东方教育 EAST EDUCATION

高等学校教材经典同步辅导丛书

概率论与数理统计

第三版

同步辅导

普通高等教育国家规划教材研究中心
东方教育教材研发中心 组编
浙江大学 刁玉全 主编

新华出版社

高等学校教材经典同步辅导丛书

概率论与数理统计

（第三版）

同步辅导

普通高等教育国家规划教材研究中心
东方教育教材研发中心　组编
浙江大学　刁玉全　主编

新华出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计同步辅导/刁玉全编著.

北京:新华出版社,2006.2

ISBN 7-5011-7405-9

Ⅰ.概… Ⅱ.刁… Ⅲ.①概率论—高等学校—教学参考资料 ②数理统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 005297 号

概率论与数理统计同步辅导

责任编辑: 丁慧
装帧设计: 东方教育视觉艺术中心
责任校对: 肖宇波
出版发行: 新华出版社
地　　址: 北京石景山区京原路 8 号
网　　址: http://www.xinhuapub.com
邮　　编: 100043
经　　销: 新华书店
印　　刷: 北京市昌平百善印刷厂
开　　本: 850mm×1168mm　1/32
印　　张: 11.75
字　　数: 336 千字
版　　次: 2006 年 2 月第 1 版
印　　次: 2006 年 2 月北京第 1 次印刷
书　　号: ISBN 7-5011-7405-9
定　　价: 17.00 元

东方教育教材研发中心

经典同步辅导丛书编委会

前 言 / Preface

《概率论与数理统计》是大学数学课程中一门重要的基础课，也是硕士入学考试的必考科目．为了帮助读者更好地学习这门课程，掌握更多知识，我们根据多年的教学经验编写了这本与此教材配套的《概率论与数理统计同步辅导》．

本书作为一种辅助性的教材，具有较强的针对性、启发性、指导性和补充性的特点．考虑到读者的不同情况，我们在内容上做了以下安排：

1．学习要求：根据考试大纲的要求，总结的各章重要知识点．

2．知识网络图：以图表的形式贯穿各章知识网络．

3．学习卡片：总结各章所有重要的定理、公式简明扼要，使读者一目了然．

4．内容概要：串讲概念，总结性质和定理，知识全面系统．

5．重难点剖析：根据各章内容总结其中重点、难点并进行详细的解释、分析．

6．典型题型与解题技巧：精选各类题型，涵盖本章所有重要知识点．

7．疑难解答：总结各章具有代表性的疑难问题，以及容易产生错误或混淆不清的概念．

8．常见错误类型分析：总结各章容易出错的题型，从错解、分析、正解三个角度出发解决问题．

9．考研真题链接：精选历年考研真题进行深入的讲解．

10．同步自测：根据各章的学习要求，精选了适量的自测题目，并附有答案．

本书另外还赠送了浙江大学《概率论与数理统计》(第三版)各章习题的答案．我们不仅给出了详细的解题过程，而且还对解题思路和方法作了简要的说明．

目录 / Contents

第一章 概率论的基本概念

2 知识网络图
2 学习卡片
3 内容概要
8 重难点剖析
10 典型题型与解题技巧
26 常见错误类型分析
27 考研真题链接
31 同步自测
36 同步自测答案及解析

第二章 随机变量及其分布

44 知识网络图
44 学习卡片
45 内容概要
51 重难点剖析
52 典型题型与解题技巧
74 常见错误类型分析
77 考研真题链接
81 同步自测
85 同步自测答案及解析

第三章 多维随机变量及其分布

94 知识网络图
95 学习卡片
96 内容概要
103 重难点剖析

104 典型题型与解题技巧
121 常见错误类型分析
124 考研真题链接
129 同步自测
134 同步自测答案及解析

第四章 随机变量的数字特征

146 知识网络图
146 学习卡片
147 内容概要
152 重难点剖析
154 典型题型与解题技巧
173 常见错误类型分析
176 考研真题链接
182 同步自测
186 同步自测答案及解析

第五章 大数定律及中心极限定理

193 知识网络图
194 学习卡片
194 内容概要
196 重难点剖析
197 典型题型与解题技巧
207 考研真题链接
209 同步自测
213 同步自测答案及解析

第六章 样本及抽样分布

223 知识网络图
223 学习卡片
225 内容概要
232 重难点剖析
233 典型题型与解题技巧

246 常见错误类型分析
248 考研真题链接
252 同步自测
256 同步自测答案及解析

第七章 参数估计

264 知识网络图
264 学习卡片
265 内容概要
271 重难点剖析
272 典型题型与解题技巧
282 常见错误类型分析
285 考研真题链接
288 同步自测
292 同步自测答案及解析

第八章 假设检验

302 知识网络图
303 学习卡片
303 内容概要
306 重难点剖析
307 典型题型与解题技巧
315 常见错误类型分析
317 考研真题链接
318 同步自测
322 同步自测答案及解析

第九章 方差分析及回归分析

330 知识网络图
330 内容概要
336 重难点剖析
337 典型题型与解题技巧

第十章　随机过程及其统计描述

342　知识网络图
343　内容概要
344　重难点剖析
345　典型题型与解题技巧

第十一章　马尔可夫链

349　知识网络图
350　内容概要
351　重难点剖析
352　典型题型与解题技巧

第十二章　平稳随机过程

356　知识网络图
357　内容概要
359　重难点剖析
359　典型题型与解题技巧

第一章

概率论的基本概念

学习要求

1. 了解样本空间的概念;理解随机事件的概念;掌握事件的关系与运算.
2. 理解概率、条件概率的概念;掌握概率的基本性质;掌握计算古典型概率和几何型概率;掌握概率的加法公式、乘法公式、减法公式、全概率公式以及贝叶斯公式.
3. 理解事件独立性的概念;掌握用事件独立性进行概率计算;理解独立重复试验的概念;掌握计算有关事件概率的方法.

知识网络图

- 概率论的基本概念
  - 随机事件——事件的关系与运算
    - 样本空间、事件定义
    - 事件间的运算关系
    - 运算形式和法则
  - 概率
    - 定义和性质
      - 定义
        - 统计定义
        - 古典定义
        - 几何定义
      - 性质
        - 非负、有界
        - 单调不减
        - 连续可加
    - 计算
      - 古典概率
      - 几何概率
      - 条件概率
      - 全概率公式
      - 贝叶斯公式
    - 事件的独立性

学习卡片

有限可加性 $P(A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$

（$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两不相容）

独立性 $P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdots P(A_n)$

（$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立）

加法公式 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_i A_j A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n)$$

乘法公式 $P(AB) = P(A)P(B|A)$

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

减法公式 $P(B-A) = P(B) - P(AB)$

全概率公式 $P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n)$

贝叶斯公式 $P(B_i|A)=\dfrac{P(A\mid B_i)P(B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(A\mid B_j)P(B_j)}\ (i=1,2\cdots n)$

内容概要

一、随机试验与随机事件

1. 随机试验

自然界中的客观现象一般可分为必然现象和随机现象，必然现象是指在一定的条件下必然出现的现象，而随机现象是指在一定的条件下可能出现也可能不出现的现象，概率论是研究大量随机现象的统计规律的学科. 概率论中将满足下列三个特点的试验称为随机试验，简称试验. 通常用 E 或 $E_1,E_2,\cdots\cdots,E_n$ 来表示，这三个特点如下：

(1)试验可在相同的条件下重复进行；

(2)每次试验的可能结果不止一个，但所有的结果是明确可知的；

(3)进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

2. 随机事件、基本事件与样本空间

(1)随机事件：在一次试验中可能出现，也可能不出现的结果称为随机事件，简称为事件，并用大写字母 A,B,C 等表示.

(2)基本事件：在一次试验中，每一个可能出现的最简单、最基本的结果称为基本事件，在每次试验中能且只能发生该试验的一个基本事件. 基本事件有时也称为样本点，常用 ω 表示.

(3)基本事件空间：一个试验所有基本事件(样本点)的全体组成的集合，称为基本事件空间(样本空间)，通常用 Ω 表示，即 $\Omega=\{\omega\}$.

(4)必然事件：每次试验一定发生的事件称为必然事件，记为 Ω.

(5)不可能事件：每次试验一定不发生的事件，称为不可能事件，记为 $\varnothing$.

3. 事件之间的关系与运算

(1)包含：若事件 A 发生必导致事件 B 发生，称事件 B 包含事件 A，记为 $A\subset B$.

(2)相等：若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A=B$.

(3)和事件：事件 $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$称为事件 A 与事件 B 的和事件.

(4)积事件：事件 $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$称为事件 A 与事件 B 的积事件，记为 AB.

(5)差事件：事件 $A-B=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的差事件.

(6)互不相容事件：若 $A\cap B=\varnothing$，称 A 与 B 是互不相容的或互斥的.

(7)逆事件：若 $A\cup B=S$ 且 $A\cap B=\varnothing$，称 A 与 B 互为逆事件，或对立事件. A 的对立事件记为 $\overline{A}=S-A$.

(8)完备事件组：若 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$ 且对于 $\forall_i\neq j$，$A_i\cap A_j=\varnothing$，则称这有限个 $A_1,\cdots,A_n$ 事件构成一个完备事件组.

事件之间的关系和运算，可以用所谓的文氏图形象地表示出来.

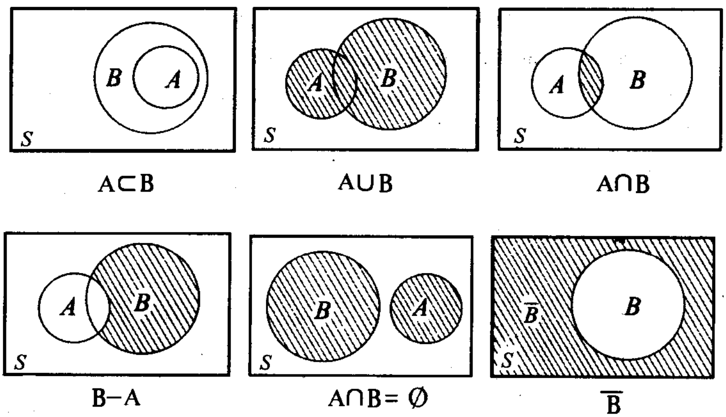

图 1—1

4. **事件的运算法则**

下述定律在进行事件的运算时，经常用到，我们设 A、B、C 为事件，则有：

(1)吸收律：若 $A\subset B$，则 $A\cup B=B$，$AB=A$（“并”取大，“交”取小）

(2)交换律：$A\cup B=B\cup A$；$AB=BA$

(3)结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；　$(AB)C=A(BC)$

(4)分配律：$A(B\cup C)=AB\cup AC$；　$(A\cup B)C=(A\cup B)(A\cup C)$

(5)德·摩根律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$；$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

二、随机事件的概率及其性质

概率是事件发生的可能性大小的定量描述，是事件的本质特征，它客观存在，我们常用 $P(A)$ 表示事件 A 的概率.

第一章　概率论的基本概念

1. 概率的统计定义

在相同条件下，独立重复进行 n 次试验，则事件 A 在 n 次试验中发生的次数称为 A 发生的频数，记为 μ_A. 比值 $f_n(A)=\frac{\mu_A}{n}$ 称为 A 发生的频率. 当试验次数 n 增大时，频率 $f_n(A)$ 呈现出某种稳定性，即它在某一常数 p 附近波动，且 n 越大，波动的幅度越小，则称 p 为事件 A 发生的概率. 显然，p 固然存在，但实际中无法精确确定它，于是常用频率 $f_n(A)$ 作为 p 的估计值.

2. 古典概型与概率的古典定义

如果试验具有以下两个特点：

(1)试验的基本事件总数是有限个的；

(2)试验的每个基本事件发生的可能性都一样.

称此试验为等可能概型(古典概型).

如果古典概型随机试验的基本事件总数为 n，事件 A 包含 k 个基本事件，则 A 发生的概率定义为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 中所含基本事件个数}}{\text{试验的基本事件总数}}\overset{\text{记}}{=}\frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

由此式计算的概率称为古典概率.

3. 几何概型与概率的几何定义

如果试验具有以下两个特点：

(1)试验的样本空间 Ω 是一个可度量的几何区域(这个区域可以是一维、二维，甚至是 n 维的)；

(2)试验的每个基本事件发生的可能性都一样，即样本点落入 Ω 的某一个可度量的子集 A 的可能性大小与 A 的几何测度成正比，而与 A 的位置及形状无关.

称此试验为几何概型.

在几何概型随机试验中，A 为 Ω 的一个可度量的子集，则随机事件“点落入区域 A”的概率定义为

$$P(A)=\frac{A\text{ 的几何测度}}{\Omega\text{ 的几何测度}}\overset{\text{记}}{=}\frac{\angle(A)}{\angle(\Omega)}$$

其中 $\angle(A)$ 表示区域 A 的几何测度，可以是长度、面积或体积. 由上式计算的概率称为几何概率.

4. 概率的公理化定义

设试验 E 的样本空间为 Ω，对于 E 的每一个事件 A 都赋予一个确定的实

数 $P(A)$，如果事件函数 $P(A)$ 满足：

(1)非负性：$P(A)\geqslant 0$；

(2)规范性：$P(\Omega)=1$；

(3)可列可加性：对任意可列个互不相容事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

则 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

5. 概率的基本性质

(1)有界性　$0\leqslant P(A)\leqslant 1$，　$P(\varnothing)=0$，　$P(\Omega)=1$；

(2)单调性　若 $A\subset B$，则 $P(A)\leqslant P(B)$；

(3)有限可加性　设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)；$$

(4)加法公式　对任意两事件 A、B 有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

一般地　$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+$

$\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$；

(5)减法公式　$P(A-B)=P(A)-P(AB)$；

(6)求逆公式　$P(\overline{A})=1-P(A)$.

三、条件概率

1. 条件概率的概念及性质

设 A、B 是两个事件，且 $P(A)>0$，称

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的条件概率.

$P(\cdot\mid A)$ 具有以下性质：

(1)非负性　　对于每一事件 B，有 $P(B|A)\geqslant 0$；

(2)规范性　　对于必然事件 S，有 $P(S|A)=1$；

(3)可列可加性　$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i|A)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i|A)$，其中 $B_1,B_2\cdots$ 互不相容事件.

2. 乘法公式

设 A，B 为两个事件，若 $P(A)>0$，则有

$$P(AB)=P(A)P(B|A)$$

若 $P(B)>0$,则有

$$P(AB)=P(B)P(A|B)$$

一般地,设 $A_1,A_2\cdots A_n$ 为 n 个事件,且 $n\geqslant 2$,且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$,则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

3. 全概率公式

设试验 E 的样本空间为 S,A 为 E 的事件,$B_1,B_2\cdots,B_n$ 为 S 的一个划分且 $p(B_k)>0(k=1,2,\cdots,n)$,则

$$P(A)=\sum_{k=1}^{n}P(B_k)P(A|B_k)$$

称上式为全概率公式.

4. 贝叶斯公式

设试验 E 的样本空间为 S,A 为 E 的事件. 事件组 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 S 的一个划分,则对任何一事件 A,当 $P(A)>0$,$P(B_i)>0.(i=1,2,\cdots,n)$,有

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{\sum_{k=1}^{n}P(B_k)P(A\mid B_k)}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

称上式为贝叶斯公式又称为逆概率公式.

四、独立事件与独立试验

1. 事件独立性的概念及性质

(1)事件独立性的定义

描述性定义(直观性定义) 设 A、B 为两个事件,如果其中任何一个事件发生的概率不受另外一个事件发生与否的影响,则称事件 A 与 B 相互独立. 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个事件,如果其中任何一个或几个事件发生的概率都不受其余某一个或某几个事件发生与否的影响,则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

如果其中任何有限个事件都相互独立,称随机事件列 $\{A_n,n\geqslant 1\}$ 是相互独立的.

数学定义 设 A,B 为事件,如果 $P(AB)=P(A)P(B)$,则称事件 A 与 B 相互独立,简称为 A 与 B 独立.

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件,如果对于任意 $k(1\leqslant k\leqslant n)$个有序整数,$1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n$,有

$$P(A_{j_1}A_{j_2}\cdots A_{j_k})=P(A_{j_1})\cdot P(A_{j_2})\cdots P(A_{j_k})$$

则称 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

设$\{A_n, n\geqslant 1\}$为可列个事件，如果对任意正整数$n(n\geqslant 2)$事件$A_1, A_2 \cdots, A_n$都相互独立，则称随机事件序列$\{A_n, n\geqslant 1\}$相互独立.

(2)事件独立性的性质

①n个事件相互独立必两两独立，反之不然；

②n个事件相互独立的充要条件是，它们中任意一部分事件换成各自的对立事件所得到的n个事件相互独立；

③n个事件相互独立，则不含相同事件的事件组经某种运算后所得的事件是相互独立的. 例如，A、B、C、D相互独立，则AB与$C\cup D$相互独立，A与$BC-D$相互独立，等等；

④概率为1或零的事件与任何事件都相互独立. 如果$0<P(A)<1, 0<P(B)<1$，A与B互不相容或存在包含关系，则A与B不相互独立；

⑤如果$0<P(A)<1$，则A与B独立的充要条件是$P(B|A)=P(B|\overline{A})=P(B)$.

2. 试验的独立

如果各个试验结果是相互独立的，则称这些试验是相互独立的. 例如，称随机试验E_1和E_2是相互独立的，如果对E_1的任一结果A_1，E_2的任一结果A_2，事件A_1与A_2独立，即$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)$. 称n个试验$E_1, E_2\cdots, E_n$是相互独立的，如果对试验E_i中的任一结果$A_i(i=1,2,\cdots,n)$，事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$相互独立. 即对其中任意k个事件有

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{ij}\right)=\prod_{j=1}^{k} P(A_{ij})\ (k\geqslant 2)$$

重难点剖析

1. 频率与概率

频率与概率是两个完全不同的概念，不能说频率就是概率，因为频率不能脱离具体的n次试验，而概率是指一次试验中事件发生的可能性的大小，它与试验的次数n无关. 从某种意义上说，频率是概率的近似，概率是频率的极限.

2. 古典概型的计算

古典概率的计算关键是基本事件、样本空间的选定以及会数数. 常用的数数方法有三种：

(1)列举法(直接查数法)；

(2)集合对应法(乘法法则、加法法则、排列、组合等等)；