大学数学多媒体系列教材

总主编 于义良

高等数学基础教程

主编 张银生 安建业

中国人民大学出版社

大学数学多媒体系列教材

总主编 于义良

高等数学基础教程

主　编 张银生 安建业

副主编 李美凤 康玉林 王全文

中国人民大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学基础教程/张银生,安建业主编
北京：中国人民大学出版社,2004
(大学数学多媒体系列教材)
ISBN 7-300-05893-0

Ⅰ.高…
Ⅱ.①张…②安…
Ⅲ.高等数学-高等学校-教材
Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 087818 号

大学数学多媒体系列教材
总主编　于义良
高等数学基础教程
主　编　张银生　安建业
副主编　李美凤　康玉林　王全文

出版发行	中国人民大学出版社		
社　址	北京中关村大街 31 号	邮政编码	100080
电　话	010－62511242(总编室)		010－62511239(出版部)
	010－82501766(邮购部)		010－62514148(门市部)
	010－62515195(发行公司)		010－62515275(盗版举报)
网　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　销	新华书店		
印　刷	北京东君印刷有限公司		
开　本	787×965 毫米 1/16	版　次	2004 年 8 月第 1 版
印　张	19 插页 1	印　次	2006 年 7 月第 2 次印刷
字　数	348 000	定　价	25.00 元

总　序

随着社会的不断进步，科学和技术的不断创新，越来越需要具有一定数学思维和数学修养的高数学素质人才. 因此，在目前高等学校教学计划中，大学数学(包括高等数学、微积分、线性代数、概率论与数理统计等)课程的教学都占有重要或首要的地位.

为了主动适应高等教育从精英教育到大众化教育过渡的需要，尤其是许多学校实行按学科大类招生后，对大学数学课程都实行了分层教学，即按照不同的专业需要设计教学要求. 这样，过去几乎是"一刀切"的大学数学教学内容和教学要求必然就不适合当前大学数学实际教学的需要. 比如理科的应用心理学专业、工科的工业设计专业、管理学科的公共事业管理专业、人文学科的语言类专业或法学专业、高职高专等，这此专业开设大学数学课程的共同点是课时少、大部分学生的数学基础薄弱，是以培养学生数学思维、数学习惯和数学素质的应用数学能力为目的. 所以要选择一套适宜的教材，目前尚不容易. 由此，我们在主持完成天津市教学改革项目《经济数学与信息技术课程整合的研究和实践》的过程中，便萌生了编写一套适应上述新形势需要的大学数学系列教材的想法. 经过近三年的教学实践摸索，两届学生的教学试点经验总结，组织具有多年丰富教学经验的教师通力协作，这套"大学数学多媒体系列教材"终于与大家见面了.

这套教材具有以下显著特点：

1. 传统内容与信息技术的有机融合. 自始至终以培养学生应用数学能力为宗

旨，在激发学生学习兴趣，以及教会学、教会用上下功夫，把信息技术（如 Excel、Mathematica）融入传统教学内容中，每一章都增加了一节数学实验内容，突出学、做相互渗透，将过去只会解条件理想化的书本题目转化为主动去解决自己身边的实际课题.

2. 基本知识与内容体系的合理整合. 自始至终强调基础知识、基本思想、基本方法，删除了重技巧性的繁、难、偏、旧的内容，适度增加了数学思想背景资料和应用前景案例. 也就是将过去“两头轻、中间重、即使学会也无用”的那一套转化为全程式的双向释译，即由实际问题引入，经过抽象归纳得到理论支持，并提出解决方案，再返回去指导实际，甚至推广到更普遍、更广泛的领域. 高等数学在物理、经济、几何、管理方面的应用普遍，线性代数引入许多生活中的实例，概率论与数理统计突出统计背景与应用等，使内容体系更趋合理，这对少学时的本科专业和多学时的高职高专是适合的.

3. 通过这套多媒体系列教材的学习，学生不仅可以学到必需的大学数学基本知识，而且还可以系统地学会和掌握数学软件 Mathematica 和电子表格软件 Excel 的使用，以及获取信息、处理信息的技术.

4. 这套多媒体系列教材都配有教学光盘，其中模拟演示板块数学思想鲜明，将抽象内容可视化、直观化；教学积件板块是开放式和可组合式的，更便于教师根据自己的思路和学生的层次去设计每一节课的内容；单元测试板块既对学生学习情况进行跟踪检验，又对学生掌握单元知识起着重要的学习指导作用.

5. 这套多媒体系列教材在“化抽象为直观、化枯燥为有趣、化技巧为方法、化繁难为简易、化理论性为应用性”诸方面都做了有益的尝试，并收到良好的效果.

我曾到澳大利亚墨尔本 Latrobe 大学学习考察，亲身体验到他们的大学数学教学没有教考分离，但绝对又不是教什么就练什么考什么；他们所讲的内容比我们容易，但培养出来的学生在创新思想和应用数学解决实际问题的能力方面却很强；他们使用的教材没有统一要求，教材很厚，教师课堂讲的很少，大部分是指导学生去阅读实践，非常注重学生数学能力的培养；他们的数学老师不比我们累，但教学质量却比我们好；等等，这不能不引起我们每一个大学数学教育者的反思. 现在，我们奉献给大家的这套大学数学多媒体系列教材也可以说是反思后的一些实践成果.

尽管我们努力了，但可能还会有不尽如人意的地方，敬请广大读者指正. 联系方式是 Email：yuyil@eyou.com

于义良

2004 年 7 月

前言

高等数学提供给人们的不仅是一种高级的数学技术，而且是一种人类进步所必需的文化素质和修养．学习和一定程度地掌握高等数学的知识，是对当代大学生的基本要求．

但是，由于数学的抽象形式和符号语言与人们的直接生活距离较大，给高等数学的教与学带来了很大的障碍和困难．因此在高等数学教学过程中还有许多不尽如人意的地方：抽象难教、枯燥难学、糊涂难用，以致使本来生动活泼的一门课程成为教学中老师与学生的老大难．

面向新世纪，随着社会经济的迅猛发展，社会中各个行业及大学的各个专业都对高等数学提出了新的更高的要求．能否把高等数学的教学变得生动一些、实用一些呢？这是我们时常思考的问题．为此，在编写本教程时，我们力求做到以下几点：

1．尽量从实际出发，注重概念与定理的直观描述和实际背景，克服学生在数学认知上的心理障碍；逻辑推理做到适可而止．

2．充分利用先进的现代教学技术手段，尽量使学生在学习的过程中掌握计算机在高等数学中的基本应用，使抽象的概念形象化，使繁琐的计算简单化．

3．注重培养学生用数学的意识，锻炼学生用数学的能力，从而不断提高学生学习数学的主动性和积极性．

参加本教程编写的人员有:张银生、安建业、李美凤、王全文、康玉林和刘桃凤.

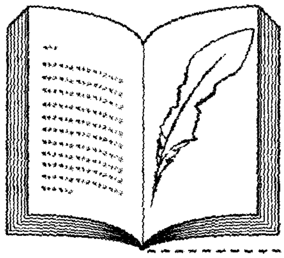
本教程适合少学时的本科专业和高职高专使用,也可作为个人自修高等数学课程的入门参考书.

为体现内容的典型性和广泛性,书中部分例题与习题引自他人著作,在此一并表示感谢. 由于我们水平所限,书中若有不尽如人意的地方,敬请读者指正.

编著者

2004 年 6 月

目　　录



第1章

函数与极限

日常生活中的一切事物都在不停地变化着，作为变化着的事物及它们之间依存关系的反映，在数学中就产生了**变量**(variable)与**函数**(function)的概念. 函数是数学中最基本的概念，它的基本思想是：由某一事物的变化去推知另一事物的变化. 它的基本手段是：将变化事物的关系抽象化、形象化、简单化.

极限是人们研究事物变化趋势的一个必不可少的工具，它是从有限中认识无限，从近似中认识精确，从离散中认识连续，从量变中认识质变的一种重要的思维方法.

§1.1 函数及其基本性质

1.1.1 函数的基本概念

我们看几个例子.

例 1.1.1 2002年2月21日国务院公布的银行储蓄利率表如表1.1.1所示.

表 1.1.1

时间	三个月	半年	一年	二年	三年	五年
年利率(%)	1.71	1.89	1.98	2.25	2.52	2.79

在利率表中,每一个年限都有一个确定的利率与之对应.人们根据表 1.1.1 就可算出存款的利息.

例 1.1.2 两位患者的心电图如图 1.1.1 所示.

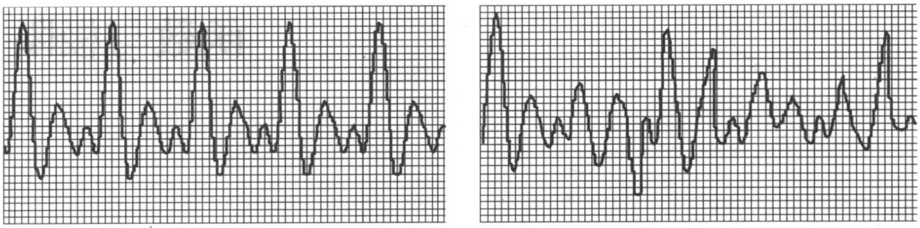


图 1.1.1

心电图反映了患者心脏的电传导随时间变化的规律.有经验的医生根据心电图就可以做出初步诊断.

例 1.1.3 (1) 自由落体运动的距离公式

$$S = \frac{1}{2}gt^2 \qquad (\text{其中 } g \text{ 为常数})$$

(2) 成本公式:$C(x)=C_0+C_1(x)$,其中 C_0 称为固定成本,$C_1(x)$ 为可变成本,x 为生产量;

收入公式:$R(x) = px$,其中 p 为价格,x 为销售量;

利润公式:$L(x) = R(x) - C(x)$.

通过这些公式可以精确地反映出变量之间的依存关系并能计算出相应的数值.例如,若某产品的成本公式为 $C(x) = 20 + 5x$,我们就可以知道它的固定成本为 20(元),与产量无关($x = 0$);当生产 5 件产品时($x = 5$) 的可变成本为 25(元);总成本为 45(元).

例 1.1.1 ~ 例 1.1.3 虽然反映的事物不一样,表现的形式也不尽相同,但是它们都有一个共同的规律:在变化过程中有两个变量,当其中的一个变量取定某一特定值时,另一变量按照一定的规律就有惟一确定的数值与之对应.下面我们用**映射**(mapping) 的观点对这种规律给以定义.

定义 1.1.1 设有两个非空的**集合**(set)D_f 和 $\mathbf{R}$,其中 $D_f \subseteq \mathbf{R}$,$\mathbf{R}$ 是实数集.称

映射 $f: D_f \to \mathbf{R}$ 为 D_f 到 $\mathbf{R}$ 的函数，通常记作 $y = f(x)$，并称 y 是 x 的函数，其中 $x(\in D_f)$ 称为**自变量**(independent variable)；$y(\in \mathbf{R})$ 称为**因变量**(dependent variable)；f 称为**对应法则**(corresponding rule)．D_f 称为函数 f 的**定义域**(domain)；集合 $Z_f = \{f(x) \mid x \in \mathbf{D}_f\}$ 称为函数 f 的**值域**(range)，且 $Z_f \subseteq \mathbf{R}$.

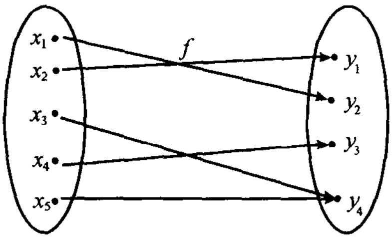


图 1.1.2

显然，图 1.1.2 中所示变量之间的关系均为函数关系.

函数中的两个要素是定义域 D_f 和对应法则 f. 一般来讲，函数的定义域由所讨论问题的实际背景，性质和使函数表达式有意义等方面来决定. 对应法则 f 是因变量 y 与自变量 x 依存关系的一种具体反映，它是函数中的灵魂. 如果两个函数的定义域和对应法则相同，那么这两个函数就是相同的函数，不管它们是用什么字母表示，也不管它们是以什么形式出现.

函数的定义域和值域必须是非空的集合. 否则集合中没有元素，就不可能构成映射，函数也就不存在了. 函数的表达形式一般有三种，像前面例子介绍的那样：表格法，图像法和公式法. 另外，我们讨论的函数，是指对自变量的任一数值只有惟一的函数值与之对应. 这类函数称为单值函数. 对于不满足这一条件的对应规律，例如 $y^2 = 2x$，对于 $x = 2$ 就有两个 y 值：-2 和 2(称为多值函数)，习惯上将其分解成两个单值函数 $y = \sqrt{2x}$ 和 $y = -\sqrt{2x}$ 分别进行讨论.

例 1.1.4　某学生的家距离学校 2.5 公里，从家里骑自行车早晨 7:30 出发去上学，8:00 上课. 试问图 1.1.3 中哪几个图像与下述三件事吻合得最好？

并将剩下的那件事用图形表达出来(t 表示时间，s 是离开家的距离).

(1) 离开家后不久，自行车坏了，修好后再继续走，准时到达学校.

(2) 离开家后不久，发现忘带语文课本，立即回家取了语文课本再去上学，结果迟到了.

(3) 离家后想早点到学校便快速行驶，半路上遇到同学后边聊天边走，准时到达学校.

(4) 离家后不久出了车祸，到附近的医院治疗后回家了.

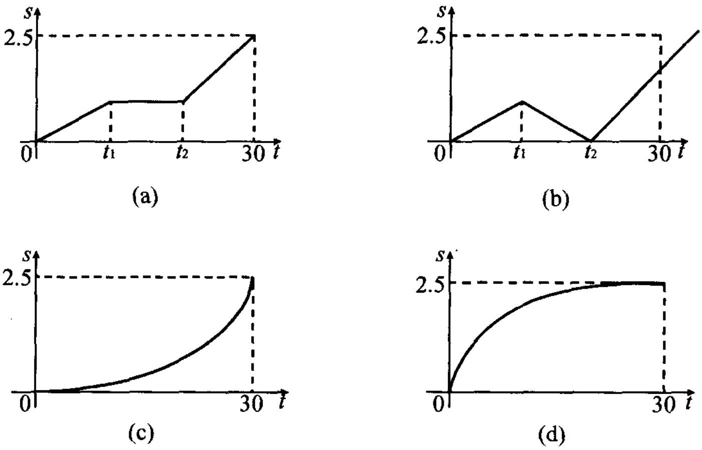


图 1.1.3

解 由事件的分析和图形的特点可以看出：事件(1) 与图(a) 对应，t_1 到 t_2 是修车的时间，距离没有变化. 事件(2) 与图(b) 对应，t_1 到 t_2 是回家的时间，到达学校的时间超过了 30 分钟. 事件(3) 与图(d) 对应，曲线开始很陡峭，后来平缓，说明开始时速度快，后来速度慢了下来. 事件(4) 的图形可以见图 1.1.4.

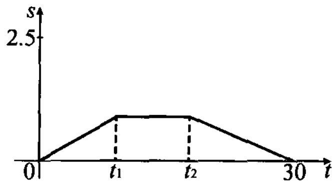


图 1.1.4

思考：是否可以为图形(c) 写一段事？

例 1.1.5 求函数 $f(x)=\dfrac{\lg(3-x)}{\sin x}+\sqrt{5+4x-x^2}$ 的定义域.

解 要使 $f(x)$ 有意义，显然 x 要满足

$$\begin{cases}3-x>0\\ \sin x\neq 0\\ 5+4x-x^2\geqslant 0\end{cases},\qquad 即\begin{cases}x<3\\ x\neq k\pi\\ -1\leqslant x\leqslant 5\end{cases}\qquad (k\ 为整数)$$

所以 $f(x)$ 的定义域为

$$D_f=\{x\mid -1\leqslant x<3,x\neq 0\}=[-1,0)\cup(0,3)$$

例 1.1.6 判断下列函数是否相同，并说明理由，画图表示.

(1) $y=\dfrac{x-1}{x^2-1}$ 与 $y=\dfrac{1}{x+1}$；　　(2) $y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=|x|$；

(3)$y = \lg x^2$ 与 $y = 2\lg x$；　　　　(4)$y = 1$ 与 $y = \sin^2 x + \cos^2 x$.

解 (1) 不相同. 它们的定义域不同. 第一个函数的定义域为 $x \neq \pm 1$，而第二个函数的定义域为 $x \neq -1$，如图 1.1.5 所示.

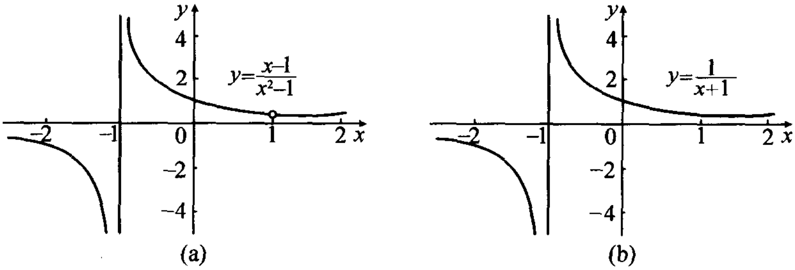


图 1.1.5

(2) 相同. 它们的对应法则与定义域均相同，如图 1.1.6 所示.

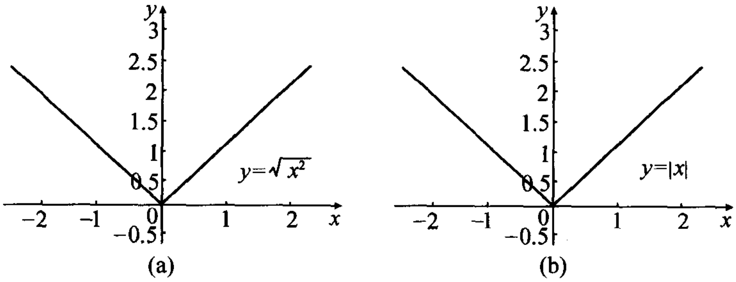


图 1.1.6

(3) 不相同. 它们的定义域不同. 第一个函数的定义域为 $x \neq 0$，而第二个函数的定义域为 $x > 0$，如图 1.1.7 所示.

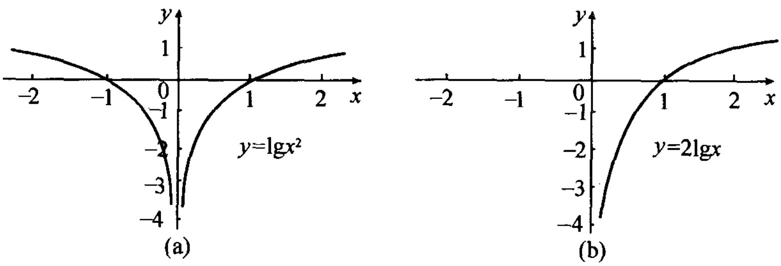


图 1.1.7

(4) 相同. 它们的定义域与对应法则均相同，只是表现的形式不同，如图 1.1.8 所示.

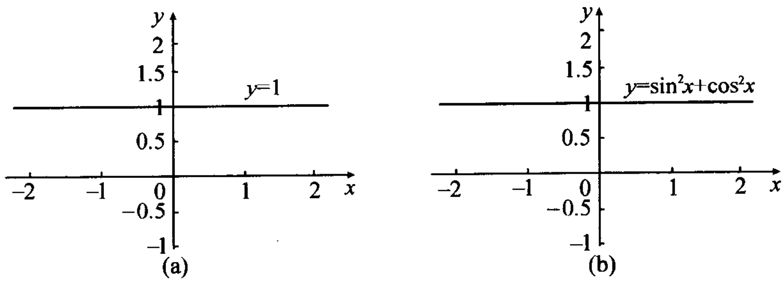


图 1.1.8

1.1.2 函数的基本性质

函数是变量依存关系的反映.我们研究函数,自然首先要关注函数的最基本的变化规律和变化趋势,即函数的基本性质.

1. 单调性(monotonicity)

定义 1.1.2 设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义,对于任意的 $x_1, x_2 \in D$,且 $x_1 < x_2$,那么

(1) 若 $f(x_1) < f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 D 上**单调增加**(monotonically increasing);

(2) 若 $f(x_1) > f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 D 上**单调减少**(monotonically decreasing).

单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**(monotonic function),相应于函数 $f(x)$ 单调的区间称**单调区间**(monotony interval).

显然,若 $f(x)$ 为单调增加函数,则对应曲线随着 x 的增大从左向右逐渐上升;若 $f(x)$ 为单调减少函数,则对应曲线随着 x 的增大从左向右逐渐下降.例如,市场上商品的需求量 Q 一般随着商品价格 p 的提高而下降,所以需求函数 $Q = f(p)$ 是价格 p 的单调减少函数.商品的供给量 Q 一般随着商品价格 p 的提高而增加,所以供给函数 $Q = \varphi(p)$ 是价格 p 的单调增加函数.如图 1.1.9 所示.

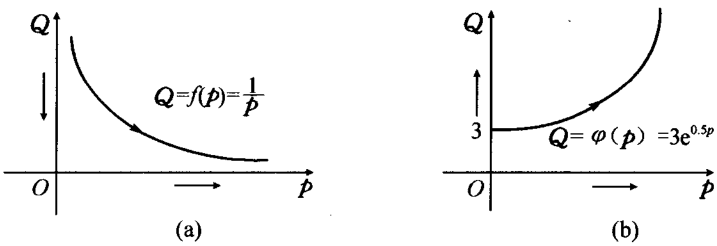


图 1.1.9

2. 奇偶性(oddness and evenness)

定义 1.1.3　设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义，对于任意的 $x \in D$，若恒有

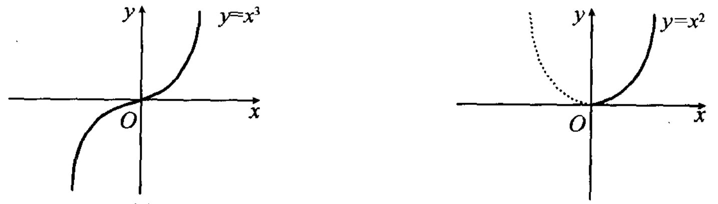
(1) $f(-x) = f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为 D 上的**偶函数**(even function)；

(2) $f(-x) = -f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为 D 上的**奇函数**(odd function).

显然，若 $f(x)$ 为奇函数，则其图形关于坐标原点中心对称；若 $f(x)$ 为偶函数，则其图形关于 y 轴对称. 函数具有奇偶性时，其定义域必定对称于原点，而且它们的各种性态也都可以由对称性从一方面推知对称的另一方面.

可以证明：两个奇(偶)函数之积为偶函数；奇函数和偶函数之积为奇函数；两个奇(偶)函数之和仍为奇(偶)函数.

例如，函数 $y = x^3$ 是奇函数，$y = x^2$ 是偶函数. 若已知它们 $x > 0$ 时的图形(实线)，则由对称性就可推出它们 $x < 0$ 时的图形(虚线)，如图 1.1.10 所示.



(a)　　(b)

图 1.1.10

3. 周期性(periodicity)

定义 1.1.4　设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义，如果存在常数 $a > 0$，使对于任意的 $x \in D$，恒有

$$f(x + a) = f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为**周期函数**(periodic function). 满足上式的最小的正数 a，称为 $f(x)$ 的**周期**(period).

显然，若 $f(x)$ 是周期为 a 的周期函数，则在长度为 a 的两个相邻的区间上，函数 $f(x)$ 的图形有相同的形状. 只要知道了周期函数在一个周期内的性态就可以推知它的全部.

4. 有界性(boundedness)

定义 1.1.5　设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义，如果存在常数 M，使得对任意的 $x \in D$，恒有：

(1) $|f(x)| < M (M > 0)$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上**有界**(bounded)；否则称函数 $f(x)$ 在 D 上**无界**(unbounded)；

(2) $f(x) < M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上有**上界**(bounded above)；