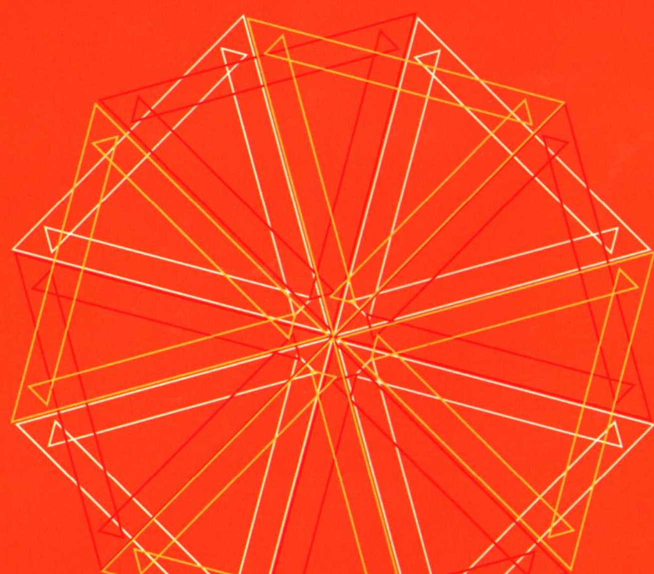
数学建模方法与实践

Shuxue Jianmo Fangfa yu Shijian

主编　董臻圃



国防工業出版社
National Defense Industry Press

数学建模方法与实践

主　编　董臻圃
副主编　康志校　封汉颖　郝飞龙

国防工业出版社
·北京·

内容简介

本书系统介绍了数学建模的基本知识、基本理论和常见方法。通过对什么是数学模型，为什么建立数学模型，怎样建立数学模型等基本知识的剖析和对各类典型数学建模实例的研究，揭示了数学建模全过程的特点和规律。主要内容包括：数学建模概论、数学建模方法、数学建模中的算法、数学建模软件等。书中列举了大量的应用实例，并按照由易到难，由浅入深的规律进行合理安排。每章配有一定数量的习题。全书结构合理、叙述详实、简略得当、可读性强。

本书可作为高等院校数学模型课程的教材或大学生数学建模竞赛辅导教材或参考书，也可供对数学建模有兴趣的读者自学。

图书在版编目(CIP)数据

数学建模方法与实践/董臻圃主编. —北京：国防工业出版社，2006.8

ISBN 7-118-04615-9

Ⅰ. 数...　Ⅱ. 董...　Ⅲ. 数学模型　Ⅳ. O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 072486 号

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号　邮政编码 100044)

国防工业出版社印刷厂印装

新华书店经售

*

开本 787×1092　1/16　**印张** 11¼　**字数** 250 千字

2006 年 8 月第 1 版第 1 次印刷　**印数** 1—4000 册　**定价** 20.00 元

国防书店：(010)68428422　　发行邮购：(010)68414474

发行传真：(010)68411535　　发行业务：(010)68472764

本书编委会

主　编　董臻圃

副主编　康志校　封汉颖　郝飞龙

编　委　荣志祥　刘鹏威　张雪东　杨戍

前　言

马克思说:“一门科学只有成功地运用数学时,才算达到了完善的地步。”随着 21 世纪以计算机为主的信息技术的飞速发展,人类社会进入信息时代的步伐不断加快,由此引发的数学向各个领域的渗透也更为广泛和深入。在数学科学、自然科学和社会科学这三大基础科学中,数学科学的地位和作用越来越突出。高技术本质上就是数学技术的理念已得到人们的共识。因此,培养应用数学的意识和能力,是数学教学的方向和任务。进行数学建模教学正是实现这一任务的最好途径。

简单地说,数学建模是联系数学与现实生活实际的纽带和桥梁。有了数学并用数学技术去解决各种实际问题,就必须用数学的语言、方法去近似地刻画、描述实际问题,这种用描述、刻画的数学表达,其结果就是一个数学模型,这个过程就是数学建模的过程。

本书是根据多年的数学建模教学讲义和数学建模竞赛指导实践经验以及参考优秀的数学建模专著教材编写而成的。本书力求将基本知识、方法和计算机应用融为一体,使学生感到所学方法的可用性,从而完成“现实问题一数学问题一数学建模一数学知识与方法一成果释译”的学习过程,帮助学生实现由知识向能力的转化。

本书阐明了数学建模的基本理论和方法,介绍了常见的十几种数学建模方法。内容包括:初等数学建模、量纲分析建模、线性规划建模、非线性规划建模、图和网络规划建模、概率统计建模、逻辑方法建模、层次分析建模、变分法建模、回归分析建模、模糊系统建模、差分方法建模和微分方程建模等建模方法,共 14 章。各章内容具有相对的独立性,可根据需要进行取舍。同时,对各种建模方法,都配有适当的例题和习题。

本书的叙述清晰准确,条理分明;概念和方法的引进深入浅出,通俗易懂。对参加数学建模竞赛的各专业工科学生、研究生、科技工作者、工程技术人员以及数学建模爱好者会有很大的帮助;也可作为本科生、研究生数学建模课程的教材。

在本书出版之际,谨向对本书编写给予热情关心和帮助的各位教师、专家教授,向给予本书大力支持的国防工业出版社表示衷心感谢。

限于作者水平,在内容的取材和结构的编排等方面存在着不妥之处,敬请批评指正!

编　者
2006 年 5 月

目　　录

第1章　数学建模概论

1.1　什么是数学模型

数学是研究现实世界数量关系和空间形式的科学，在它产生和发展的历史长河中，一直是和各种各样的应用问题紧密相关的。数学的特点不仅在于概念的抽象性、逻辑的严密性、结论的明确性和体系的完整性，而且在于它应用的广泛性。随着科学技术的迅速发展和计算机的日益普及，人们对各种问题的要求越来越精确，使得数学的应用越来越广泛和深入。特别是在进入21世纪的知识经济时代，数学科学的地位也发生了巨大的变化，它正在从国民经济和科学技术的后备走到了前沿。经济发展的全球化、计算机的迅猛发展，数学理论与方法的不断扩充，使得数学已经成为当代高科技的一个重要组成部分和思想库，数学已经成为一种能够普遍实施的技术。培养学生应用数学的意识和能力已经成为数学教学的一个重要方面。

应用数学去解决各类实际问题时，建立数学模型是十分关键的，同时也是十分困难的。建立教学模型的过程，是把错综复杂的实际问题简化、抽象为合理的数学结构的过程。要通过调查、收集数据资料，观察和研究实际对象的固有特征和内在规律，抓住问题的主要矛盾，建立起反映实际问题的数量关系，然后利用数学的理论和方法去分析和解决问题。这就需要深厚扎实的数学基础，敏锐的洞察力和想象力，对实际问题的浓厚兴趣和广博的知识面。数学建模是联系数学与实际问题的桥梁，是数学在各个领域广泛应用的媒介，是数学科学技术转化的主要途径；数学建模在科学技术发展中的重要作用越来越受到数学界和工程界的普遍重视，它已成为现代科技工作者必备的重要能力之一。为了适应科学技术发展的需要和培养高质量、高层次科技人才，数学建模已经在大学教育中逐步开展，研究生数学建模竞赛也正在蓬勃开展，国内外越来越多的大学正在开展数学建模课程的教学和开放性的数学建模竞赛，将数学建模教学和竞赛作为高等院校的教学改革和培养高层次的科技人才的一个重要方面。现在许多院校正在将数学建模与教学改革相结合，努力探索更有效的数学建模教学法和培养面向21世纪人才的新思路，与我国高校的其他数学类课程相比，数学建模具有难度大、涉及面广、形式灵活，对教师和学生要求高等特点；数学建模的教学本身是一个不断探索、不断创新、不断完善和提高的过程。为了改变过去以教师为中心、以课堂讲授为主、以知识传授为主的传统教学模式，数学建模课程指导思想是：以实验室为基础、以学生为中心、以问题为主线、以培养能力为目标来组织教学工作。通过教学使学生了解利用数学理论和方法去分折和解决问题的全过程，提高他们分析问题和解决问题的能力；提高他们学习数学的兴趣和应用数学的意识与能力，使他们在以后的工作中能经常性地想到用数学去定量地解决问题；提高他们尽量利用计算机软件及当代高新科技成果的意识，能将数学和计算机有机地结合起来去解决实际问题。

数学建模以学生为主，教师利用一些事先设计好问题启发引导学生主动查阅文献资料和学习新知识，鼓励学生积极开展讨论和辩论，培养学生主动探索，努力进取的学风，培养学生从事科研工作的初步能力，培养学生团结协作的精神、形成一个生动活泼的环境和气氛。教学过程的重点是创造一个环境去诱导学生的学习欲望、培养他们的自学能力，增强他们的数学素质和创新能力。提高他们的数学素质，强调的是获取新知识的能力和解决问题的过程，而不是知识与结果。接受参加数学建模竞赛赛前培训的学生大都需要学习诸如数理统计、最优化、图论、微分方程、计算方法、神经网络、层次分析法、模糊数学以及数学软件包的使用等“短课程”(或讲座)。这些课程用的学时不多，多数是启发性的讲一些基本的概念和方法，主要是靠学生自己去学，充分调动学生的积极性和充分发挥学生的潜能。培训中广泛地采用讨论的方式学生自己报告、讨论、辩论，教师主要起质疑、答疑、辅导的作用，竞赛中一定要使用计算机及相应的软件，如 Mathematica，Matlab，Mapple 以及排版软件等。

数学建模(Mathematical Modeling)作为一个词汇问世，不过是近几十年的事情。但是，在数学的产生、发展的历史长河中，人们用建立数学模型的办法解决需要求数量规律的现实问题，并获得巨大的成功，是不乏先例的。在高科技特别是计算机技术迅速发展的今天，计算和建模正成为数学科学技术化的主要途径。

什么是数学模型(Mathematical Model)？怎样建立数学模型？这是我们研究的首要问题。关于数学模型有各种不同的说法，我们也不必刻意追求其严格意义，重要的是弄清数学模型和建立数学模型的真谛。

伟大的导师马克思曾经教导我们：“一门科学只有在成功地运用数学时，才算是达到了真正完善的地步”。数学科学是一切科学的基础，而各门科学要成功地运用数学，首先应建立各门科学研究对象的数学模型，可以看出数学模型是各门科学运用数学的桥梁。要想弄清什么是数学模型，必须弄清什么是模型；要想知道什么是模型，必须先知道什么是原型。

原型是指客观存在的为人们所研究的各种实际对象、系统或过程，既包括有形的，也包括无形的、思维中的各种对象、系统和过程等。为了更好地研究原型可将原型加以分解，分成很多部分和层次。

模型是为了某种特定的目的而构造的整体原型或其部分或其某一层面的替代物，它集中反映了事物的本质。模型的分类如图 1-1 所示。

关于数学模型，目前还没有一个人们公认的定义。专家定义数学模型是对于现实世界的一个特定对象，为了一个特定的目的，根据事物特有的内在规律，做出一些必要的简化假设，运用适当的数学工具，得到的一个数学结构。这里所说的结构，是指一段程序、图形、表格、各种数学表达式等。这种描述性的定义既说清了数学模型的本质，又给出了具体的建模步骤，有很好的实用性，但作为定义还欠精练。在这里我们将数学模型定义为现实对象的数学表现形式，或用数学语言描述的实际现象，是实际现象的一种数学简化。这里的实际现象既包涵具体的自然现象，比如自由落体现象，也包涵抽象的现象；比如顾客对某种商品所表现的价值倾向。这里的描述不但包括外在形态、内在机制的描述，也包括预测、试验和解释实际现象等内容。数学建模是利用数学方法解决实际问题的一种实践，即通过抽象、简化、假设、引进变量等处理过程后，将实际问题用数学方式表达，建立起数

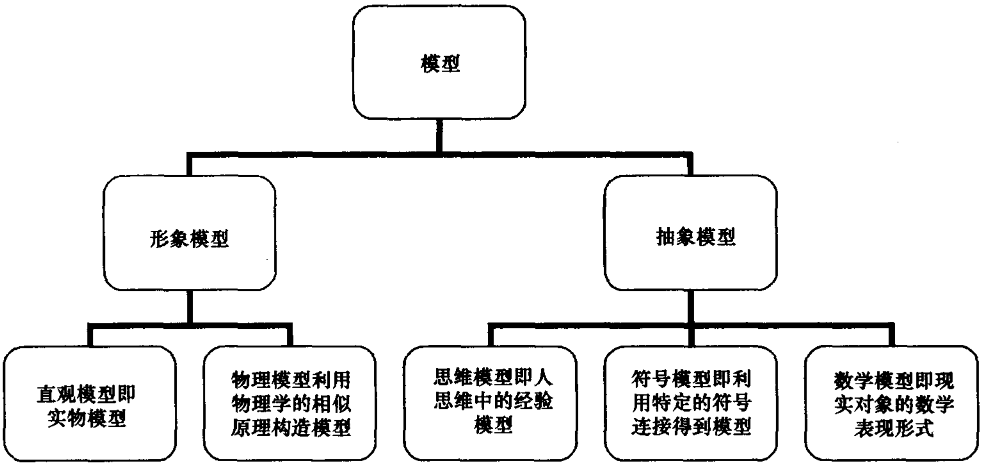


图 1－1　模型分类

学模型，然后，运用先进的数学方法及计算机技术进行求解。数学建模将各种知识综合应用于解决实际问题中，是培养和提高学生应用所学知识分析问题、解决问题能力的有效手段。

1.2　数学模型的分类

数学建模是一种创造性思维。迄今为止，在数学建模过程中，还没有可以应用的公式和定理，也没有统一的方法。所以，数学建模过程往往是一个灵活性很强的艰苦过程。为有效地、系统地尽快掌握数学建模方法，提高建模水平，我们将数学模型加以分类。从而，可以分门别类地去研究，希望能找出建模方法的共性。但是从哲学上讲，具体问题具体分析，所以，绝对的分类对于数学建模是不利的。我们对数学模型进行大致的分类，对于初学者确定问题所属系统和选用数学工具及较快找到和掌握建模方法、形成联想、开阔思路会有很大的帮助。

根据数学模型的数学特征和应用范畴，可以进行不同的分类，大致有下几种：

(1) 按照应用领域(或所属学科)，大体可分为生物数学模型、医学数学模型、数量经济数学模型、地理地质模型、人文数学模型、人口模型、交通模型、城市规划模型、水资源模型、污染模型、生态模型、环境模型、资源利用模型等。

(2) 按照建模数学方法，可将其分为初等模型、几何模型、微分方程模型、图论模型、规划模型、概率统计模型、马式链模型、排队论模型、规划论模型等。

(3) 根据模型的数学特性，可分为离散模型和连续模型、确定性和随机性模型、线性和非线性模型、静态和动态模型等。

(4) 根据建模的目的，可将其分为描述、分析、预测、决策、控制、优化、规划模型等。

(5) 按照对研究对象的了解程度分，有对研究对象的内部机理了解较为清楚的、利用机理分析方法建模的白箱模型；有对研究对象的内部机理了解不清楚的，甚至一无所知的，借助于系统的输入、输出数据利用概率统计分析方法建模的黑箱模型；对研究对象的内部机理有部分了解、又有部分不了解的建立灰箱模型。

1.3 建立数学模型的方法步骤

数学建模是指建立研究对象的数学模型的全过程。如何进行数学建模，大致有一定的方法和步骤可循。

1. 我们通过一个实例，来看看最简单的数学建模过程。

某船在河上航行于甲乙两码头，甲乙相距 750km，船从甲到乙顺水航行需要 30h，从乙到甲逆水航行需要 50h，问船的速度是多少?

这是一个航行问题，用初等数学的方法即可解决。

解：x 表示船速，y 表示水速，假设船和水都做匀速直线运动，也不考虑风的因素，列方程为

$$\begin{cases}(x+y)\times 30=750\\(x-y)\times 50=750\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x=20\\y=5\end{cases}$$

答：船速是 20km/h。

航行问题建立数学模型的基本步骤如下：

• 作出简化假设(船速、水速为常数)；

• 用符号表示有关量(x，y 表示船速和水速)；

• 用物理定律(匀速直线运动的距离等于速度与时间的乘积)列出数学式子(二元一次方程组)；

• 求得数学解答($x=20$，$y=5$)；

• 回答原问题(船速 20km/h)。

当然，实际问题中的数学建模要比这个问题复杂的多，我们可在实践中进行体会。

一般说来，建立数学模型的过程可用图 1－2 简略表示。

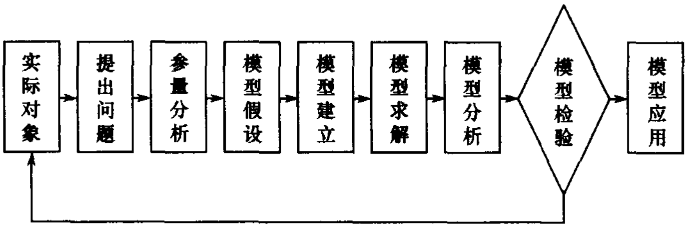


图 1－2

由于数学建模具有很大的灵活性，没有固定的定理和公式，因此，完成数学建模这类难度较大的思维活动，建模步骤显得十分重要，它是可能建好一个数学模型的基本保证。下面对图 1－2 的各个步骤加以说明。

(1) 提出问题　正确地提出问题是解决问题的一半，也是解决问题的关键所在。问题的提出很重要，如果问题提不好，那么这个问题也不会得到很好的解决。提出问题是在

对实际研究对象进行深入的研究后，弄清问题的主次，抓住本质，确定已知和目标，明确建模的目的和模型类型以及可能用到的建模方法等。这些都基于对问题的理解、认识程度。实际上，提出问题，就是把实际问题翻译成一个数学问题的过程。具体分析方法就依赖于个人的洞察力、想象力以及知识掌握程度、建模经验等。

(2) 参量分析　研究对象无论多么复杂或是比较简单，都与量有关，包括常量和变量。数学建模过程首先要搞清这些量之间的关系。参量分析这一步是先把我们的研究对象所涉及的量尽可能地找出来，然后根据建模的目的和要采用方法的需要，分清哪些是主要的，哪些是次要的，舍次留主，使问题得到简化。同时，还要明确哪些是自变量、因变量、参变量、已知量、未知量等。还要分清量的类型是随机性的还是确定性的。如果把所有量都用在模型中，模型是无法建立的，或者太复杂，求解困难，影响应用。为方便建立模型，求得结果，通常要舍弃一些量，这样必然使模型产生误差，但只要误差在允许的范围内就是可行的。在确定主要变量后，一定要通过数据处理，找出它们之间的数量关系，可能是微分、积分关系，也可能是四则运算关系，还可能是各种各样的复合关系。数据处理可通过绘制图表、联想相关数学知识等手段和方法进行分析。

(3) 模型假设　通过提出问题和参量分析，可以根据建模的目的，进行必要的假设，来确定建立数学模型的前提和已知条件。假设是一个对模型建立的简化过程和对问题的抽象过程，是对建模的前提和条件的界定，是为模型打基础的过程。确定模型假设要遵循以下的原则：

• 目的性原则　从建模的目的出发，在原型中抽象出与目的有关的主要因素，简化那些与建模目的关系不大的次要因素。

• 合理性原则　进行抽象简化假设时，一定要符合研究对象的实际；同时要求所给出的假设产生的误差能满足建模目的所允许的误差；最后，各假设之间不应相互矛盾。

• 适应性原则　所给出的假设一定要准确和适应于模型建立、求解、检验、应用过程。

• 全面性原则　要注意到假设的无偏性，还要给出原型所处的环境条件。

(4) 模型建立　这一过程是在前三个步骤的基础上，根据所研究对象本身的特点和内在的规律，依据模型假设，利用适当的数学工具和相关领域的知识，通过联想和创造性的发挥及严密的推理，最终形成描述所研究对象的数学结构的过程。在这一过程中，要注意以下几点：

第一，根据合理的模型假设，确定各种变量的地位和作用以及它们之间的关系，并写出其代数式的形式。

第二，在建立模型时，要根据具体问题选用适当的数学工具。建模工具的选用，要根据实际问题的特征、建模目的和本身所具有的数学特长而定。对于问题中确定性变量，建模时多采用初等数学、微积分、微分方程、线性规划、非线性规划、网络、投入产出、确定性存贮理论等；对于随机性变量，数学工具多采用概率统计、随机存储理论、排队论、对策论、决策论等。虽然数学科学中的学科很多，但在构造数学模型时都可能用到。而同一实际问题也可能构造出不同的数学模型，通常在能达到预期目的的前提下，所用数学工具越简单越好。

第三，建模时所采用的方法要根据实际问题的性质和假设中所给出的信息来定。构造数学模型的基本方法大致有机理分析建模法、系统辨识建模法、仿真建模法和相似类比

建模法等。机理分析法是在对研究对象内部机理分析的基础上，利用建模假设所给出的信息或前提条件及相关领域知识、相应的数学工具来构造数学模型；系统辨析法是对系统内部机理不清楚的情况下，利用建模假设或对系统的实际测试数据所给的系统的输入输出信息、数据，用纯粹的数学方法确定模型形式，借助于概率统计来辨识参数构造模型；仿真法是就是利用各种计算机仿真方法建立数学模型；相似类比法是借助于相似原理和事物之间的类比关系进行建模的方法，它根据不同的研究对象之间的某些相似性(包括数学相似、物理相似和其他相似)，借用已知领域的数学模型来构造数学模型的一种方法。随着计算机技术的发展，计算机仿真有力地促进了数学建模的发展，成为建模的重要工具。这些建模方法各有优劣，使用时可单用，亦可合用，以取长补短。

第四，根据不同问题的建模目的、性质，把握问题的本质、简化变量之间的关系。由于模型过于复杂，对求解造成困难，故应尽量使用简单的模型(如线性规划、均匀化等)来描述客观实际对象。

第五，建立模型时要有严密的数学推理。建模要有足够的精度，既要把问题(原型)本质的东西反映出来，去掉非本质的东西，同时还要不影响反映现实的真实程度。

(5) 模型求解　建立了数学模型，还要对模型进行数学上的求解，包括解方程、图解、定理证明、逻辑推理等各种数学方法，然后，通过计算机编程技术的应用，得到最终所要求的结果。很多复杂模型的建立是很困难的，需要做出简化，使得解析或数值求解成为可能，若是数值计算要注意计算的复杂性和误差等问题。对于模型参数的选取和确定，要使模型的计算值与实际最为接近。这里的解只是模型中的某些解，要对模型的各步结果根据需要作出必要的取舍。

(6) 模型分析　根据建模的目的要求，对模型求得的结果进行数学上的分析，利用相关知识结合研究对象的特点进行合理分析。主要依据问题的性质分析变量之间的依赖关系或稳定状态，或根据所得结果给出数学上的预报，或给出数学上的最优决策控制，无论哪种情况，都要进行误差分析、模型对参数或数据的稳定性或灵敏性分析。对所求得的解考察是否具有所要求的性质。经过模型分析，对不符合要求的进行修改或审查前几步是否有问题，特别要修改或增删模型假设，重新建模；对于符合要求的，还可以对模型进行评价、优化等方面的分析和探讨，同时把数学的表述解释或翻译成与现实问题相适应的通俗易懂的语言。

(7) 模型检验　模型检验也叫模型验证。通过以上步骤得到的模型结果，必须经受实际的检验，完成实践一理论一实践这一循环。当然，有些模型如核战争模型就不可能要求接受实际的检验了。模型检验也可以采用实际测量一些数据进行模型检验。如果检验结果正确或基本正确，就可以用来指导实际，否则，应重复上述过程。

(8) 模型应用　数学建模的目的就是为了应用，通过应用，可以对模型进行最客观的、最公正的检验。因此，一个好的数学模型要依据建模目的将其用于分析、研究和解决实际问题，从而充分发挥其在生产和科研领域中的作用。一个研究对象的数学模型往往不是一成不变的，需要我们在实践的检验中进行锤炼、完善、发展、提高。

数学建模的过程或方法步骤是以上八步不断循环反复的过程，也是数学建模实践性的必然结果。以上各步之间环环相扣、密切联系，是一个统一的整体。在建模过程中要灵活运用，反复试验。

第 2 章　初等数学模型

数学模型的建立并不一定都要用高深的知识，衡量一个模型的好坏，要看这个模型是否易于应用。在应用效果相近的情况下，建模所用的数学知识越简单就越容易被人们接受。实际上，对于一些比较简单的问题，由于内部机理比较明确，基本上用初等数学的方法就可以建立相应的数学模型，下面介绍几个这方面的例子。

2.1　怎样才能少淋雨

当人们在雨中行走的时候，为了少淋雨，总是尽量地走快一点，那么，是否走得越快，淋雨量就越小？是否存在最小的淋雨量？如果存在最小的淋雨量，什么情况下才可以达到？

问题本身是比较复杂的，因此我们首先要进行必要的简化假设：

(1) 将人体看作长方体，前、侧、顶的面积比为 $1:m:n$。

(2) 设人沿直线匀速行走，以人行走的方向为正向，速度向量为 $(u,0,0)$，行走距离为 l，那么行走的时间为 l/u。

(3) 雨速矢量为 (v_x,v_y,v_z) 保持不变。

在以上的假设条件下，可知单位时间内的淋雨量为

$$|u-v_x|\times u+|0-v_y|\times m+|0-v_z|\times n=|u-v_x|+|v_y|m+|v_z|n$$

显然，在雨速不变的条件下，单位时间内侧面和顶部的淋雨量是常数，记为 $a=|v_y|m+|v_z|n>0$，则总淋雨量可以表示为

$$G(u)=\frac{l}{u}(|u-v_x|+a)$$

这样，问题就转化为讨论 $G(u)$ 在何时取得最小值。下面，我们根据 v_x 的取值分别进行讨论：

(1) 当 $v_x>0$ 时

$$G(u)=\begin{cases}\dfrac{l(v_x+a)}{u}-l,(u\leqslant v_x)\\[2ex]\dfrac{l(a-v_x)}{u}+l,(u>v_x)\end{cases}$$

图 2-1、图 2-2 和图 2-3 分别为当 $v_x>a$、$v_x=a$、$v_x<a$ 时，$G(u)$ 的图形。显然，只有当 $v_x\geqslant a$ 并且 $u=v_x$ 时，$G(u)$ 才有最小值$\dfrac{la}{v_x}$。