在图1-4中,采样器中的保持电容 C 能使每个采样样本 $x(nT)$ 的值保持 T 秒钟,在这段时间内,A/D转换器必须把它转换成有限位数代表的(用 B 位来表示)量化样本 $x_q(nT)$,然后送至数字信号处理器处理完后,得到的结果送至D/A转换,把数字信号转换回模拟信号。

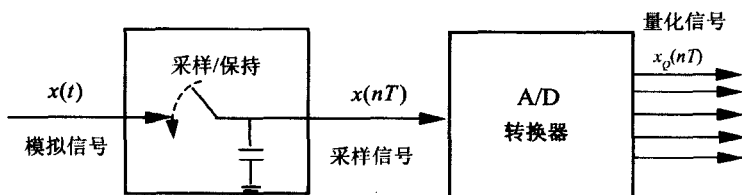


图1-4 模拟到数字信号的转换

假定A/D转换器的量程为 R ,若A/D转换是双极性的,量化范围 $-\frac{R}{2} \leq x_q(nT) \leq \frac{R}{2}$;若A/D转换是单极性,则量化范围为 $0 \leq x_q(nT) \leq R$ 。它被均匀等分为(对均匀量化器来说) 2^B 个量化电平,量化电平的间隔,称为量化步长或量化分辨率为

$$Q = \frac{R}{2^B} \quad (1-17)$$

$x(t)$ 的量化方式有:①四舍五入,即用最近的量化电平来代替每个 $x(t)$ 的值;②截短,即用来代替 $x(t)$ 的量化电平的总是小于 $x(t)$ 。在实际应用中,由于四舍五入所带来的量化误差较小,因此较为常用。

三种常见的编码为:①单极性自然二进制码;②双极性偏移二进制码;③双极性补码。三种编码的输入/输出关系如下表所示。

表 1-1 三种编码的输入/输出关系

转换器编码类型	输入/输出关系
自然二进制	$x_Q = R(b_1 2^{-1} + b_2 2^{-2} + \cdots + b_B 2^{-B})$
偏移二进制	$x_Q = R(b_1 2^{-1} + b_2 2^{-2} + \cdots + b_B 2^{-B} - 0.5)$
二进制补码	$x_Q = R(\bar{b}_1 2^{-1} + b_2 2^{-2} + \cdots + b_B 2^{-B} - 0.5)$

需要注意的是得到的最大量化值达不到满量程值,而是比满量程值小一个量化步长。

1.2 模拟信号采样与重构的 MATLAB 仿真

用 MATLAB 仿真模拟信号采样与重构过程时,所涉及和需要注意的问题如下。

(1) 用 MATLAB 仿真模拟信号时,严格地说,由于计算机处理的是数字信号,不能完全表示模拟变量,因此只能把时间 t 间隔取得很密,因变量取双精度格式来仿真。

(2) 采样信号通过设定采样间隔来得到,也就是说,按采样周期设定时间 t 的取值间隔,就可得到采样信号。

(3) 由于量化方式有两种,所以对应的 MATLAB 语句有两种。

```
xq = round(x/deltax) * deltax;           % 采用四舍五入方式的量化信号
xq = floor(x/deltax) * deltax;           % 采样截短方式的量化信号
```

(4) 用阶梯重构器重构的模拟信号可用下面的语句画出。

```
stairs(n * T, xq);
```

下面用一个具体例子来说明仿真过程。

【例 1.1】若模拟信号为 $x_a(t) = \sqrt{t} - \cos t$ $0 \leq t \leq 5s$

(1) 设采样周期 $T = 0.5s$,求采样信号的值。

(2) 假定 A/D 转换器的量程为 10V,二进制位数 $B = 4$,求采样信号各对应量化电平。

(3) 画出模拟信号、采样信号、量化电平的图形;画出阶梯重构器重构的模拟信号波形。

解:由已知,得量化间隔为:

$$Q = \frac{R}{2^B} = \frac{10}{2^4} = 0.625 \text{ V}$$

其 MATLAB 程序如下:

```
t = 0:0.001:5;           % 设置模拟信号的自变量
xa = sqrt(t) - cos(t);    % 求模拟信号的值
T = 0.5; n = 0:5/0.5;    % 设置采样间隔
x = sqrt(n * T) - cos(n * T) % 求模拟信号的采样值
x =
    -1.0000    -0.1705     0.4597     1.1540     1.8304     2.3823
     2.7220     2.8073     2.6536     2.3321     1.9524
% 设置量化间隔
q = 0.625;
```

% 采用四舍五入方式求量化值

```
xq = round(x/q) * q;
```

```
xq =
```

```
-1.2500    0          0.6250    1.2500    1.8750    2.5000
 2.5000    2.5000    2.5000    2.5000    1.8750
```

% 画模拟信号并保持

```
subplot(2,2,1);plot(t,xa);hold on;
```

% 在同一张图上画采样值和量化值

```
plot(n*T,x,'ko');stem(n*T,xq,'k*');
```

% 画出图例标注

```
legend('连续信号 xa','离散信号 x','数字信号 xq',0);
```

% 画出数字信号采样保持后恢复的连续信号曲线

```
subplot(2,2,2);plot(t,xa,'k:');hold on;
```

```
stairs(n*T,xq,'k');
```

画出的图形如图 1-5(a)、(b)所示。

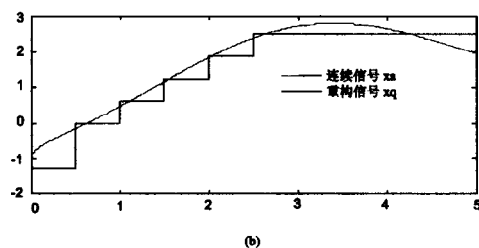
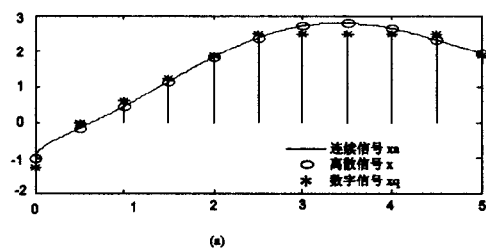


图 1-5 例 1-1 图形

1.3 教材第 1 章习题解答

【1-1】 已知模拟信号为 $x(t) = \cos 2\pi t + 2\cos 4\pi t$, 对其进行理想采样

(1) 为了能不失真地从采样信号中恢复原始信号 $x(t)$, 试问采样间隔应如何选择?

(2) 若采样间隔为 0.2s, 试画出已采样信号的频谱图。

解: (1) 模拟信号 $x(t)$ 有两个分量: $\cos 2\pi t$ 的频率为 1Hz, $2\cos 4\pi t$ 的频率为 2Hz。因此其最高频率为 2Hz, 根据采样定理, 采样频率 f_s 至少应为 $2f_c = 4\text{Hz}$, 所以采样间隔最大为

$$T = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{4} = 0.25\text{s}$$

(2) 采样间隔为 0.2s 时, 采样频率为 5Hz。由 (1) 可知这时不会出现混叠, 因此采样信号的频谱如图 1-6 所示。

【1-2】 已知采样样本序列为

$$x(nT) = \cos\left(\frac{\pi}{8}nT\right)$$

求两个不同的连续时间信号, 对它们以频率 $f_s = 10\text{Hz}$ 采样产生上述样本序列。

解: 通过教材 1.3 节的讨论可知, 正弦信号的采样具有不确定性, 即: 在以采样频率 f_s

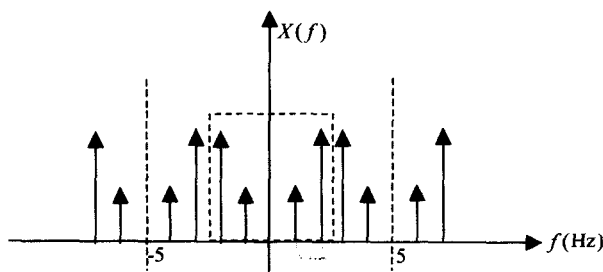


图 1-6 习题 1-1 采样信号的频谱

对正弦信号采样时,所得的离散信号 $x(nT)$ 所对应的模拟信号并不唯一,它可能来自 $\cos(2\pi f_0 t)$ 的正弦信号,也可能来自于 $x_k(nT) = \cos[2\pi(f_0 + kf_s)t]$ 所示的正弦信号族。

所以对应于样本序列 $x(nT) = \cos\left(\frac{\pi}{8}nT\right)$, 其模拟信号为

$$x_a(t) = \cos\left[2\pi\left(\frac{1}{16} + k \cdot 10\right)t\right]$$

取 $k=0, 1$, 则有

$$x_1(t) = \cos\left(\frac{\pi}{8}t\right), x_2(t) = \cos\left(\frac{161\pi}{8}t\right)$$

其中模拟信号 $x_1(t) = \cos\left(\frac{\pi}{8}t\right)$, 样本序列 $x(nT) = \cos\left(\frac{\pi}{8}nT\right)$, 满足采样定理。

【1-3】 已知 $x(t)$ 的 Nyquist 率是 Ω_s , 考察下列从 $x(t)$ 导出的信号的 Nyquist 率。

(1) $\frac{dx(t)}{dt}$

(2) $x(2t)$

(3) $x\left(\frac{1}{2}t\right)$

(4) $x(t)\cos(\Omega_0 t)$

解: (1) 由采样定理可知, $x(t)$ 的 Nyquist 率等于其最高频率的两倍。令

$$y_1(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

则有:

$$Y_1(j\Omega) = j\Omega X(j\Omega)$$

假定 $x(t)$ 的最高截至频率为 Ω_0 , 即若 $|\Omega| > \Omega_0$, 则 $X(j\Omega) = 0$, 这对于上式同样成立。由此可知, 求导不改变 Nyquist 率。

(2) 令 $y_2(t) = x(2t)$

则

$$\begin{aligned} Y_2(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} y_2(t) e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(2t) e^{-j\Omega t} dt \\ &\stackrel{2t=\tau}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} x(\tau) e^{-j(\Omega/2)\tau} d\tau = \frac{1}{2} X\left(\frac{j\Omega}{2}\right) \end{aligned}$$

因此, 如果 $x(t)$ 的 Nyquist 率是 Ω_s , 则 $y_2(t)$ 的 Nyquist 率是 $2\Omega_s$ 。

(3) 令 $y_3(t) = x\left(\frac{1}{2}t\right)$

则:

$$Y_3(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y_3(t) e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(\frac{1}{2}t\right) e^{-j\Omega t} dt$$

$$\stackrel{\frac{1}{2}t = \tau}{=} \int_{-\infty}^{\infty} 2x(\tau) e^{-j(2\Omega)\tau} d\tau = 2X(j2\Omega)$$

因此,如果 $x(t)$ 的 Nyquist 率是 Ω_s , 则 $y_2(t)$ 的 Nyquist 率是 $\frac{1}{2}\Omega_s$ 。

(4) 令 $y_4(t) = x(t) \cos(\Omega_0 t)$

则: $Y_4(j\Omega) = \frac{1}{2} [X(j(\Omega + \Omega_0)) + X(j(\Omega - \Omega_0))]$

因此 $y_4(t) = x(t) \cos(\Omega_0 t)$ 的 Nyquist 率是 $\Omega_s + 2\Omega_0$ 。

【1-4】 假定模拟信号为 $x(t) = 10\sin(2\pi t) + 10\sin(8\pi t) + 5\sin(12\pi t)$, t 的单位为秒, 以采样速率 $f_s = 5\text{Hz}$ 进行采样, 确定混叠信号 $x_a(t)$, 证明两个信号具有同样的样本值。采样速率为 10Hz 时, 重复上述问题。

解: 由已知可得, 模拟信号的三个频率分量为: $f_1 = 1\text{Hz}$, $f_2 = 4\text{Hz}$, $f_3 = 6\text{Hz}$ 。由于 $f_s = 5\text{Hz}$, Nyquist 区间为 $[-2.5, 2.5]\text{Hz}$

$$f_{1a} = f_1 = 1\text{Hz}$$

$$f_{2a} = 4 \bmod(5) = -1\text{Hz}$$

$$f_{3a} = 6 \bmod(5) = 1\text{Hz}$$

所以 $x_a(t) = 10\sin(2\pi t) + 10\sin(-2\pi t) + 5\sin(2\pi t) = 5\sin(2\pi t)$

由 $f_s = 5\text{Hz}$ 可知, 采样周期为 $T = 0.2\text{s}$, 则:

$$\begin{aligned} x(nT) &= 10\sin(2\pi nT) + 10\sin(8\pi nT) + 5\sin(12\pi nT) \\ &= 10\sin(0.4\pi n) + 10\sin(1.6\pi n) + 5\sin(2.4\pi n) \\ &= 10\sin(0.4\pi n) + 10\sin(1.6\pi n - 2\pi n) + 5\sin(2.4\pi n - 2\pi n) \\ &= 10\sin(0.4\pi n) + 10\sin(-0.4\pi n) + 5\sin(0.4\pi n) \\ &= 5\sin(0.4\pi n) \\ &= x_a(nT) \end{aligned}$$

采样速率为 10Hz 时, Nyquist 区间为: $[-5, 5]\text{Hz}$

$$f_{1a} = f_1 = 1\text{Hz}$$

$$f_{2a} = f_2 = 4\text{Hz}$$

$$f_{3a} = 6 \bmod(10) = -4\text{Hz}$$

所以 $x_a(t) = 10\sin(2\pi t) + 10\sin(8\pi t) + 5\sin(-8\pi t) = 10\sin(2\pi t) + 5\sin(8\pi t)$

由 $f_s = 10\text{Hz}$ 可知, 采样周期为 $T = 0.1\text{s}$, 则:

$$\begin{aligned} x(nT) &= 10\sin(2\pi nT) + 10\sin(8\pi nT) + 5\sin(12\pi nT) \\ &= 10\sin(0.2\pi n) + 10\sin(0.8\pi n) + 5\sin(1.2\pi n) \\ &= 10\sin(0.2\pi n) + 10\sin(0.8\pi n) + 5\sin(-0.8\pi n) \\ &= 10\sin(0.2\pi n) + 5\sin(0.8\pi n) \\ &= x_a(nT) \end{aligned}$$

【1-5】 假定模拟信号为 $x(t) = \sin(6\pi t) [1 + 2\cos(4\pi t)]$, t 的单位为毫秒, 以采样速

率 $f_s = 4\text{kHz}$ 进行采样,对所得的样本用理想重构器进行重构,确定重构器的输出信号 $x_a(t)$ 。

$$\begin{aligned}\text{解: } x(t) &= \sin(6\pi t) [1 + 2\cos(4\pi t)] \\ &= \sin(6\pi t) + 2\sin(6\pi t)\cos(4\pi t) \\ &= \sin(2\pi t) + \sin(6\pi t) + \sin(10\pi t)\end{aligned}$$

$x(t)$ 的三个频率分量为: $f_1 = 1\text{kHz}, f_2 = 3\text{kHz}, f_3 = 5\text{kHz}$ 。

$$\begin{aligned}f_{1a} &= f_1 = 1\text{kHz} \\ f_{2a} &= 3 \bmod(4) = -1\text{kHz} \\ f_{3a} &= 5 \bmod(4) = 1\text{kHz}\end{aligned}$$

$$\text{所以 } x_a(t) = \sin(2\pi t) + \sin(-2\pi t) + \sin(2\pi t) = \sin(2\pi t)$$

【1-6】 假定模拟信号为 $x(t) = 4\cos(2\pi t)\cos(8\pi t)\cos(12\pi t)$, t 的单位为秒,以采样速率 $f_s = 10\text{Hz}$ 进行采样,确定混叠信号 $x_a(t)$,证明两个信号具有同样的样本值。采样速率为 12Hz 时,重做上述问题。

$$\begin{aligned}\text{解: } x(t) &= 4\cos(2\pi t)\cos(8\pi t)\cos(12\pi t) \\ &= 2\cos(6\pi t) + \cos(10\pi t)\cos(12\pi t) \\ &= \cos(2\pi t) + \cos(6\pi t) + \cos(18\pi t) + \cos(22\pi t)\end{aligned}$$

4个频率分量: $f_1 = 1\text{Hz}, f_2 = 3\text{Hz}, f_3 = 9\text{Hz}, f_4 = 11\text{Hz}$ 。

采样频率当 $f_s = 10\text{Hz}$ 时, $f_{1a} = 1\text{Hz}, f_{2a} = 3\text{Hz}, f_{3a} = -1\text{Hz}, f_{4a} = 1\text{Hz}$

所以 $x_a(t) = \cos(2\pi t) + \cos(6\pi t) + \cos(-2\pi t) + \cos(2\pi t) = 3\cos(2\pi t) + \cos(6\pi t)$

因为 $f_s = 10\text{Hz}$,则 $T = 0.1\text{s}$

$$\begin{aligned}x(nT) &= \cos(2\pi nT) + \cos(6\pi nT) + \cos(18\pi nT) + \cos(22\pi nT) \\ &= \cos(0.2\pi n) + \cos(0.6\pi n) + \cos(1.8\pi n) + \cos(2.2\pi n) \\ &= \cos(0.2\pi n) + \cos(0.6\pi n) + \cos(-0.2\pi n) + \cos(0.2\pi n) \\ &= 3\cos(0.2\pi n) + \cos(0.6\pi n) = x_a(nT)\end{aligned}$$

当 $f_s = 12\text{Hz}$ 时, $f_{1a} = 1\text{Hz}, f_{2a} = 3\text{Hz}, f_{3a} = -3\text{Hz}, f_{4a} = -1\text{Hz}, T = 1/12\text{s}$

$$\begin{aligned}x_a(t) &= \cos(2\pi t) + \cos(6\pi t) + \cos(-6\pi t) + \cos(-2\pi t) \\ &= 2\cos(2\pi t) + 2\cos(6\pi t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x(nT) &= \cos(2\pi nT) + \cos(6\pi nT) + \cos(18\pi nT) + \cos(22\pi nT) \\ &= \cos\left(\frac{1}{6}\pi n\right) + \cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) + \cos\left(\frac{3}{2}\pi n\right) + \cos\left(\frac{11}{6}\pi n\right) \\ &= \cos\left(\frac{1}{6}\pi n\right) + \cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) + \cos\left(-\frac{1}{2}\pi n\right) + \cos\left(-\frac{1}{6}\pi n\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{1}{6}\pi n\right) + 2\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) = x_a(nT)\end{aligned}$$

【1-7】 设周期为1的三角波如图1-7所示,对它以速率 $f_s = 8\text{Hz}$ 进行采样,对所得的样本用理想重构器进行重构,证明重构的信号 x_{rec} 具有下面的形式:

$$x_{\text{rec}}(t) = A\sin(2\pi f_1 t) + B\sin(2\pi f_2 t)$$

并且确定频率 f_1, f_2 及幅度 A, B 的值。

解: 由图可知,三角波 $T = 1, f = 1, x(t)$ 为奇函数,则其傅立叶级数为:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin 2n\pi f t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin 2n\pi t$$

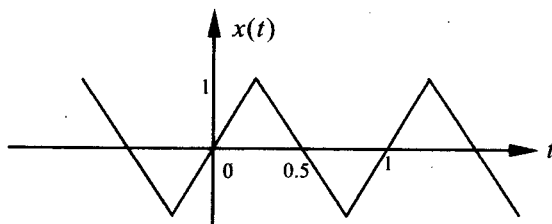


图 1-7 习题 1-7 中的三角波

其中

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{4}{T} \left[\int_0^{0.25} 4t \sin 2n\pi f t dt + \int_{0.25}^{0.5} (2-4t) \sin 2n\pi f t dt \right] \\
 &= 4 \left[\int_0^{0.25} 4t \sin 2n\pi f t dt + \int_{0.25}^{0.5} (2-4t) \sin 2n\pi f t dt \right] \\
 &= 4 \left[\left(\frac{4 \sin 2n\pi f t}{(2n\pi)^2} \right)_0^{0.25} - \left(\frac{4t \cos 2n\pi f t}{2n\pi} \right)_0^{0.25} - 2 \left(\frac{\cos 2n\pi f t}{2n\pi} \right)_{0.25}^{0.5} \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{4 \sin 2n\pi f t}{(2n\pi)^2} \right)_{0.25}^{0.5} + \left(\frac{4t \cos 2n\pi f t}{2n\pi} \right)_{0.25}^{0.5} \right] \\
 &= 4 \left[\frac{8 \sin \frac{n\pi}{2}}{(2n\pi)^2} \right] = \frac{8 \sin \frac{n\pi}{2}}{n^2 \pi^2}
 \end{aligned}$$

因为 $f_s = 8\text{Hz}$, 所以 $f_c = 4\text{Hz}$, 用理想低通滤波器重构后, 三角波所含分量为 $n = 1, 2, 3, 4$ 因此, 有:

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{8 \sin \frac{n\pi}{2}}{n^2 \pi^2} = \frac{8 \sin \frac{\pi}{2}}{\pi^2} = \frac{8}{\pi^2}; & b_2 &= 0; \\
 b_3 &= \frac{8 \sin \frac{n\pi}{2}}{n^2 \pi^2} = \frac{8 \sin \frac{3\pi}{2}}{9\pi^2} = -\frac{8}{9\pi^2}; & b_4 &= 0;
 \end{aligned}$$

所以重构信号为:

$$\begin{aligned}
 x_{\text{rec}}(t) &= A \sin(2\pi f_1 t) + B \sin(2\pi f_2 t) \\
 &= \frac{8}{\pi^2} \sin(2\pi t) - \frac{8}{9\pi^2} \sin(6\pi t)
 \end{aligned}$$

【1-8】 考察下面的声波信号, t 的单位为毫秒,

$$x(t) = \sin(10\pi t) + \sin(20\pi t) + \sin(60\pi t) + \sin(90\pi t)$$

信号首先经模拟抗混叠滤波器 $H(f)$ 预滤, 然后以 40kHz 的速率进行采样, 所得样本用理想重构器进行重构, 在下列情况下确定重构器的输出 $y_a(t)$, 并且与 $x(t)$ 的音频部分相比较。

- (1) 不经过预滤时, 即: $|H(f)| = 1$;
- (2) 当 $H(f)$ 是理想预滤波器时, 其截至频率为 20kHz 。

解: $x(t)$ 所含频率分量为 $f_1 = 5\text{kHz}$ 、 $f_2 = 10\text{kHz}$ 、 $f_3 = 30\text{kHz}$ 、 $f_4 = 45\text{kHz}$

- (1) 在不经预滤时, Nyquist 区间为 $[-20, 20]\text{kHz}$, 则