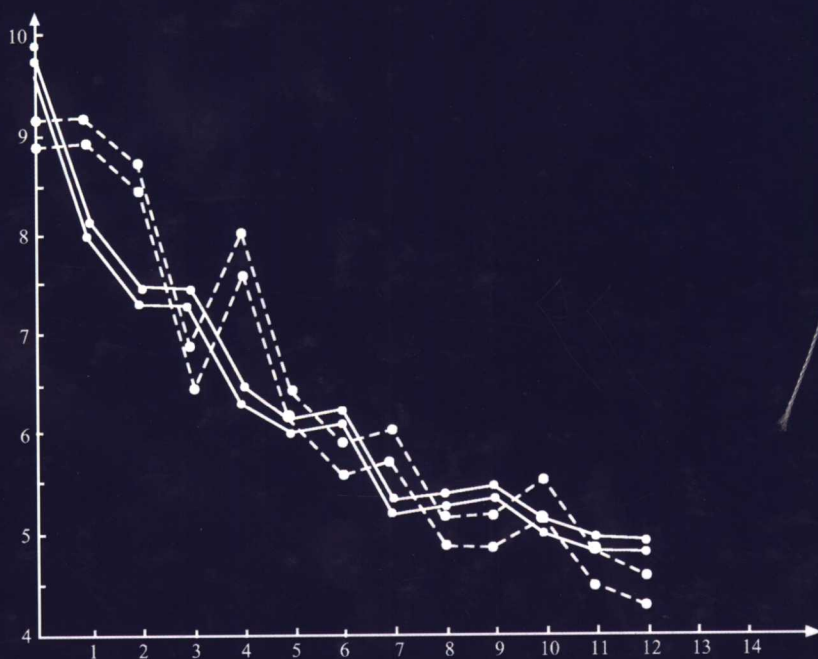


少体系统的 量子力学对称性

◎ 李训贵 著



科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书系统地介绍了研究三维和二维少体系统的谐振子基的方法和主要的定性成果。具体涉及四全同玻色子系统和二维三费米子系统的能谱结构和内部运动模式,以及量子力学对称性在这两种系统中所表现出的规律性。从少体系统的哈密顿出发,用变分法求解 Schrödinger 方程,得到能谱和波函数,进而在一系列特定子空间内分析观察波函数的分布特征。通过定量的计算和分析揭示出少体系统的低激发态的结构和内部运动形态具有大量潜在的规律性。同时,书中对少体系统中量子力学内禀对称性的研究也进一步揭示和诠释了量子力学规律的深刻内涵。

本书可作为高等院校物理专业师生的参考书,亦可作为研究生的教材。

图书在版编目(CIP)数据

少体系统的量子力学对称性/李训贵著. —北京:科学出版社,2006

ISBN 7-03-016756-2

I. 少… II. 李… III. 量子力学-研究 IV. O413

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 000920 号

责任编辑:吕 虹 胡 凯/责任校对:刘小梅

责任印制:安春生/封面设计:王 浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

中国科学院印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2006年4月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2006年4月第一次印刷 印张:7

印数:1—2 000 字数:127 000

定价:32.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换(科印))

序

对称性对缔造微观世界起决定性作用。人们对于对称性的探索是由来以久的基本课题,已取得丰硕的成果。简单归结为由哈密顿量的对称性所决定的对量子态的分类(好量子数的引进)和对物理过程的强势干预(选择定则)。另一方面,量子态的物理性质是由波函数决定的。特别是波函数所含节面(节点)的多少及其在高维坐标空间中的结构决定了运动的激烈程度和模式。那么波函数的结构是否受,如何受对称性的影响呢?如果受到影响,特别是如果对波函数的节面结构产生影响,对称性将会产生直接的动力学效果。这是一个前人未予深究而又很有研究价值的问题。

由于计算技术的发展,人们可以比较精确地计算出各种少体系统的能谱。可尽管计算结果能比较好地符合实验,但对能谱的定性行为的理解一般还是不充分的,特别是对对称性对能谱的定性行为的具体影响还是认识得不够。如为什么碳原子基态是 $^3P^e$,第一激发态是 $^1D^e$,而不是角动量 $L=0$ 的态等这一类问题一般难以解释。这有待于对对称性的直接动力学效果的探究。

1992~2000年期间,我和我的博士生阮文英、解文方、李训贵等开展了对这一课题的研究,其中发展了有关的理论计算和分析的方法。通过对不同的少体系统的研究,发现对称性把一类特殊的节面,即内禀节面,强加给波函数,从而产生严重的动力学效果。这一效应对低激发谱来说是决定性的,因而对内禀节面的了解是进一步理解能谱的基础,同时也为量子态的进一步分类提供了依据。

目前的这一本书是建立在李训贵教授当时所参与研究的成果的基础上撰写而成,主要涉及两类系统,即四全同玻色子系统和二维三电子系统。不仅介绍了有关的理论方法,而且以上述两类系统为例阐述了内禀节面的由来和对称性的直接动力学效应。

书中所介绍的基于谐振子基和泰米系数,实现哈密顿量的对角化,

并进而得到本征能和本征矢的方法是一个较容易掌握和有效的少体物理方法。其缺点是精确度不很高,但有助于得到定性的结果。因此特别适合对少体系统有兴趣的初入门者,也适用于专业人员对少体问题做一般的定性研究。书中介绍了寻找和确定内禀节面的理论方法,展示了不同量子态的波函数的内禀节面,阐述了这些节面对量子态的几何结构和内部运动形态的影响,以及对低激发能谱的效应。讨论了幻数的根源和量子态按内禀节面的进一步分类。总的说来,这本书揭示了对称性的直接动力学效果,进一步展现了对称性的神妙效应,开阔了人们对微观世界的视野。

鲍诚光

2005 年 7 月于中山大学

前 言

对称性是自然界秩序的一种表征,是“适当的或平衡的比例,由这种和谐产生的形式美”(韦氏大学词典,1994 年第八版)。物理学中的对称性包括从空间和时间的各种对称性到粒子内部的固有对称性。量子力学的建立使对称性的内容更丰富、更深邃,有宇称和电荷共轭这样的分立对称性,有运动学 Lorentz 不变性这样的连续对称性,而规范不变性则与时空相关。随着关于对称性研究的深入,人类对物质世界运动的基本规律的认识也取得一系列重大进展。量子力学的微观少体系统是多体和宏观系统的基础,是物理学中的基本研究对象。本书的研究表明,微观少体系统内部的量子力学对称性(空间反演、空间旋转、粒子交换、宇称等)使系统内部存在着固有的内禀节面,这些内禀节面对少体系统的结构和内部运动具有决定性的制约作用。因此,尽管少体系统的运动形态丰富多彩,但是有“秩序”的,是具有“形式美”的。量子力学对称性是少体系统所具有的各种结构特征的本质起源。不同微观少体系统的低激发谱具有某种共同的规律性,这使人们可以用同一的观点来理解不同微观少体系统的行为(小至粒子物理中的夸克,大至凝聚态物理中的团簇)。同时,对少体系统中量子力学对称性的研究也进一步揭示和诠释了量子力学规律的深刻内涵。

本书是根据作者在中山大学的博士学位论文补充修改而成。前三章讨论少体系统研究进展,普适的三体 and 四体系统的理论研究方法及其对称性和态分类;第四章和第五章具体研究四玻色子系统和二维三费米子系统;第六章给出全书的结论。若本书能对相关的读者有一定的参考作用,并能引起他们对该领域工作的兴趣,也就达到了作者的初衷。

作者衷心感谢导师鲍诚光教授,没有他的指导,本书实际上是难以完成的。从鲍老师那里,我学到知识的同时,也学会了做人。

在本书的出版校对过程中,得到了陈永亨、黄晓兵、鲍镇邦等同事的大力支持和帮助,在此一并致谢。作者还要感谢本书编辑胡凯同志的通

力合作。

由于作者水平有限,书中难免有错误和不妥之处,请各位读者批评指正。

谨以此书献给我亲爱的母亲!



2005 年 8 月于广州

目 录

序

前言

第一章 引言	1
第二章 理论方法	4
2.1 变分法	4
2.2 三体 and 四体的 Talmi-Monshinsky(TM)变换系数	6
2.3 四玻色子系统基函数的对称化和正交化	13
2.4 两体相互作用和四全同玻色子系统的哈密顿	15
第三章 对称性和态的分类	17
3.1 动力学对称性	17
3.2 量子力学对称性和内禀节面	19
3.3 态按对称性的分类	27
第四章 四玻色子系统模型和数值计算结果	38
4.1 基函数展开的 Hilbert 空间的维数	38
4.2 哈密顿矩阵元的计算	39
4.3 能谱及其特征	41
4.4 波函数在子空间中的分析	42
4.5 讨论和结论	60
第五章 二维三费米子系统	64
5.1 理论方法	64
5.2 系统的对称性分析	71
5.3 弱禁闭下的数值计算结果	75
5.4 强禁闭效应	85
5.5 讨论和结论	97
第六章 总结	99
参考文献	101

第一章 引言

微观少体系统是多体和宏观大系统(如团簇、大块晶体和非晶材料等)的基础,一直是物理学中的一个重要的和基本的研究对象。它涉及凝聚态物理、表面科学、材料科学、原子和分子物理、原子核物理、粒子物理和量子化学等若干科学研究领域。Heitler-London 早在 1927 年就用量子力学理论成功地处理了氢分子的四体问题^[1],接着求解了氢分子离子 H_2^+ 的三体问题^[2,3]和异核双原子分子离子 HeH^{2+} 的三体问题^[4],这些早期工作清楚地揭示了化学键的本质,为开创现代化学键理论奠定了基础。J. A. Wheeler^[5]在 1937 年用共振群方法求解核物理中的少体问题,随后发展了多种模型和方法来处理 α 集团相关的少体问题^[6~11]。用少体模型理论来处理超核的能谱结构也取得了相当的成功^[12~15]。近年来,随着实验手段的完善,各种半导体材料中出现了大量的人造量子点,特别是 1980 年发现量子 Hall 效应以来,凝聚态物理中大量的低维少体系统^[16~22]更是给少体研究提供了大量的具有挑战性的课题。深入地研究这类课题,将使人们在深入分析和研究这类系统微观结构的基础上,对材料的光学、热学、电学、磁学等方面的宏观性质及其功能机理有更透彻的了解,从而为研究、设计、改造、应用材料提供理论依据。因此,这类课题的研究具有重要的理论意义和实际应用意义。

少体系统由于涉及的自由度不多,不能用多体问题的量子统计方法求解,但也难以精确求解。为了探索少体系统内部结构和运动形态,以及相互作用力的性质,从而探索物质宏观结构的微观起源,人们发展了各种少体理论方法来研究少体系统,而这些方法又可分为微分方程和积分方程两大类。前者有变分法(谐振子乘积态展开方法^[23~25]、超球谐函数方法^[14,26~28]、集团模型方法^[13,29]等)和有限元法^[30]等,后者有 Faddeev 方程方法^[10,15,31,32]和 Yakubovsky 方程方法^[33]等。传统的少体理论研究通常侧重于发展理论计算方法以达到适当的计算精度,因而重点在于理论方法本身的研究。计算机技术的迅速发展使数值计算方法日趋

完善,从而使少体研究取得了长足进步并向着更深层次发展。在定量计算少体系统的能谱结构和内部形态的基础上,进一步深层次地探讨系统结构特征的本质和起源,寻求更深刻的普遍规律性,以达到对微观少体系统及其所组成的宏观物质有更本质的认识,同时对其中所蕴含的物理规律也有更本质的认识,则是人们所希求的。近年来,鲍诚光教授等研究了量子力学对称性的效应^[34~40],深化了人们对少体系统结构特征和本质的认识,得到了少体系统中关于对称性效应的若干规律性。

对称性作为自然界的一种我们所企求了解的秩序的表征,一直是物理学的重要研究课题。而用对称性来研究微观客体,则是微观领域(如粒子物理、核物理等)中的一种重要的理论研究方法。粒子物理中曾用对称性预言了未知的重子和夸克的存在。传统的对称性的研究经常与守恒定律和选择定则密切相关^[41~43]。在少体系统研究中,当少体系统中的“粒子”数 $N \geq 3$ 时,要精确地从理论上计算系统的低激发态的能谱和波函数仍然是相当困难的。并且,即使本征能量已求解出来,要分析波函数以全面得到关于少体系统结构的信息也是非常困难的,因为涉及的自由度很多。因而,在求解 Schrödinger 方程之前,通过研究对称性效应,得到系统结构和运动的基本特征,预言少体系统内部运动形态并给出普遍的规律性,可帮助人们更好地理解从理论计算和实验观察中得到的物理结果,深化对少体系统结构本质和起源的认识,同时又将促进少体理论研究方法本身的发展,并进一步认识量子力学规律的深刻内涵。

本书在前面研究工作的基础上^[35~40],以全同四玻色子系统和二维三费米子系统为例,系统地介绍了有关的研究方法和主要定性研究成果^[47,50~52,69,72]。突出了量子力学对称性(QMS)的效应,即对称性对系统结构的内部运动模式的影响,以及在对称性制约下系统所表现出的规律性和这些规律性在不同微观少体系统中的普适性。由于有效两体相互作用 $V(\mathbf{r})$ 通常含有排斥芯和吸引尾,因而总势能 $U = \sum_{i>j} V(r_{ij})$ 将在系统的某些最佳几何构形处具有最小值 $U_{\min}$ 。为了使势能最低,少体系统的基态要追求势能最小的几何构形。然而,由于 QMS 的限制,某些几何构形受到禁戒,导致波函数在这些几何构形为 0,即波函数在多维坐标空间中出现了节面,这类节面称为内禀节面(INS)^[36]。除此之外,

另一类节面则是由系统激发而产生,与系统动力学参数有关,这类节面用来衡量系统内部运动剧烈的程度,称为动力学节面(DNS)^[36]。系统的节面结构如何决定了系统的能谱结构和内部运动模式,是我们重点要研究的内容。接着,我们用变分法定量求解少体系统的 Schrödinger 方程,并进而在特定的子空间中观察波函数的分布,以得到足够的信息,与对称性分析一起来确定体系的结构和内部运动特征,得出具有普遍意义的规律。

过去人们对四体系统的研究,主要侧重在定量计算方面且主要集中于基态,对如何从物理上去理解各个低激发态的行为则很少涉及。与此相反,我们的研究则侧重于定性方面,深入地探讨 QMS 对系统结构的影响和在 QMS 下系统表现出的结构和内部运动形态的规律性。我们的工作将能够为低激发态的分类提供一个客观的基础,以达到对低激发谱的系统的认识。并且,我们的工作将导致能够从同一的观点去分析不同系统的行为,以达到对自然界的同一性的了解。

对于二维三费米子系统,在定量求解系统的 Schrödinger 方程和对称性效应研究的基础上,揭示了近年来半导体量子点中的量子 Hall 效应的魔数^[16,37]的起源和本质,说明它是微观少体系统 QMS 的效应,预言了实验上尚未观察到的魔数。通过强禁闭下系统行为的研究,发现魔数效应在强场作用下仍然存在。并且,发现了强场作用下的近简并效应。

第二章 理论方法

2.1 变分法

2.1.1 基函数

变分法的基函数受尝试波函数形式的限制,对尝试波函数很敏感,因此,尝试波函数的选取非常重要,要能够描述系统中各体之间的关联。原则上,任何具有给定量子数如宇称 π ,角动量 lm 等的平方可积函数,都可作为基函数。只要彼此线性独立的基函数足够的多,它们都可通过线性组合而达到任意希望的精确度。谐振子态波函数

$$\varphi(\mathbf{r}) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (2.1.1)$$

是基函数的一种选择。对于全同的 $N(\geq 3)$ 体量子力学少体系统,为了讨论问题的方便,将单粒子坐标 $\mathbf{X}_i (i=1, 2, \dots, N)$ 变换为质心坐标 $\mathfrak{Z}$ 和相对运动坐标,分别用以描写质心和内部运动。后者即 Jacobi 坐标 (JCO) $\mathbf{r}_i^\alpha (i=1, 2, \dots, m, m=N-1)$, α 标识不同族的 JCO。 $\mathbf{r}_i^\alpha$ 和 $\mathfrak{Z}$ 亦可用单粒子坐标 $\mathbf{X}_i (i=1, 2, \dots, N)$ 表达为

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i^\alpha &= \sum_{K=1}^m U_{ik} \mathbf{X}_K \quad (i=1, \dots, m) \\ \mathfrak{Z} &= \sum_{K=1}^N U_{NK} \mathbf{X}_K \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

U 是变换矩阵,例如当粒子质量相同时,对一特定的 α , U 为

$$U = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{m-1} & -\frac{1}{m-1} & -\frac{1}{m-1} & \cdots & 1 & 0 \\ -\frac{1}{m} & -\frac{1}{m} & -\frac{1}{m} & \cdots & -\frac{1}{m} & 1 \\ \frac{1}{N} & \frac{1}{N} & \frac{1}{N} & \cdots & \frac{1}{N} & \frac{1}{N} \end{pmatrix} \quad (2.1.3)$$

则 N 体费米子的基函数可取如下形式

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_K^a &= \tilde{S}\{\varphi_{n_1 l_1}(r_1^a)(\varphi_{n_2 l_2}(r_2^a)(\varphi_{n_3 l_3}(r_3^a)\cdots \\ &(\varphi_{n_{m-1} l_{m-1}}(r_{m-1}^a)\varphi_{n_m l_m}(r_m^a))l_{01}\cdots)l_{0m-3})l_{0m-2})\chi^S\}_{J^\pi} = \tilde{S}\{\Phi_K^a\} \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

式中, χ^S 为自旋波函数(即诸费米子的自旋耦合为总自旋 S), $\{\Phi_K^a\}$ 称为原始基。而

$$\tilde{S} = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_P \text{sgn}(p) P \quad (2.1.5)$$

为反对称化子。 $l_{0i}(i=1, \cdots, m-2)$ 为中间耦合轨道角动量。

对于 $N(\geq 3)$ 体的玻色子系统, 基函数取如下形式

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_K^a &= \mathfrak{R}\{\varphi_{n_1 l_1}(r_1^a)(\varphi_{n_2 l_2}(r_2^a)(\varphi_{n_3 l_3}(r_3^a)\cdots \\ &(\varphi_{n_{m-1} l_{m-1}}(r_{m-1}^a)\varphi_{n_m l_m}(r_m^a))l_{01}\cdots)l_{0m-3})l_{0m-2}\}_{L^\pi} = \mathfrak{R}\{\Phi_K^a\} \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

$\mathfrak{R}$ 为对称化子。

基函数选定后, 将 N 体系统波函数用基函数 $\{\tilde{\Phi}_K\}$ 展开, 得

$$\Psi = \sum_i C_i \tilde{\Phi}_i \quad (2.1.7)$$

将式(2.1.7)代入少体系统的 Schrödinger 波动方程

$$H\Psi = E\Psi \quad (2.1.8)$$

则得一线性代数方程组

$$\sum_j H_{ij} C_j = E \sum_j N_{ij} C_j \quad (2.1.9)$$

其中

$$\langle \tilde{\Phi}_i | H | \tilde{\Phi}_j \rangle = H_{ij} \quad (2.1.10)$$

$$\langle \tilde{\Phi}_i | \tilde{\Phi}_j \rangle = N_{ij} \quad (2.1.11)$$

结果,求解 Schrödinger 方程转换为广义的线性代数本征值问题。

2.1.2 变分参数和本征值问题的求解

原则上,式(2.1.4)和(2.1.6)中的基矢 $\tilde{\Phi}_K^a$ 张开了一无穷维的 Hilbert 空间。实际上,在求解本征值问题时,先取有限数目的基矢,再逐渐扩大基矢的数目,直至计算得到的能量已经收敛到所要求的精度。在本文中,因主要侧重于定性的分析,而不强调定量上的高精度,因此,只要求能量具有三位有效数字的精度。

2.2 三体 and 四体的 Talmi-Monshinsky(TM)变换系数

将单粒子坐标 $X_i (i=1,2,\dots,N)$ 变换为质心坐标 $\mathfrak{S}$ 和内部相对运动的 JCO,如 α 系, β 系, γ 系等。对应地有若干套原始基矢 $\{\Phi_K^a\}, \{\Phi_K^b\}, \{\Phi_K^c\}, \dots$, 每两套原始基矢之间由一组么正变换相联系。

2.2.1 三体的 TM 系数

对于 $N=3$ 的少体系统,单粒子坐标 X_1, X_2, X_3 可变换为质心坐标 $\mathfrak{S}$ 和 JCO 坐标。共有三套等价的 JCO 坐标 α, β 和 γ , 如图 2.2.1 所示。对应地有三套原始基矢

$$\Phi_K^a(123) = (\varphi_{n_1 l_1}(\mathbf{r}^a) \varphi_{n_2 l_2}(\mathbf{R}^a))_{L^\pi} \quad (2.2.1)$$

$$\Phi_K^b(231) = (\varphi_{n_1 l_1}(\mathbf{r}^b) \varphi_{n_2 l_2}(\mathbf{R}^b))_{L^\pi} \quad (2.2.2)$$

$$\Phi_K^\gamma(312) = (\varphi_{n_1 l_1}(\mathbf{r}^\gamma) \varphi_{n_2 l_2}(\mathbf{R}^\gamma))_{L^\pi} \quad (2.2.3)$$

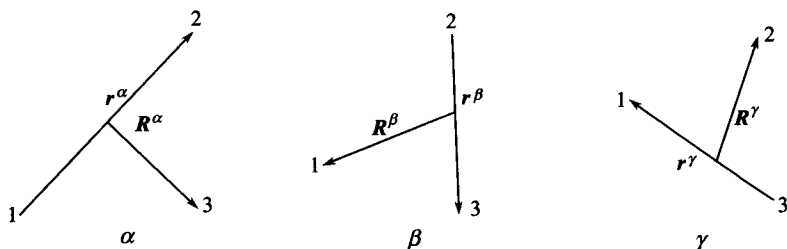


图 2.2.1

而 $K = \{n_1 l_1 n_2 l_2\}$ 。上述三套基矢之间通过如下的幺正变换相联系

$$\begin{aligned} \Phi_K^\alpha(123) &= \sum_q \langle \Phi_q^\beta | \Phi_K^\alpha \rangle \Phi_q^\beta(231) \\ &= \sum_q A_{Kq}^{\alpha i L} (m_1 m_2 m_3 / 1) \Phi_q^\beta(231) \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

其中, m_1, m_2, m_3 分别是三个粒子的质量, 同理

$$\begin{aligned} \Phi_K^\alpha(123) &= \sum_q \langle \Phi_q^\gamma | \Phi_K^\alpha \rangle \Phi_q^\gamma(312) \\ &= \sum_q B_{Kq}^{\alpha \gamma i L} (m_1 m_2 m_3 / 2) \Phi_q^\gamma(312) \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

其中, $q = \{n'_1 l'_1 n'_2 l'_2\}$ 。式(2.2.4)和(2.2.5)中的求和需要满足

$$\sum_{i=1}^2 (2n_i^{(K)} + l_i^{(K)}) = \sum_{j=1}^2 (2n_j^{(q)} + l_j^{(q)}) \quad (2.2.6)$$

的限制(即 $\Phi_q^\beta, \Phi_q^\gamma$ 与 Φ_K^α 是简并的)。变换系数

$$A_{Kq}^{\alpha i L} (m_1 m_2 m_3 / 1) = \langle \Phi_q^\beta | \Phi_K^\alpha \rangle \quad (2.2.7)$$

和

$$B_{Kq}^{\alpha \gamma i L} (m_1 m_2 m_3 / 2) = \langle \Phi_q^\gamma | \Phi_K^\alpha \rangle \quad (2.2.8)$$

称为广义的三体 Talmi-Monshinsky(TM)系数^[44,45]。

为了具体计算 TM 系数, 需要引入声子表象^[24]。首先令

$$\begin{cases} \xi = \sqrt{\frac{\mu_{12}^{(\alpha)} \omega}{\hbar}} \mathbf{r}^\alpha \\ \eta = \sqrt{\frac{\mu_{12,3}^{(\alpha)} \omega}{\hbar}} \mathbf{R}^\alpha \end{cases} \quad (2.2.9)$$

$$\begin{cases} \xi' = \sqrt{\frac{\mu_{12}^{(\beta)} \omega}{\hbar}} \mathbf{r}^\beta \\ \eta' = \sqrt{\frac{\mu_{12,3}^{(\beta)} \omega}{\hbar}} \mathbf{R}^\beta \end{cases} \quad (2.2.10)$$

式中

$$\begin{cases} \mu_{12}^{(\alpha)} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m}{2} \\ \mu_{12,3}^{(\alpha)} = \frac{(m_1 + m_2) m_3}{M} = \frac{2m}{3} \end{cases} \quad (2.2.11)$$

$$\begin{cases} \mu_{12}^{(\beta)} = \frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3} = \frac{m}{2} \\ \mu_{12,3}^{(\beta)} = \frac{(m_2 + m_3) m_1}{M} = \frac{2m}{3} \end{cases} \quad (2.2.12)$$

称为约化质量, 而 $m_1 = m_2 = m_3 = m$, $M = m_1 + m_2 + m_3$, ω 为谐振子的振动频率。

α 系与 β 系之间有如下的线性变换关系

$$\begin{cases} \xi = a\xi' - b\eta' \\ \eta = b\xi' + a\eta' \end{cases} \quad (2.2.13)$$

式中

$$\begin{cases} a = - \left[\frac{m_1 m_3}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)} \right]^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \\ b = \left[\frac{M m_2}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad (2.2.14)$$

引入声子算符

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\nabla_{\xi} + \xi) \\ \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\nabla_{\eta} + \eta) \end{cases} \quad (2.2.15)$$

和

$$\begin{cases} \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\nabla_{\xi'} + \xi') \\ \beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\nabla_{\eta'} + \eta') \end{cases} \quad (2.2.16)$$

则有

$$\begin{cases} \alpha_1 = a\beta_1 - b\beta_2 \\ \alpha_2 = b\beta_1 + a\beta_2 \end{cases} \quad (2.2.17)$$

在声子表象中,谐振子乘积态的原始基式(2.2.1)表示为

$$\Phi_K^a = C_{n_1 l_1} C_{n_2 l_2} \alpha_1^{2n_1} \alpha_2^{2n_2} [y_{l_1 m_1}(\alpha_1) y_{l_2 m_2}(\alpha_2)]_L |> \quad (2.2.18)$$

其中, l_1 与 l_2 耦合成 L , 因而蕴含对磁量子数 m_1, m_2 的式。

而

$$C_{nl} = (-1)^n \left[\frac{2l+1}{(2n+2l+1)!!(2n)!!} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.2.19)$$

为归一化常数。

$$y_{l_1 m_1}(\alpha_1) = \left(\frac{4\pi}{2l_1+1} \right)^{\frac{1}{2}} \alpha_1^{l_1} Y_{l_1 m_1}(\hat{\alpha}_1) \quad (2.2.20)$$

$|>$ 则为真空态矢量。

将式(2.2.17)代入式(2.2.18)之中,并利用公式

$$y_{lm}(a\beta_1 + b\beta_2) = \sum_{l'=0}^l \begin{pmatrix} 2l \\ 2l' \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} a^{l'} b^{l-l'} [y_{l' m'}(\beta_1) y_{l-l' m-m'}(\beta_2)]_{lm} \quad (2.2.21)$$

和

$$(\cos\theta)^q = \sum_k D_k^q P_k(\cos\theta) \quad (2.2.22)$$

$$D_k^q = \begin{cases} (2k+1) \frac{(q-1)!!q!!}{(q-k)!!(q+k+1)!!}, & (-1)^{q+k} = 1 \text{ 且 } q \geq k \\ 1, & q = k = 0 \\ 0, & (-1)^{k+q} = -1 \end{cases} \quad (2.2.23)$$

最后,式(2.2.18)成为

$$\Phi_K^a = \sum_{K'} A_{KK'}^{a1L}(m_1 m_2 m_3 / 1) C_{n'_2 l'_2} C_{n'_2 l'_2} \beta_1^{2n'_1} \beta_2^{2n'_2} [y_{l'_1 m'_1}(\hat{\beta}_1) y_{l'_2 m'_2}(\hat{\beta}_2)]_{L^*} | > \quad (2.2.24)$$

而 $A_{KK'}^{a1L}(m_1 m_2 m_3 / 1)$ 为 α 系到 β 系的三体 TM 变换系数。

同理, 对于 α 与 γ 系之间的变换, 可得到 $B_{KK'}^{a\gamma 1L}$ 的详尽表达式, 其形式与 $A_{KK'}^{a1L}$ 一样, 只是 a, b 变为

$$\begin{cases} a' = - \left[\frac{m_2 m_3}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)} \right]^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \\ b' = - \left[\frac{M m_1}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)} \right]^{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad (2.2.25)$$

三体 TM 系数有下列性质:

对称性

$$A_{KK'}^{a1L}(m_1 m_2 m_3 / 1) = A_{K'K}^{\beta a 1L}(m_1 m_2 m_3 / 1) \quad (2.2.26)$$

正交归一性

$$\sum_{K''} A_{KK''}^{a1L}(m_1 m_2 m_3 / 1) A_{K'K''}^{a1L}(m_1 m_2 m_3 / 1) = \delta_{KK'} \quad (2.2.27)$$

并且, $A_{KK'}^{a1L}(m_1 m_2 m_3 / 1)$ 与 $B_{KK'}^{a\gamma 1L}(m_1 m_2 m_3 / 2)$ 有如下的关系

$$A_{KK'}^{a1L}(m_1 m_2 m_3 / 1) = (-1)^{l_1 + l'_1} B_{KK'}^{a\gamma 1L}(m_1 m_2 m_3 / 2) \quad (2.2.28)$$

以上各式中, $K = \{n_1 l_1 n_2 l_2\}$, $K' = \{n'_1 l'_1 n'_2 l'_2\}$ 。

2.2.2 四体 Talmi-Monshinsky(TM)变换系数

四体的 TM 系数是四体系统任意两套等价的原始基之间的变换系数, 它可通过三体的 TM 系数来表示。定义四体系统中的两套原始基函数

$$\Phi_K(1234) = [\varphi_a(\mathbf{r}_{12})(\varphi_b(\mathbf{r}_{34})\varphi_c(\mathbf{r}_{12,34}))]_{l_0}]_{L^*} \quad (2.2.29)$$

和

$$\Phi_K(1324) = [\varphi_a(\mathbf{r}_{13})(\varphi_b(\mathbf{r}_{24})\varphi_c(\mathbf{r}_{13,24}))]_{l_0}]_{L^*} \quad (2.2.30)$$

其中, φ_a 是归一化的谐振子波函数, $a = \{n_a l_a\}$, $b = \{n_b l_b\}$, $c = \{n_c l_c\}$, $K = \{a, b, c, l_0\}$, Φ_K 称为原始基, L^* 为系统的总角动量和宇称。 l_b 和 l_c 耦合