

21世纪高等院校教材

GAILULUN YU
GAILULUN YU SHULITONGJI
SHULITONGJI

概率论 与 数理统计

骆先南 周 勇 主编



科学出版社

www.sciencepress.com

·21 世纪高等院校教材·

概率论与数理统计

骆先南 周 勇 主编

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书主要包括随机事件及概率, 随机变量及其分布, 多维随机变量及其分布, 随机变量的数字特征, 大数定律与中心极限定理, 数理统计的基本概念与抽样分布, 参数估计, 假设检验, 回归分析. 本书大部分章节配备典型例题分析及适量的习题, 书末附有习题答案.

本书适合高等院校经济类、管理类各专业本科生使用, 也可供科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/骆先南, 周勇主编. - 北京: 科学出版社, 2006

(21 世纪高等院校教材)

ISBN 7-03-016781-3

I. 概… II. ①骆…②周… III. ①概率论 - 高等学校 - 教材②数理统计 - 高等学校 - 教材 IV. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 003103 号

责任编辑: 杨瑰玉 / 责任校对: 王望容

责任印制: 高 嵘 / 封面设计: 赵 东 曹 刚

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

武汉大学出版社印刷总厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2006 年 1 月第 一 版 开本: B5 (720×1000)

2006 年 1 月第一次印刷 印张: 10 3/4

印数: 1~6 000 字数: 202 000

定价: 16.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

《概率论与数理统计》编者名单

主 编	骆先南	周 勇	
副主编	刘韶跃	朱 砾	
编 者	(以姓氏笔画为序)		
	刘树人	刘韶跃	朱 砾
	李以泉	李成福	周 勇
	骆先南	梁开福	彭向阳
	曾红云	谢清明	熊 颖

序

经济学在历史上一开始是具有人文色彩的. 语言描述成为其研究和处理问题的主要工具, 推理则是叙述性的. 然而, 随着经济的发展以及数学向各学科领域的渗透, 经济学家开始采用归纳推理的方法, 广泛利用数学工具, 使其迅速向数理经济学转化, 以适应经济社会发展的需要. 特别是随着计算机的迅速发展和数学的广泛应用, 数学在经济、管理学科中占有重要的地位, 这已经成为一个共识. 因此, 如何提高经济、管理类专业学生的数学素质和应用能力, 已成为高校数学教学一项重要任务. 为完成这一目标, 必须要有一套合适的教科书. 由湘潭大学数学与计算科学学院周勇教授等主编的系列教材《微积分》、《线性代数》和《概率论与数理统计》就是针对这类专业教学需要而编写的. 这套教材的出版, 为经济、管理类各专业的学生提供丰富的知识载体, 以满足日益拓广的专业需要.

本书着眼于提高学生数学素质和专业发展的需要, 保留了传统数学中的经典内容, 增加了与经济、管理密切相关的数学理论与方法, 并注重它们在该领域中的应用, 旨在培养应用能力, 增强创新意识; 在具体编排上, 体系和谐, 结构严谨; 在叙述方法上, 重在启发、探索和揭示过程, 并考虑到文科学生的思维方式和数学基础, 重要概念从它们的实际背景出发逐步延伸, 尽量避开数学本身的抽象; 在理论推导上, 科学、适度, 体现了直观平易、简便适用的原则; 例题和习题的选取与配置, 能起到对理论的诠释和方法的示例作用, 并能达到良好的练习效果. 总之, 本书具有鲜明的专业特色, 凝聚了作者多年的教学和教材编写的经验体会, 是近年来在教材建设上的又一成果. 本书不仅可作为经济、管理类本科各专业的教学用书, 而且对于广大经济、管理和其他科技工作者以及报考经济、管理类专业研究生的考生也是一套有实用价值的参考书.

一套教材的成熟, 需要时间去雕琢, 相信在同行专家的支持下, 该系列教材一定会进一步趋于完善.

周维楚

2005年12月

前 言

概率论与数理统计作为现代数学的重要分支,在自然科学和社会科学的各个领域都具有极其广泛的应用,正因如此,它已成为各类专业的一门重要的基础理论课,对提高学生的素质,优化学生的知识结构,培养学生的逻辑思维能力、抽象思维能力、分析问题和解决问题的能力,提高创新意识,并为后续课程的学习打下坚实的基础起着重要的作用.

本书是我们在多年来教学实践的基础上编写而成的,全书共九章,主要介绍概率论和数理统计的基础知识,包括随机事件及概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念与抽样分布、参数估计、假设检验和回归分析.本书的内容紧扣大纲,力求简明扼要.文字叙述力求通俗易懂,深入浅出.各章都配有适量的习题,并附有习题提示和答案.

本书适合高等院校经济、管理类各专业学生和教师使用,也可供科技工作者参考.

在本书的编写过程中,湘潭大学数学与计算科学学院、湘潭大学教务处给予了大力支持,在此深表感谢!

限于编者的学识水平和经验,书中尚有不妥之处,恳请同行和读者批评指正.

编 者

2005 年 10 月

目 录

第一章 随机事件及概率	(1)
第一节 随机事件及运算.....	(1)
第二节 随机事件的概率.....	(5)
第三节 条件概率	(10)
第四节 事件的独立性与独立试验概型	(14)
第五节 典型例题分析	(20)
习题一	(23)
第二章 随机变量及其分布	(25)
第一节 随机变量及其分布的概念	(25)
第二节 离散型随机变量	(27)
第三节 连续型随机变量	(32)
第四节 随机变量函数的分布	(37)
第五节 典型例题分析	(40)
习题二	(43)
第三章 多维随机变量及其分布	(46)
第一节 二维随机变量及其分布的概念	(46)
第二节 二维离散型随机变量与二维连续型随机变量	(47)
第三节 边缘分布与随机变量的独立性	(51)
第四节 两个随机变量的函数的分布	(60)
第五节 典型例题分析	(66)
习题三	(71)
第四章 随机变量的数字特征	(75)
第一节 数学期望	(75)
第二节 方差	(81)
第三节 协方差和相关系数	(84)
习题四	(89)
第五章 大数定律与中心极限定理	(92)
第一节 大数定律	(92)
第二节 中心极限定理	(94)
习题五	(97)

第六章 数理统计的基本概念与抽样分布	(99)
第一节 数理统计的基本概念	(99)
第二节 数理统计中的某些常用分布	(103)
第三节 正态总体统计量的分布	(106)
第四节 典型例题分析	(107)
习题六	(109)
第七章 参数估计	(110)
第一节 参数的点估计	(110)
第二节 参数的区间估计	(114)
习题七	(120)
第八章 假设检验	(122)
第一节 假设检验的基本概念	(122)
第二节 正态总体参数的假设检验	(124)
第三节 总体分布的假设检验	(130)
习题八	(132)
第九章 回归分析	(134)
第一节 回归分析的基本概念	(134)
第二节 一元线性回归	(135)
第三节 多元线性回归分析简介	(138)
习题九	(139)
习题参考答案	(140)
参考书目	(147)
附录	(148)

第一章 随机事件及概率

在生产实践和科学试验中,人们所观察到的现象一般可分为两类.一类是事前可以预知结果的,即在某些确定的条件下,某一确定的现象必然发生,或根据它过去的状态,完全可以预知它将来的发展状态.我们把这一类现象称为确定现象或必然现象.例如,在一个标准大气压下,水在 100°C 时一定沸腾;两个同性的电荷一定互斥;太阳从东方升起,等等.还有另一类现象,它是事前不能预知结果的,即在相同的条件下重复进行试验时,每次所得的结果未必相同,或者即使知道它过去的状态,也不能肯定它将来的发展状态.我们把这一类现象称为随机现象或偶然现象.例如,抛掷一枚均匀的硬币,硬币落地后究竟是正面向上还是反面向上,这在抛掷之前是无法断言的;又如,某射击运动员用一支步枪在同一地点进行射击训练,每次射击的成绩(环数)可能不同,并且在每次射击之前,均无法预知其射击后的成绩是多少,等等.

虽然随机现象在一定的条件下可能出现这样或那样的结果,而且在每一次试验之前不能预知这一次试验的确切结果,但经过长期的、反复的观察和实践,人们逐渐发现在相同条件下进行大量重复试验和观察时,试验的结果会呈现出某种规律性.这就是我们以后所讲的统计规律性.概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的一个数学分支,它在自然科学和社会科学的诸多领域有着广泛的应用.

第一节 随机事件及运算

一、预备知识

1. 乘法原理与加法原理

(1) 乘法原理.若一件事可通过接连 r 个连接的动作完成,而完成第一个动作有 m_1 种方法,完成第二个动作有 m_2 种方法, ..., 完成第 r 个动作有 m_r 种方法,则完成这件事的总方法数为

$$m_1 m_2 \cdots m_r.$$

这种方法称为乘法原理.

(2) 加法原理.若完成一件事有 r 类方式,且任一类方式的一种方法都能完成这件事,已知完成这件事的第一类方式中有 m_1 种方法,完成这件事的第二类方式中有 m_2 种方法, ..., 完成这件事的第 r 类方式中有 m_r 种方法,则完成这件事的总

方法数为

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_r.$$

这种方法称为加法原理.

2. 排列与组合

(1) 不允许重复的排列. 设有 n 个不同的元素, 从中选取 r 个不同的元素排成一列, 这样的一列称为从 n 个不同的元素中选取 r 个不同元素的一种排列 (亦称为不允许重复的排列), 这种排列的总个数为

$$n(n-1)\cdots(n-r+1) = A_n^r.$$

特别当 $r=n$ 时, $A_n^r = P_n = n!$, 它是排列的总个数. 且规定 $0! = 1$, 还可得公式

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

(2) 允许重复的排列. 若排列中的元素可重复, 从 n 个不同的元素中选取 r 个元素 (允许重复选取) 排成一列, 则所得排列的总个数为

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}_r = n^r.$$

此式可理解为从 n 个不同的元素中有放回地一个一个地取出 r 个元素排成一列的不同选取方法的总个数.

(3) 组合. 从 n 个不同的元素中任取 r 个不同的元素构成一组, 不考虑这 r 个元素的顺序, 只研究有多少种不同的组合法, 其不同组合的组个数记为 C_n^r 或 $\binom{n}{r}$, 则

$$A_n^r = C_n^r \cdot P_r,$$

即

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

二、随机试验与随机事件

在一定条件下, 对自然现象与社会现象进行的观察或实验称为试验.

定义 1.1 若试验满足下列三个条件:

- (1) 在相同的条件下可以重复进行;
- (2) 每次试验的可能结果不只一个, 但预先知道试验所有可能的结果;
- (3) 进行一次试验前, 不能预料究竟会出现哪一个结果.

称这样的试验为随机试验, 简称试验. 若无特别申明, 今后所指的试验均指随机试验.

下面是几个随机试验的例子:

例 1 投掷一枚骰子, 记录其点数.

例 2 记录某电话传呼台一小时内收到的呼叫数.

在随机试验中, 可能出现也可能不出现, 而在大量重复试验中具有某种规律性的结

果称为随机事件,简称事件.随机事件通常用大写英文字母 A, B, C 等表示.

例如,掷一颗骰子,观察出现的点数这个试验,“出现偶数点”是一随机事件,可用 $A = \{\text{出现偶数点}\}$ 表示.

三、基本事件与样本空间

定义 1.2 在一个随机试验中,每一个直接可能出现的,而且是试验中最简单的不能再分的结果,称为基本事件,亦称为试验的一个样本点,通常可记为 $e_1, e_2, \dots$.例如,抛掷一颗骰子,观察出现的点数这个试验,其基本事件是“出现 1 点”、“出现 2 点”、“出现 3 点”、“出现 4 点”、“出现 5 点”、“出现 6 点”这六个结果,分别可用 $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$ 表示.

定义 1.3 在一个随机试验中,全体样本点组成的集合称为这个试验的样本空间,记作 Ω .例如,在掷一颗骰子观察出现的点数这个试验中,其样本空间为 $\Omega = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$.

在一个随机试验中必然发生的事情称为必然事件,必然不发生的事情称为不可能事件,这两种事件不带随机性,按定义不是随机事件,但为了研究概率论的方便起见,仍作为随机事件.必然事件与不可能事件通常记为 Ω 与 $\emptyset$.

四、事件的关系与运算

由于事件是由基本事件所组成的集合,因此事件之间的关系与运算可按照集合之间的关系与运算来规定.

1. 事件的包含

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生,即事件 A 的样本点都是事件 B 的样本点,则称事件 B 包含事件 A ,或称事件 A 包含于事件 B 中,此时也称事件 A 是 B 的子事件,记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

例如, A 与 B 分别表示“直径不合格”与“产品不合格”,则 $A \subset B$.

若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称事件 A 与事件 B 相等,记作 $A = B$.

2. 事件的和(并)

“事件 A 与事件 B 至少有一个发生”这一事件称为事件 A 与 B 的和事件(或称 A 与 B 的并事件),记作 $A \cup B$.

$A \cup B$ 是由属于 A 或属于 B 的所有样本点组成的集合.

类似地,“事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中至少有一个发生”这一事件称为 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的和事件,记为 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$,或 $\bigcup_{i=1}^n A_i$;“事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 中至少有一个发生”这一事件称为 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 的和事件,记为 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$,或 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

例 3 有两位战士同时向一个目标各射击一次. 设 A 表示“甲战士击中目标”, B 表示“乙战士击中目标”, C 表示“目标被击中”, 则 $C=A \cup B$, 即事件 C 发生意味着事件 A 或事件 B 至少有一个发生.

3. 事件的积(交)

“事件 A 和事件 B 同时发生”这一事件称为事件 A 与事件 B 的积事件(或者称为 A 与 B 的交事件), 记为 AB 或 $A \cap B$.

AB 是由既属于 A 且属于 B 的所有公共样本点组成的集合.

类似地, 可以定义 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的积 $A_1 A_2 \cdots A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i$, 以及 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 的积 $A_1 A_2 \cdots A_n \cdots = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

4. 事件的差

“事件 A 发生而事件 B 不发生”这一事件称为事件 A 与事件 B 的差事件, 记为 $A-B$.

$A-B$ 是由属于 A 但不属于 B 的样本点组成的集合.

5. 互不相容事件(互斥事件)

如果事件 A 与事件 B 不能同时发生, 即 $AB = \emptyset$, 则称事件 A 与事件 B 是互不相容事件(或称互斥事件). 互不相容事件 A 与 B 没有公共样本点.

若 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 满足 $A_i \cap A_j = \emptyset$ ($i \neq j$), 则称 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两互斥.

当事件 A 与事件 B 互斥时, A 与 B 的和事件 $A \cup B$ 可简记为 $A+B$, 并称为“直和”.

例 4 观察小花猪每胎的产崽数, 以 A_1 表示事件“每胎产崽数 ≤ 6 ”, 以 A_2 表示事件“每胎产崽数 ≥ 7 ”, 则 A_1 与 A_2 互斥.

6. 对立事件(互逆事件)

“事件 A 不发生”这一事件称为 A 的对立事件或称为 A 的逆事件, 记作 $\bar{A}$.

$\bar{A}$ 是由所有不属于 A 的样本点组成的集合. 显然有:

$$A\bar{A} = \emptyset, \overline{(\bar{A})} = A, A-B = A\bar{B}, A \cup \bar{A} = \Omega.$$

注意: 互不相容事件与对立事件是两个不同的概念. 若 B 是 A 的对立事件, 则有 $A \cup B = \Omega, AB = \emptyset$, 故 A 与 B 一定互不相容; 反之, 若 B 与 A 互不相容, 仅有 $AB = \emptyset$, 不一定有 $A \cup B = \Omega$ 成立, 所以 B 不一定是 A 的对立事件.

根据以上定义, 容易得到以下事件之间的运算律:

- (1) 交换律: $A \cup B = B \cup A, AB = BA$;
- (2) 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (AB)C = A(BC)$;
- (3) 分配律: $A(B \cup C) = (AB) \cup (AC), A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$;
- (4) 摩根律: $\overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}, \overline{A \cup B} = \bar{A} \bar{B}$.

例 5 向指定的目标连射三枪, 以 A_1, A_2, A_3 分别表示第一枪、第二枪、第三枪射中目标的事件, 试用 A_1, A_2, A_3 表示下列各事件:

- (1) 样本空间;
- (2) 仅第一枪射中;
- (3) 仅一枪射中;
- (4) 三枪都未射中;
- (5) 至少一枪射中.

解 (1) 样本空间: $\Omega = \{\overline{A_1} A_2 A_3, A_1 \overline{A_2} A_3, A_1 A_2 \overline{A_3}, \overline{A_1} \overline{A_2} A_3, \overline{A_1} A_2 \overline{A_3}, A_1 \overline{A_2} \overline{A_3}, A_1 A_2 A_3, \overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3}\};$

(2) 仅第一枪射中为 $\{A_1 \overline{A_2} \overline{A_3}\};$

(3) 仅一枪射中为 $\{A_1 \overline{A_2} \overline{A_3}, \overline{A_1} A_2 \overline{A_3}, \overline{A_1} \overline{A_2} A_3\};$

(4) 三枪都未射中为 $\{\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3}\};$

(5) 至少一枪射中为 $\Omega - \{\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3}\}$, 或 $\{A_1 \overline{A_2} \overline{A_3}, \overline{A_1} A_2 \overline{A_3}, \overline{A_1} \overline{A_2} A_3, A_1 A_2 A_3, A_1 \overline{A_2} A_3, \overline{A_1} A_2 A_3, A_1 A_2 \overline{A_3}\}.$

第二节 随机事件的概率

一、概率的定义及性质

1. 概率的统计定义

随机事件虽然有偶然性的一面,即在一次试验中可能发生也可能不发生,但在相同的条件下进行大量重复试验,人们还是可以发现它有内在统计规律性,即它出现的可能性大小可通过区间 $[0,1]$ 中的一个数值 p 来度量,这个数值 p 称为概率. 事件 $A, B, C, \dots$ 的概率分别记为 $P(A), P(B), P(C), \dots$.

(1) 频率. 我们以抛掷一枚均匀的硬币为例,观察出现正面 H 的可能性大小. 就一次试验而言,很难知道出现正面的可能性大小,然而当试验次数 n 逐渐增大时,就会发现出现正面 H 与出现反面 T 具有统计规律性,且当 n 逐渐增大时,出现正面 H 的次数 n_H 与试验次数 n 之比与常数 $\frac{1}{2}$ 逐渐接近,见表 1-1 记录.

从表 1-1 中可看出,当试验次数逐渐增大时,比值 $\frac{n_H}{n}$ 逐渐稳定于常数 $\frac{1}{2}$.

表 1-1

试验者	抛掷次数 n	出现正面 H 的次数 n_H	比值 n_H/n
德摩根	2 048	1 061	0.518
蒲丰	4 040	2 048	0.5069
皮尔逊	12 000	6 019	0.5016
皮尔逊	24 000	12 012	0.5005
维尼	30 000	14 994	0.4998

定义 2.1 一般地,若随机事件 A 在 n 次重复试验中出现 n_A 次,则称

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

为事件 A 在这 n 次重复试验中出现的频率.

(2) 概率的统计定义

定义 2.2 若随机试验次数 n 逐渐增加,事件 A 出现的频率 $f_n(A)$ 稳定于某个常数 p 时,则称常数 p 为事件 A 出现的概率,记作 $P(A)$.

由此定义可知,某常数 p 若是事件 A 的概率 $P(A)$,它反映了事件 A 出现的固有属性,而不是频率 $f_n(A)$. $P(A)$ 是理论值, $f_n(A)$ 是试验值.

2. 概率的公理化定义

概率的统计定义是以大量的试验为基础,从数学上看是不严密的,需要从理论上加以解决.这一理论是由前苏联数学家柯尔莫哥洛夫 1933 年提出的,他给概率下了一个公理化定义,使得概率论真正成为一门数学学科.

定义 2.3 (概率的公理化定义) 设 E 是一随机试验, Ω 是它的样本空间. 对于 E 的每一个事件 A ,存在一个实数 $P(A)$,如果满足下列三个条件:

$$(1) \quad 0 \leq P(A) \leq 1;$$

$$(2) \quad P(\Omega) = 1;$$

(3) 对于两两互斥的事件 A_k ($k=1,2,\dots$),有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + \dots \quad (\text{可数可加性}).$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

在概率的公理化定义的基础上,可推出概率的一些性质.

性质 1 $P(\emptyset) = 0$.

证 $\Omega = \Omega \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots,$

由条件(3)可知

$$P(\Omega) = P(\Omega) + P(\emptyset) + \dots + P(\emptyset) + \dots,$$

所以

$$P(\emptyset) = 0.$$

性质 2 (有限可加性) 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两互斥, 则

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

证 在条件(3)中,取 $A_i = \emptyset$ ($i=n+1, n+2, \dots$). 于是,由可数可加性及性质 1 推得

$$P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} P(\emptyset) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

性质 3 $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

证 由于 A 与 $\bar{A}$ 互斥,由性质 2 有

$$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}),$$

而 $A \cup \bar{A} = \Omega, P(\Omega) = 1$, 所以

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}).$$

性质 4 若 $B \subset A$, 则 $P(A-B) = P(A) - P(B)$.

证 因为 $B \subset A$, 所以有

$$A = B \cup (A-B),$$

且

$$B \cap (A-B) = \emptyset,$$

因此

$$P(A) = P(B \cup (A-B)) = P(B) + P(A-B),$$

即

$$P(A-B) = P(A) - P(B).$$

由上式及 $P(A-B) \geq 0$, 即可推得: 若 $B \subset A$, 则

$$P(A) \geq P(B).$$

性质 5 对任意两个事件 A, B , 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

证 因为 $A \cup B = A \cup (B-A) = A \cup (B-AB)$, 且

$$A \cap (B-AB) = \emptyset, B \supset AB,$$

所以

$$P(A \cup B) = P(A \cup (B-AB)) = P(A) + P(B-AB),$$

由性质 4, 得

$$P(B-AB) = P(B) - P(AB),$$

所以

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

类似地, 对于任意的三个随机事件 A, B, C , 有

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) \\ &\quad - P(AC) + P(ABC). \end{aligned}$$

二、古典概型

1. 古典概型的定义

定义 2.4 若一试验(概型)满足下列两个特征:

(1) 试验的样本空间中的基本事件的总个数是有限的, 即

$$\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\};$$

(2) 每个基本事件的出现是等可能的, 即

$$P(e_1) = P(e_2) = \dots = P(e_n).$$

则称此试验为等可能概型. 由于这一概型最早被人们研究, 故又称为古典概型.

2. 古典概率的计算公式

对于古典概型, 显然有 $P(e_i) = \frac{1}{n}$ ($i=1, 2, \dots, n$). 若 A 为古典概型中的某一事件, n 为样本空间基本事件的总数, n_A 为 A 中包含的基本事件的个数, 则有

$$P(A) = \frac{n_A}{n}. \quad (2.1)$$

此式称为古典概率公式.

例 1 某袋中装有 6 只球,其中有 4 只白球 2 只红球,从袋中每次取一球,接连取二次(每球被取到的可能性相同),观察球的颜色,试就放回抽样(第一次取一球观察颜色后放回袋中)与不放回抽样(第一次取一球观察颜色后不放回袋中)两种情况求:

- (1) 取到的球都是白球的概率;
- (2) 取到的球颜色相同的概率;
- (3) 取到的球至少有一只是白球的概率.

解 设 A_1, A_2 分别表示第一、第二次取得白球的事件.

放回抽样的情况:由于第一次取球有 6 种可能,第二次取球仍有 6 种可能,故样本空间所含基本事件的总个数为 $6 \times 6 = 36$.

(1) 设 A 表示取出的两球都是白球的事件,由于第一次取到白球有 4 种可能,第二次取到白球仍有 4 种可能,故 A 中包含的基本事件的总个数为 $4 \times 4 = 16$,故

$$P(A) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}.$$

(2) 设 C 表示取出的两球颜色相同的事件, B 表示取出的两球都是红色的事件,则 B 中所包含的基本事件个数是 $2 \times 2 = 4$. 事件 C 是 A 与 B 的和事件,而 A 与 B 互斥,显然 C 包含的基本事件的总个数为 $4 \times 4 + 2 \times 2 = 20$,故

$$P(C) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

或

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{4 \times 4}{36} + \frac{2 \times 2}{36} = \frac{5}{9}.$$

(3) 设 C_1 表示取出的两球中至少有一只是白球的事件,它的对立事件正好是 B (即两次取得的都是红球),即 $\overline{C_1} = B$,故

$$P(C_1) = 1 - P(\overline{C_1}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{2 \times 2}{36} = \frac{8}{9}.$$

不放回抽样的情况:由于第一次取球有 6 种可能,第二次取球只有 5 种可能,故样本空间包含的基本事件总个数为 $6 \times 5 = 30$. 事件的记号如上.

(1) 由于第一次取白球有 4 种可能,第二次仍取白球只有 3 种可能,因此 A 包含的基本事件数为 $4 \times 3 = 12$,故

$$P(A) = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}.$$

(2) 仿上分析得 B 包含的基本事件数为 $2 \times 1 = 2$,事件 C 包含的基本事件数为 $4 \times 3 + 2 \times 1 = 14$,故

$$P(C) = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}.$$

$$(3) P(C_1) = 1 - P(\overline{C_1}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{2}{30} = \frac{14}{15}.$$

例 2(质点分房问题) 将 n 个质点放入 n 间房子中去, 每间房子恰有一个质点的概率是多少?

解 此样本空间的基本事件的总个数为 n^n , 设 A 表示每间房子恰有一个质点的事件, 它包含基本事件的个数为 $n!$, 故

$$P(A) = \frac{n!}{n^n}.$$

三、几何概率

古典概率的计算局限于样本空间所含基本事件(样本点)的个数是有限的, 当试验的样本空间所含的基本事件是无穷个时, 概率该如何计算呢?

我们假定试验 E 中基本事件的发生仍类似于古典概型中的等可能性, 而将古典概型中的有限性推广到无限性, 就得到几何概型. 一般地, 具有下列特点的概率问题称为几何概型:

(1) 该概率问题可转化为一个可度量的几何图形 S , 试验 E 看成在 S 中随机地投掷的一点, 即 S 为样本空间. 而事件 A 就是所投掷的点落在 S 中的可度量图形 A 中.

(2) 事件 A 的概率与 A 的度量 $L(A)$ 成正比.

其概率 $P(A)$ 由下式计算:

$$P(A) = \frac{L(A)}{L(S)}, \quad (2.2)$$

式中: L 表示几何度量, 指长度、面积或体积等. 这样计算的概率, 称为几何概率.

例 3 一个质地均匀的陀螺的圆周上均匀地刻有 $[0, 4]$ 中的各数字, 旋转陀螺, 待它停下时, 试问圆周与桌面的触点落在区间 $[2.5, 3.5]$ 上的概率是多少?

解 因为 $S = [0, 4]$, $A = [2.5, 3.5]$, $L(S) = 4 - 0 = 4$, $L(A) = 3.5 - 2.5 = 1$, 故

$$P(A) = \frac{L(A)}{L(S)} = \frac{1}{4}.$$

例 4(会面问题) 甲乙二人相约在上午 7 点到 8 点之间于某地会面, 先到者等候另一人 20 分钟, 过时就离去, 试求两人能会面的概率.

解 设 x, y 分别表示甲乙二人到达会面地点的时刻, 则能会面的充要条件是

$$|x - y| \leq 20 \quad (0 \leq x \leq 60, 0 \leq y \leq 60),$$

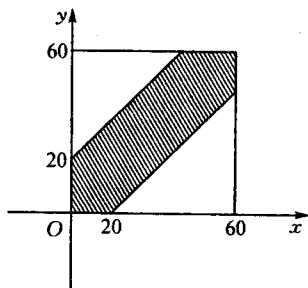


图 1-1