

高中新课标

◎根据教育部最新教材编写◎



教材全解丛书

中学教材全解

ZHONGXUEJIAOCAI
QUANJIE

总主编 / 薛金星

高中数学

选修 2-3

配套人民教育出版社实验教科书



陕西人民教育出版社

B 版

高中新课标

根据教育部最新教材编写

中学教材全解

高中数学选修 2-3

配套人民教育出版社实验教科书 B 版



陕西人民教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

中学教材全解. 高中数学: 选修/薛金星主编; 丁一分册主编. —西安: 陕西人民教育出版社, 2005. 3

ISBN 7—5419—9462—6

I. 中... II. ①薛... ②丁... III. 数学课—高中—教学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 028956 号

中学教材全解

高中数学选修 2-3

配套人民教育出版社实验教科书 B 版

陕西人民教育出版社出版发行

(西安市长安南路 181 号)

各地书店经销 北京市昌平兴华印刷厂印刷

890×1210 毫米 32 开本 7.5 印张 280 千字

2006 年 1 月第 1 版 2006 年 1 月第 1 次印刷

ISBN 7—5419—9462—6/G·8250

定价: 10.80 元

出版前言

《中学教材全解》系列丛书根据教育部最新教材编写。值此出版之际,我们祝愿《中学教材全解》将伴随您度过中学阶段的美好时光,帮您迈向日夜向往的高等学府。

这套丛书与其他同类书相比具有以下几个鲜明特色:

第一,新。

首先是教材新。本书以最新教改精神为依据,以现行初、高中最新教材为蓝本编写。其次是体例新。紧扣教材,步步推进,设题解题、释疑解难、课后自测、迁移延伸,逐次深入。其三是题型(材料)新。书中选用的题型(材料)都是按中考、高考要求精心设计挑选的,让读者耳目一新。

第二,细。

首先是对教材讲解细致入微。以语文科为例,小到字的读音、词的辨析,大到阅读训练和作文训练都在本书中有所体现。其次是重点难点详细讲析,既有解题过程又有思路点拨。其三是解题方法细,一题多解,多题一法,变通训练,总结规律。

第三,精。

首先是教材内容讲解精。真正体现围绕重点,突破难点,引发思考,启迪思维。根据考点要求,精讲精析,使学生举一反三,触类旁通。其次是问题设置精,注重典型性,避免随意性,注重迁移性,避免孤立性,实现由知识到能力的过渡。

第四,透。

首先是对教纲考纲研究得透。居高临下把握教材,立足于教材,又不拘泥于教材。其次是对学生知识储备研究得透。学习目标科学可行,注重知识“点”与“面”的联系,“教”与“学”的联系。再次是对问题讲解得透,一题多问,一题多解,培养求异思维和创新思维能力。

第五,全。

首先是知识分布全面。真正体现了“一册在手,学习内容全有”的编写指导思想。其次是该书的信息量大。它涵盖了中学文化课教学全部课程和教与学的全部过程,内容丰富,题量充足。再次是适用对象全面。本书着眼于面向全国重点、普通中学的所有学生,丛书内容由浅入深,由易到难,学生多学易练,学习效果显著。

本系列丛书虽然从策划、编写,再到出版,精心设计,细致操作,可谓尽心尽力,但疏漏之处在所难免,诚望广大读者批评指正。

薛金星于北师大



目 录



第一章 计数原理	(1)	1.3 二项式定理	(66)
本章综合解说	(1)	1.3.1 二项式定理	(66)
1.1 基本计数原理	(3)	新课标导学	(66)
新课标导学	(3)	教材内容全解	(67)
教材内容全解	(3)	典型例题精析	(69)
典型例题精析	(5)	新课标问题探究	(74)
新课标问题探究	(10)	高考要点阐释	(78)
高考要点阐释	(13)	知识归纳提升	(79)
知识归纳提升	(15)	课后习题全解	(81)
课后习题全解	(16)	1.3.2 杨辉三角	(82)
1.2 排列与组合	(18)	新课标导学	(82)
1.2.1 排 列	(18)	教材内容全解	(82)
新课标导学	(18)	典型例题精析	(84)
教材内容全解	(19)	新课标问题探究	(90)
典型例题精析	(25)	高考要点阐释	(92)
新课标问题探究	(34)	知识归纳提升	(93)
高考要点阐释	(36)	课后习题全解	(94)
知识归纳提升	(37)	章末总结提高	(97)
课后习题全解	(39)	知识网络归纳	(97)
1.2.2 组 合	(41)	本章注意问题	(97)
新课标导学	(41)	专题综合讲解	(98)
教材内容全解	(41)	高考热点指南	(104)
典型例题精析	(46)	课后复习题全解	(106)
新课标问题探究	(57)	第二章 概 率	(111)
高考要点阐释	(60)	本章综合解说	(111)
知识归纳提升	(62)	2.1 离散型随机变量及其分布列	
课后习题全解	(64)	(113)

新课标导学	(113)	知识归纳提升	(184)
教材内容全解	(113)	课后习题全解	(185)
典型例题精析	(117)	章末总结提高	(186)
新课标问题探究	(122)	知识网络归纳	(186)
高考要点阐释	(124)	本章注意问题	(186)
知识归纳提升	(126)	专题综合讲解	(187)
课后习题全解	(127)	高考热点指南	(196)
2.2 条件概率与事件的独立性		课后复习题全解	(199)
.....	(132)	第三章 统计案例	(202)
新课标导学	(132)	本章综合解说	(202)
教材内容全解	(133)	3.1 独立性检验	(204)
典型例题精析	(137)	新课标导学	(204)
新课标问题探究	(144)	教材内容全解	(204)
高考要点阐释	(145)	典型例题精析	(208)
知识归纳提升	(149)	新课标问题探究	(211)
课后习题全解	(152)	知识归纳提升	(211)
2.3 随机变量的数字特征		课后习题全解	(213)
.....	(158)	3.2 回归分析	(213)
新课标导学	(158)	新课标导学	(213)
教材内容全解	(159)	教材内容全解	(214)
典型例题精析	(163)	典型例题精析	(218)
新课标问题探究	(168)	新课标问题探究	(224)
高考要点阐释	(170)	高考要点阐释	(225)
知识归纳提升	(174)	知识归纳提升	(227)
课后习题全解	(176)	课后习题全解	(229)
2.4 正态分布	(177)	章末总结提高	(230)
新课标导学	(177)	知识网络归纳	(230)
教材内容全解	(178)	本章注意问题	(230)
典型例题精析	(181)	专题综合讲解	(231)
新课标问题探究	(182)	高考热点指南	(233)
高考要点阐释	(183)	课后复习题全解	(233)

第一章

计数原理

1. 本章在学科知识中的地位与重要性

本章知识前面承启必修3的古典概型,后面辐射概率及统计,是高考中的重要内容之一。

2. 本章主要内容

本章主要学习三大块内容:一是基本计数原理,分为分类加法计数原理和分步乘法计数原理;二是排列与组合,介绍了排列与组合的应用;三是二项式定理,介绍了二项式定理和杨辉三角。

本章知识与实际联系较为密切,它的每一道题目都是从社会实践、科学试验中抽象出来的,因此学习本章知识时要注意联系实际。

3. 学习本章知识需注意以下几点

(1) 搞清易混淆的概念:如排列与排列数、组合与组合数、二项式系数与二项展开式的系数、加法原理与乘法原理等。



(2)运用公式时要注意公式适用的前提条件.

(3)立足基础知识、基本方法、基本技能的学习,认真研究典型例题,搞深搞透,形成典型问题的思维模式,奠定解其他相关问题的思维依托.

(4)注意数学思想的应用,如分类讨论、等价转化、整体思想、正难则反思想等.

1.1 基本计数原理



新课标导学

一、学习目标

1. 知识与技能

通过本节课的学习,你将能总结出分类加法计数原理和分步乘法计数原理,并能用这两个计数原理解决有关问题.

2. 过程与方法

本节由史先生的两种理财方案引出了分类计数原理和分步计数原理,然后通过三个具体例题给出了具体的应用方案.

3. 情感、态度与价值观

通过本节的学习,可以体验知识的形成过程,获得分析问题、抽象问题的方法,知道数学知识来源于实际又服务于实际.

二、相关知识链接

本节知识与现实生活联系密切,需要一些生活常识,望同学们注意积累.



教材内容全解

一、知识点全解

知识点 1 分类加法计数原理

做一件事,完成它有 n 类办法,在第一类办法中有 m_1 种不同的方法,在第二类办法中有 m_2 种不同的方法……在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法,那么完成这件事共有 $N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ 种不同的方法.

温馨提示:

(1)清楚怎样才是完成一件事的含义,即知道做“一件事”或叫完成一个“事件”在题目中具体所指.

(2)解决“分类”问题,用分类计数原理,即完成事件通过途径 A ,就不必再通过途径 B 就可以单独完成.

(3)每个题中,标准不同,分类也不同,分类的基本要求是:每一种方法必属于某一类(不漏),任意不同类的两种方法是不同的方法.

例 1 王刚同学衣服上左、右各有一个口袋,左边口袋装有 30 个英语单词卡片,右边口袋装有 20 个英语单词卡片,这些英语单词卡片都互不相同,问从两个口袋里

任取一个英语单词卡片,有多少种不同的取法?

解:从口袋中任取一个英语单词卡片的方法分两类:

第一类:从左边口袋取一个英语单词卡片有 30 种不同的取法;

第二类:从右边口袋取一个英语单词卡片有 20 种不同的取法.

上述的其中任何一种取法都能独立完成取一个英语单词卡片这件事,应用分类计数原理,所以从中任取一个英语单词卡片的方法种数为 $30+20=50$ (种)不同取法.

例 2 从甲地到乙地,可以乘火车,可以乘汽车,也可以乘轮船,还可以坐飞机,一天中,火车有 4 班,汽车有 2 班,轮船有 3 班,飞机有 1 班,那么一天中乘坐这些交通工具从甲地到乙地共有多少种不同的走法?

解:因为一天中乘火车有 4 种走法,乘汽车有 2 种走法,乘轮船有 3 种走法,乘飞机有 1 种走法,每一种走法都可以从甲地到达乙地,因此,一天中乘坐这些交通工具从甲地到乙地共有 $4+2+3+1=10$ (种)不同的走法.



如果完成一件事有 n 类办法,这 n 类办法彼此之间是互相独立的,无论哪一类办法中的哪一种方法都能单独完成这件事,求完成这件事的方法种数就是用分类计数原理.

上面两个例题都是利用分类计数原理予以解答的.

知识点 2 分步乘法计数原理

做一件事,完成它需要分成 n 个步骤,做第一个步骤有 m_1 种不同方法,做第二个步骤有 m_2 种不同方法……做第 n 个步骤有 m_n 种不同方法,那么完成这件事共有 $N=m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$ 种不同的方法.

温馨提示:

(1)清楚怎样才是完成一件事的含义,即知道完成一个事件,在每个题中需要经过哪几个步骤.

(2)解决“分步”问题,用分步乘法计算原理,需要分成若干个步骤,每个步骤都完成了,才算完成一个事件,注意各步骤之间的连续性.

(3)每个题中,标准不同,分步也不同.分步基本要求:一是完成一件事,必须且只需连续做完几步,即不漏步也不重步.二是每个步骤的方法之间是无关的,不能互相替代.

例 3 二年级一班有学生 56 人,其中男生 38 人,从中选取 1 名男生和 1 名女生做代表,参加学校组织的社会调查团,选取代表的方法有多少种?

解:∵ 男生为 38 人,女生为 18 人,根据本题题意要完成一件事需 2 个步骤:

第一步可从男生 38 人中任选 1 人,有 38 种不同的选法;

第二步可从女生 18 人中任选 1 人,有 18 种不同的选法.

只有上述两步完成后,才能完成从男生中和女生中各选 1 名这件事,根据分步计数原理共有 $38 \times 18 = 684$ (种)选取代表的方法.

例 4 某市电话号码为 8 位数字,问该市最大的装机容量为多少?

解:电话号码可看成 8 个位置,每个位置都可以放 0,1,2,⋯,9 这 10 个数码中的任何 1 个,因此,由分步计数原理知最大的装机容量为 $10 \times 10 \times \cdots \times 10 = 10^8$ (门).

二、教材题目研究

本节教材共给出了三个例题,其中例 1、例 2 是分步加法计数原理与分步乘法计数原理的应用,例 3 是分步乘法计数原理的应用.

变式引申:一把数字号码锁共有 5 个号码,每个号码的圆盘上有 0,1,2,⋯,9 共 10 个数码,现给这把锁确定一个开锁的密码,有一人在这把锁上随意拨出五位号码,它刚好能开启这把锁的可能性是多大?

分析:关键是要搞清楚这把号码锁的号码总共有多少个.我们把号码锁的 5 个号码顺序表示为第一、二、三、四、五位,“给定一个号码”这件事可以分成五个步骤来完成,即分别确定第一到第五位数字.当且仅当这五个步骤都完成以后,这件事才算完成,这是分步问题,应该用分步计数原理.而由题意,完成每一步都有 10 种方法.

解法 1:共有 $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5$ (个)号码,

故随意拨出一个号码,它刚好能开锁的可能性是 $\frac{1}{10^5}$ (即十万分之一).

解法 2:本题实质上是一个数字可以重复的问题,即各个数位上的数字可以不同,也可以相同,它可以看成是共有多少个“五位数”(前面可以有若干个零),由于可以看成是 00 000 到 99 999 的整数的个数,因此共有 $99\,999 - 00\,000 + 1 = 10^5$ (个)数,这与我们解得的结果是一致的.



题型一 有关分类加法计数原理问题

例 1 在所有的两位数中,个位数字比十位数字大的两位数有多少个?

解:分析个位数字,可分以下几类.

个位是 9,则十位可以是 1,2,3,⋯,8 中的一个,故有 8 个;

个位是 8,则十位可以是 1,2,3,⋯,7 中的一个,故有 7 个;

与上类似

个位是 7 的有 6 个;

个位是 6 的有 5 个;

⋮;

个位是 2 的只有 1 个.

由分类计数原理知,满足条件的两位数有

$$1+2+3+4+5+6+7+8 = \frac{1+8}{2} \times 8 = 36(\text{个}).$$



本题也是用分类计数原理解答的. 结合本题可进一步加深对“完成一件事, 有 n 类办法”的理解, 所谓“完成一件事情, 有 n 类办法”, 这里是指对完成这件事情的所有办法的一个分类. 分类时, 首先要根据问题的特点确定一个适合于它的分类标准, 然后在这个标准下进行分类; 其次分类时要注意满足一个基本要求: 完成这类事情的任何一种方法必须属于某一类, 并且分别属于不同两类的两种方法是不同的方法, 只有满足这些条件, 才可以用分类计数原理.

例 2 在填写高考志愿时, 一名高中毕业生了解到, A, B 两所大学各有一些自己感兴趣的强项专业, 具体情况如下表所示, 那么, 这名同学可能的专业选择有多少种?

A 大学	B 大学
生物学	数学
化学	会计学
医学	信息技术学
物理学	法学
工程学	

分析: 由于这名同学在 A, B 两所大学中只能选择一所, 而且只能选择一个专业, 又由于两所大学没有共同的强项专业, 因此符合分类加法计数原理的条件.

解: 这名同学可以选择 A, B 两所大学的一所, 在 A 大学中有 5 种专业选择方法, 在 B 大学中有 4 种专业选择方法, 又由于没有一个强项专业是两所大学共有的, 因此根据分类加法计数原理, 这名同学可能的专业选择共有 $5+4=9$ (种).

例 3 一个书包内有 7 本不同的小说书, 另一个书包内有 5 本不同的教科书, 从两个书包内任取一本书的取法有()

- A. 7 种 B. 5 种 C. 12 种 D. 35 种

分析: 从两个书包内任取一本书, 完成这件事有两类办法, 第一类办法是从有小说的书包内任取一本; 第二类办法是从有教科书的书包内任取一本. 因此, 我们应利用分类加法计数原理求解.

解: 第一类: 从有 7 本不同小说的书包内任取一本书的取法有 7 种; 第二类: 从有 5 本不同教科书的书包内任取一本书的取法有 5 种, 于是根据分类加法计数原理可知, 从两个书包内任取一本书的取法有 $7+5=12$ (种). 故选 C.

答案: C

变式引申: 书架上层放 15 本不同的数学书, 中层放 12 本不同的语文书, 下层放 13 本不同的英语书, 某同学从中取出一本书, 有多少种不同的取法?

解: 共有 $15+12+13=40$ (种)不同的取法.

题型二 有关分步乘法计数原理问题

例4 (1)8本不同的书,任选了3本分给3个同学,每人1本,有多少种不同的分法?

(2)将4封信投入3个邮筒,有多少种不同的投法?

(3)3位旅客到4个旅馆住宿,有多少种不同的住宿方法?

解:(1)分三步,每位同学取书一本,第1、2、3个同学分别有8、7、6种取法,因而由乘法原理不同分法共有 $N=8 \times 7 \times 6=336$ (种).

(2)完成这件事情可以分作四步,第一步投第一封信,可以在3个邮筒中任选一个,因此有3种投法;第二步投第二封信,同样有3种投法;第三步投第三封信,也同样有3种投法;第四步,投第四封信,仍然有3种投法.由乘法原理,可得出不同的投法 $N=3 \times 3 \times 3 \times 3=3^4$ (种).

(3)分三步,每位旅客都有4种不同的住宿方法,因而共有不同的方法 $N=4 \times 4 \times 4=4^3$ (种).



在运用分步计数原理时,当完成每一步的方法数均为 m ,且 m 与 n 相近时,所得结果常发生 m^n 与 n^m 之间的混淆,正确解答问题的关键在于弄清“谁选择谁”,若“ p 某选择 q 某”,则答案应是 q^p .

例5 设某班有男生30名,女生24名,现要从中选出男、女生各一名代表班级参加比赛,共有多少种不同的选法?

分析:选出一组参赛代表,可以分成两个步骤:第一步选男生,第二步选女生.

解:第一步:从30名男生中选出一人,有30种不同的选择.第二步:从24名女生中选出一人,有24种不同的选择.

由分步乘法计数原理,共有 $30 \times 24=720$ (种)不同的选法.

例6 某商业大厦有8个门供顾客出入,某顾客从任一门进入,从另一门走出,则不同的走法种数为多少.

分析:顾客从商业大厦出入,需分两步完成:一是进入,二是走出.

解:第一步,顾客进入商业大厦时,可以从8个门中的任意一个进入,有8种进入方法;第二步,顾客走出商业大厦时,应从除去进入的门之外的7个门中走出,有7种走出方法,于是由分步乘法计数原理得,所求的走法种数为 $8 \times 7=56$ 种.



在考虑走出商业大厦大门时,不要误认为有8种方法.

变式引申:1. 某校教学大楼共有5层,每层均有2个楼梯,由一楼到五楼的走法共有_____种不同的走法.

解析:每层有两种走法,则共有 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2=2^5$ (种)不同的走法.

答案: 2^5



2, 3 名学生报名参加篮球、足球、排球、计算机课外兴趣小组, 每人选报一门, 则不同的报名方案有 _____ 种.

解析: 每名同学都有 4 种方式, 故 3 名同学都报完后, 才算完成报名工作, 故共有 $4 \times 4 \times 4 = 4^3$ (种) 不同方法.

答案: 4^3

3. 假若你班有学生 54 人, 其中男生 28 人, 从中选取一名男生和一名女生做代表, 参加学校组织的社会活动, 则选取代表的方法有多少种?

解: 第一步: 从 28 名男生中任取一人有 28 种不同的选法, 第二步: 从 $54 - 28 = 26$ 名女生中任取一人有 26 种不同的选法, 根据分步计数原理得, 要完成选取代表这一工作, 共有 $28 \times 26 = 728$ (种) 不同的方法.

题型三 综合题目

例 7 有三个袋子, 分别装有不同编号的红色小球 6 个, 白色小球 5 个, 黄色小球 4 个.

- (1) 从袋子里任取 1 个小球, 有多少种不同取法?
- (2) 从袋子里任取红、白、黄色小球各一个, 有多少种不同取法?

解: (1) 由分类计数原理知, 有 $6 + 5 + 4 = 15$ (种) 方法.

(2) 由分步计数原理知, 有 $6 \times 5 \times 4 = 120$ (种) 方法.

例 8 每天从甲地到乙地有火车两班, 汽车 10 班, 从乙地到丙地只有公路相通, 每天 8 班汽车, 问从甲地经乙地到丙地旅行, 有多少种不同的乘车走法?

解: 要完成的事情是“从甲地经过乙地再到丙地的旅行乘车走法”. 由题意, 必须分两步完成: 第一步是乘火车或汽车由甲地到乙地, 这一步是分类问题, 根据分类计数原理有 $(2 + 10)$ 种方法; 第二步是乘汽车由乙地到丙地, 有 8 种方法, 只有在这两步都完成以后, 才算完成这件事情, 最后应该用分步计数原理, 则有 $(2 + 10) \times 8 = 96$ (种).

答: 从甲地经过乙地到丙地旅行有 96 种不同的走法.

例 9 已知集合 $M = \{1, -2, 3\}$, $N = \{-4, 5, 6, -7\}$, 从两个集合中各取一个元素作点的坐标, 则在直角坐标系中, 第一、第二象限不同点的个数为 ()

- A. 18 B. 16 C. 14 D. 10

解析: 这可分为两类.

以集合 M 的元素做横坐标, N 的元素做纵坐标, 集合 M 中取一个元素的方法有 3 种, 要使点在第一、第二象限内, 则集合 N 中只能取 5, 6 两个元素中的一个有 2 种, 根据分步计数原理有 $3 \times 2 = 6$ (个).

以集合 N 的元素做横坐标, M 的元素做纵坐标, 集合 N 中任取一元素的方法有 4 种, 要使点在第一、第二象限内, 则集合 M 中只能取 1, 3 两个元素中的一个有 2 种, 根据分步计数原理, 有 $4 \times 2 = 8$ (个).

综合上面两类, 利用分类计数原理, 共有 $6 + 8 = 14$ (个).

答案: C



我们从上面几个例题看到:

如果完成一件事,可以有几类办法,这几类办法中的任一类办法都能独立的完成这件事,也就是说,这些方法都是互相独立的,并且是互斥的,此时应用分类计数原理:

如果完成一件事,需分成几个步骤进行,必须连续做完每个步骤才能完成这件事,且各个步骤是互相依存、缺一不可的,此时应用分步计数原理.

关于分类或分步,在类题中都要根据题设的条件确定分类或分步的标准.由于问题不同,分类或分步的标准也不同.

例 10 从 1 到 200 的自然数中,有多少个位数上不含数字 5 的数.

解:一位数中不含数字 5 的数共有 8 个(m_1),两位数中不含数字 5 的数可分两步来确定,其个位数字除 5 以外,还有 9 种选法,十位数字则还有 8 种选法,根据分步计数原理可知,共有 $m_2 = 9 \times 8 = 72$ (个)不含数字 5 的两位数.

三位数中不含数字 5 的数可分 3 步来确定,百位数字是 1 时,有 $9 \times 9 = 81$ (种),百位数字是 2 时,仅是 200,即 1 个,∴ $m_3 = 81 + 1 = 82$ (个).

因此满足条件的数共有 $N = m_1 + m_2 + m_3 = 8 + 72 + 82 = 162$ (个).

题型四 创新、拓展、实践

1. 数学与物理

例 11 在由电键组 A 与 B 所组成的并联电路中如图 1-1-1,要接通电源,使电灯发光的方法有多少种?

解:因为只要合上图 1-1-1 中的任一电键,电灯即发光,由于在电键组 A 中有 2 个电键,电键组 B 中有 3 个电键,应用分类计数原理,所以共有 $2 + 3 = 5$ (种)接通电源使电灯发光的方法.

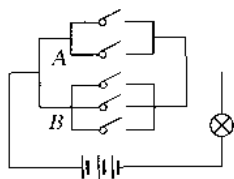


图 1-1-1

例 12 由电键组 A、B 组成的串联电路中,如图 1-1-2,要接通电源使电灯发光的方法有几种?

解:只有在合上 A 组中两个电键中的任意 1 个之后,再合上 B 组中 3 个电键中的任意 1 个,才能使电灯的电源接通,电灯才能发光.根据分步计数原理共有 $2 \times 3 = 6$ (种)不同的方法接通电源,使电灯发光.

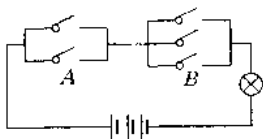


图 1-1-2

2. 数学与生活

例 13 从五种不同的颜色中选出若干种涂在如图 1-1-3 所示的①②③④各部分,若要求相邻部分的颜色不同,则不同的涂法共有多少种?

解:分两种情况

第一类:①④不同色,则①②③④所涂的颜色各不相同,我们可将这件事情分成 4 步来完成.



第一步涂①,从 5 种颜色中任选一种,有 5 种涂法;

第二步涂②,从余下的 4 种颜色中任选一种,有 4 种涂法;

第三步涂③,与第四步涂④时,分别有 3 种涂法和 2 种涂法,于是由分步乘法计数原理可得不同的涂法为 $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ (种).

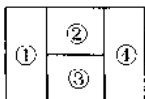


图 1-1-3

第二类:①④同色,则①②③不同色,将涂色工作分成三步来完成.第一步:涂①④,第二步涂②,第三步涂③,分别有涂法 5 种,4 种,3 种,再由分步乘法计数原理可知,不同的涂法有 $5 \times 4 \times 3 = 60$ (种).

综上所述,所求的涂色方法共有 $120 + 60 = 180$ (种).

例 14 电信公司开展电话业务,使用 7 位数的电话号码(允许第 1 位可以是 0)其中没有连续相邻的六位数字完全相同的情况,也没有七位数字相同的情况,试求该电信公司可开设的电话门数.

解: ∵ 七位数字的电话总门数有 10^7 门,而仅相邻六位数字完全相同的情况有 $2 \times 9 = 18$ 种,七位数字完全相同的有 10 种,所以该电信公司可开设的满足题设条件的电话门数为 $10^7 - 18 - 10 = 10^7 - 28$.

新思维问题探究

一、自主学习 现代科技在乘法原理中的应用

例 1 给程序模块命名,需要用 3 个字符,其中首字符要求用字母 A~G 或 U~Z,后两个要求用数字 1~9.问最多可以给多少个程序命名?

分析: 要给一个程序模块命名,可以分三个步骤:第 1 步,选首字符;第 2 步,选中间字符;第 3 步,选最后一个字符.而首字符又可以分为两类.

解: 先计算首字符的选法.由分类加法计数原理,首字符共有 $7 + 6 = 13$ (种)选法.再计算可能的不同程序名称.

由分步乘法计数原理,最多可以有 $13 \times 9 \times 9 = 1\,053$ (个)不同的名称,即最多可以给 1 053 个程序命名.

例 2 核糖核酸(RNA)分子是在生物细胞中发现的化学成分.一个 RNA 分子是一个有着数百个甚至数千个位置的长链,长链中每一个位置上都由一种称为碱基的化学成分所占据.总共有 4 种不同的碱基,分别用 A, C, G, U 表示.在一个 RNA 分子中,各种碱基能够以任意次序出现,所以在任意一个位置上的碱基与其他位置上的碱基无关.假设有一类 RNA 分子由 100 个碱基组成,那么能有多少种不同的 RNA 分子?

分析: 用图 1-1-4 来表示由 100 个碱基组成的长链,这时我们共有 100 个位置,每个位置都可以从 A, C, G, U 中任选一个来占据.

解: 100 个碱基组成的长链共有 100 个位置,如图 1-1-4 所示.从左到右依次在每一个位置中,从 A, C, G, U 中任选一个填入,每个位置有 4 种填充方法.根据分步乘法计数原理,长度为 100 的所有可能的不同 RNA 分子数目有

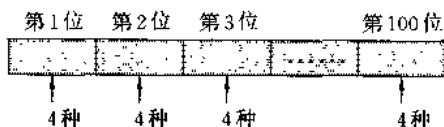


图 1-1-4

$$4 \times 4 \times \cdots \times 4 = 4^{100} \text{ (个)}.$$

100个4

二、合作学习 加乘原理的应用

例 3 电子元件很容易实现电路的通与断、电位的高与低等两种状态,而这也是最容易控制的两种状态.因此计算机内部就采用了每一位只有 0 或 1 两种数字的记数法,即二进制.为了使计算机能够识别字符,需要对字符进行编码,每个字符可以用一个或多个字节来表示,其中字节是计算机中数据存储的最小计量单位,每个字节由 8 个二进制位构成.问:

(1) 一个字节(8 位)最多可以表示多少个不同的字符?

(2) 计算机汉字国标码(GB 码)包含了 6 763 个汉字,一个汉字为一个字符,要对这些汉字进行编码,每个汉字至少要用多少个字节表示?

分析: 由于每个字节有 8 个二进制位,每一位上的值都有 0, 1 两种选择,而且不同的顺序代表不同的字符,因此可以用分步乘法计数原理求解本题.

解: (1) 用图 1-1-5 来表示一个字节.

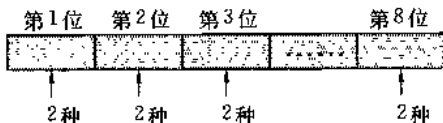


图 1-1-5

一个字节共有 8 位,每位上有 2 种选择.根据分步乘法计数原理,一个字节最多可以表示 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^8 = 256$ (个)不同的字符.

(2) 由(1)知,用一个字节所能表示的不同字符不够 6 763 个,我们就考虑用 2 个字节能够表示多少个字符.前一个字节有 256 种不同的表示方法,后一个字节也有 256 种表示方法.根据分步乘法计数原理,2 个字节可以表示 $256 \times 256 = 65\,536$ (个)不同的字符,这已经大于汉字国标码包含的汉字个数 6 763.所以要表示这些汉字,每个汉字至少要用 2 个字节表示.

例 4 若直线方程 $ax+by=0$ 中的 a, b , 可以从 0, 1, 2, 3, 5 这五个数字中任取两个不同的数字,则方程所表示的不同直线共有多少条?

分析: 因为有特殊数字 0, 应对它进行讨论.

解: 分两类完成:

第一类:当 a 或 b 中有一个为 0 时,表示的直线是 $y=0$ 或 $x=0$, 共两条.

第二类:当 a, b 均不为零时,直线 $ax+by=0$ 被确定需分两步完成,第一步确定