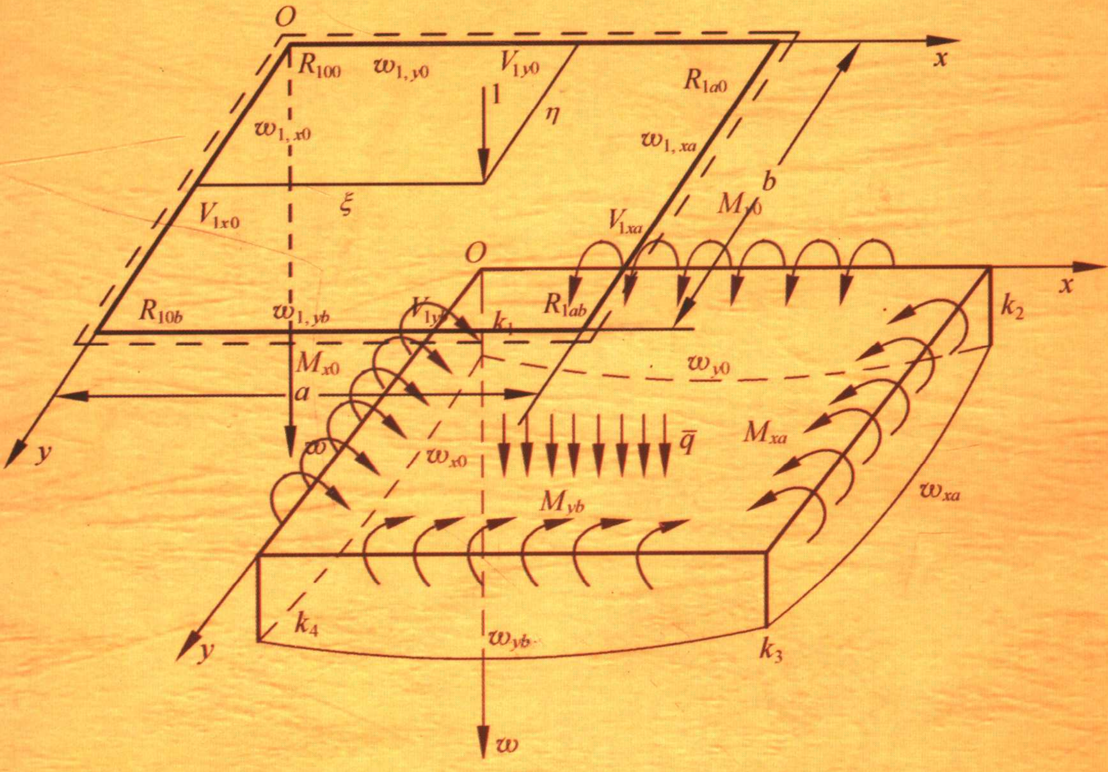
弯曲矩形板的广义位移理论

Generalized Displacement Theory of Bending of Rectangular Plates

付宝连 著



科学出版社
www.sciencep.com

燕山大学学术著作出版基金资助出版

弯曲矩形板的广义位移理论

付宝连　著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书系统地论述了弯曲矩形板平衡、振动和稳定问题的广义位移理论。根据这些广义位移理论，可以得到相应问题的广义位移解及其广义执行边界条件。这些广义位移解及其广义执行边界条件，涵盖了可能实际存在的边界条件和尽可能多的载荷工况。因此，应用它们，无需推导计算，就可以直接得到某一具体问题的位移解及其相应的执行边界条件；再根据该具体问题的执行边界条件编程计算，就可以得到该具体问题的数值结果。同时，应用这些广义位移解及其广义执行边界条件，给出了一系列复杂边界条件矩形板平衡、振动和稳定问题的解析解，并提供了相应的数据和图表，以供参考。

本书可供高等院校土木工程、力学、航空、汽车和机械类专业的师生以及相关领域的科技人员参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

弯曲矩形板的广义位移理论 / 付宝连著. —北京：科学出版社，2006
ISBN 7-03-016593-4

Ⅰ.弯…　Ⅱ.付…　Ⅲ.弯曲-矩形板-广义位移-研究　Ⅳ.TU33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 146085 号

责任编辑：童安齐　孙露露/责任校对：柏连海
责任印制：吕春珉/封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2006年1月第 一 版　　开本：B5(720×1000)
2006年1月第一次印刷　印张：24 1/4
印数：1—2 500　　　　字数：478 000

定价：58.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉)
销售部电话 010-62136131　编辑部电话 010-62137026(BA03)

前　言

作者撰写本书的目的是向读者介绍弯曲矩形板平衡、振动和稳定问题的广义位移理论，以及这些理论的应用。

本书共分为六章。

第一章介绍弯曲直梁的广义位移理论。具体介绍弯曲直梁变形的广义位移理论、受迫振动和自由振动的广义位移理论以及压杆稳定问题的广义位移理论。

第二章和第三章阐述弯曲薄板的基本理论及功的互等理论。其中着重论述修正的功的互等定理以及弯曲矩形板的功的互等理论。

第四章论述弯曲矩形板静力问题的广义位移理论。其中，首先定义了广义支承边矩形板的概念，并把受多种载荷作用的广义支承边矩形板视为实际系统，在该实际系统和基本系统之间应用修正的功的互等定理，从而得到该广义支承边矩形板实际系统的位移解，即广义位移解，同时，证明该广义位移解是真实解；其次，导出广义位移解的执行边界条件；最后，应用广义位移解及其广义执行边界条件于一系列问题的求解。

第五章论述弯曲矩形板受迫振动的广义位移理论。本章所论述的顺序以及每一个子序的命题与第四章的相应论述大抵相当，不再赘述。

第六章论述矩形板稳定问题的广义位移理论。

总之，第一章是导引；第二章和第三章是基础；第四章至第六章是重点，核心内容是“解的广义性”，相关的定义、命题、论证以及应用，都是围绕这一“广义性”展开的。同时，应用这些广义位移解于给出弯曲矩形板平衡、振动和稳定的一系列问题的相应解，从而证明了这些广义位移理论的应用是简单、通用和有效的。

本书在付梓之际，特别要感谢著名科学家钱伟长先生长时期地关心、指导和帮助；同时也要感谢中国科学院院士高镇同先生和工程院院士钟群鹏先生的关心和支持。本书的出版得到了燕山大学学术著作出版基金的资助以及作者诸多同事和好友的关心与鼓励，在此一并表示感谢。

本书是关于弯曲薄板理论的学术著作，其中包括大量的理论推导及数值计算，疏漏之处和不协调之处在所难免，敬请专家和广大读者不吝指正。

付宝连

2005 年 2 月 1 日

于秦皇岛

目　录

绪 论

本绪论分为弯曲薄板理论的建立、弯曲薄板的某些主要解法和弯曲矩形板的广义位移理论三部分。所涉及的内容只限于小挠度、各向同性的弹性板，而且不考虑板的切变形。每一部分的论述也只能是概括性的。

0.1 弯曲薄板理论的建立

弯曲薄板受迫振动的微分方程是由索菲·杰尔曼(Sophie German，1776～1831)提出的，经过拉格朗日(Lagrange J L，1736～1813)的修正，首次得到这一方程的正确表达式为

$$k\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)+\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \tag{0.1.1}$$

式(0.1.1)称为索菲·杰尔曼-拉格朗日方程。

方程(0.1.1)的求解，还必须伴以相应的边界条件和初始条件。泊松(Poisson S D，1781～1840)提出了简支边和固定边的正确边界条件。关于悬空边，他认为应有切力、扭矩和弯矩三个静力边界条件。

我们现在广泛采用的完善的弯曲薄板理论是由克希霍夫(Kirchhoff G R，1824～1887)于1850年完成的。在索菲·杰尔曼和泊松工作的基础上，克希霍夫做了以下两个假设：

1) 原垂直于板中面的直法线，在弯曲变形后仍为直线，且此直线仍然垂直于弯曲了的中面。这就是著名的克希霍夫直法线假设；

2) 在横向载荷作用下，薄板发生微小弯曲时，板中面的纵向位移很小，可忽略不计。

根据这两个假设，克希霍夫得到弯曲薄板应变能的正确表达式为

$$V=\frac{1}{2}D\iint_\Omega\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2-2(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{0.1.2}$$

板在横向载荷 q 作用下，利用虚功原理，克希霍夫得到弯曲薄板的虚功方程为

$$\frac{1}{2}D\delta\iint_\Omega\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2-2(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y =\iint_\Omega q\delta w\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{0.1.3}$$

对式(0.1.3)进行变分运算，得到了弯曲薄板的静力微分平衡方程为

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{q}{D} \tag{0.1.4}$$

以及相应的静力边界条件。根据这一变分运算，克希霍夫指出，悬空边的静力边界条件不是三个，而是弯矩和等效切力两个。这样，由于克希霍夫的这一杰出贡献，完善了弯曲薄板理论，并使其成为可解的。

开尔文(Kelvin，1824～1907)应用圣维南(St Venant，1797～1866)原理，在"论自然哲学"一书中给出等效切力以简单、清晰和巧妙的力学解释。

0.2 弯曲薄板的某些主要解法

1. 那维埃法

那维埃(Naveir C L，1785～1836)在1823年首次求解了均布载荷和板中点有一集中载荷作用的四边简支矩形板的弯曲，给出了以双重三角级数表示的正确解。可以认为，那维埃开创了弯曲薄板理论问题求解的先河。

2. 列维法

列维(Levy M，1838～1910)于1899年给出了一对边简支另一对边为任意支承弯曲矩形板的解析解。列维解收敛快，具有实用价值，但计算过程复杂，而且只适用于必须有一对边为简支的弯曲矩形板。

弗莱彻(Flecher H J)和索恩(Thone C J)于1955年发展了列维法，使之可用于求解任意边界条件矩形板的弯曲，但计算过程仍很复杂。

3. 利兹法

利兹(Ritz W)法是1908年提出的，是以最小势能原理为基础求解弹性力学问题的一种近似计算法。前提是，所假设的位移必须是容许的。以弯曲薄板为例，如假设容许挠度为

$$w(x,y)=\sum_{i=1}^{n}c_i f_i(x,y) \tag{0.2.1}$$

板的总势能 Π_p 对待定常数 c_i 诸项取变分极值，则得等价于平衡方程和静力边界条件的方程组为

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial c_i}=0 \qquad (i=1,2,3,\cdots,n) \tag{0.2.2}$$

解此方程组，可得该问题的解。对于较简单的边界条件问题，容许位移或许能够假设出来，计算也较简单，解也有一定的精度，利兹法有效。但是，对于复杂边界条件问题，容许位移难于假设，甚至往往假设不出来，这时利兹法失效，这便是利兹法的一大缺点。利用利兹法所得到的是不大于真实解的下限解。

4. 迦辽金法

迦辽金(Galerkin B G)法是于 1915 年提出的，这是一种以加权余量法为理论基础的近似计算法。它要求所假设的位移应预先满足位移边界和静力边界全部边界条件。如以弯曲薄板为例，挠曲面方程假设为

$$w(x,y)=\sum_{j=1}^{m}c_jf_j(x,y) \tag{0.2.3}$$

则有加权余量方程为

$$\iint_{\Omega}[D\,\nabla^4 w(x,y)-q(x,y)]f_j(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0 \tag{0.2.4}$$

式(0.2.4)可以解释为，若平衡方程成立，则内外力差在虚位移上所做的功为 0。在相关工作中，迦辽金给出了一系列弯曲薄板解的数据和图表，以供实用参考。迦辽金法要求位移满足全部边界条件，这比利兹法的要求还要苛刻。

5. 屈列弗茨法

屈列弗茨(Trefftz E)法是 1926 年提出的，该法是以最小余能原理为理论基础的一种近似计算法。它要求所求的应力分量应预先满足平衡方程和静力边界条件。对总余能取极值，便得到一个与应变-位移协调方程和位移边界条件等价的方程组，解此方程组，便可得问题的解。应力分量比位移分量多，假设容许应力还不如假设容许位移容易，因此，屈列弗茨法不如利兹法应用的方便和广泛。用屈列弗茨法所得到的是不小于真实解的上限解。

6. 叠加法

叠加法是铁木辛柯(Timoshenko S P)于 1938 年提出的。在文献[1]中，铁木辛柯应用叠加法系统地求解了一系列矩形板的弯曲问题，并给出了很多数据和图表，以供参考使用。

张福范发展了叠加法。他应用这一方法，成功地求解了像悬臂矩形板这样复杂边界条件矩形板的弯曲问题[2]。

叠加法的优点是可用于求解复杂边界条件矩形板的弯曲；缺点是，对于相应问题的每一叠加项都需求解一个边值问题，有多少叠加项，就需要逐一地求解多少项的边值问题，计算过程很是复杂。

7. 初参数法

初参数法是巴甫考维奇(Папкович П Ф)于 1941 年提出的。该法可用于求解复杂边界条件问题，也适用于多种载荷作用弯曲矩形板的求解。计算过程也很复杂。

8. 康托洛维奇法

康托洛维奇法是康托洛维奇(Конторович Л В)和克雷洛夫(Крылов В И)于1941年提出的基于最小势能原理的一种近似变分法。以弯曲薄板问题为例,该法是将两个变量的挠度函数分离成两个单变量的函数积,根据边界条件,假设一个方向的函数为已知,另一个方向的函数为未知。总势能对此未知函数取变分极值,从而得到与平衡方程和静力边界条件相对应的等价方程,解此等价方程,问题便得解。可以认为,该法是利兹法的推广,也可以认为是利兹法与分离变量法的结合。由于假设一个方向的位移函数相对比较容易,另一方向的未知函数可靠总势能取变分极值得到,因此,与利兹法比较,该法更程式化一些,也会较容易地求解复杂边界条件问题;但是,另一方面,又增加了一道求解常微分方程的过程。

9. 广义变分原理法

广义变分原理方法是舒德坚和施振东于1957年提出的。它是以广义势能原理为理论基础求解弯曲薄板问题的一种近似计算法。广义势能取驻值等价于弹性力学的全部方程,因此可以认为,该法实际上是利兹法和屈列弗茨法的结合。该法可用于求解复杂边界条件问题,但是在求解过程中,需要把全解分解为若干个解,然后逐一地求解每一个边值问题,计算过程比较复杂。

10. 功的互等法

功的互等法是作者于1981年提出的。它是以修正的功的互等定理为理论基础的,求解板壳力学和弹性力学问题的一个有效方法。功的互等法的求解过程为:确定所求问题的基本系统,并求出其基本解;在实际系统和基本系统之间应用修正的功的互等定理,从而得到实际系统的位移方程;根据该位移方程,导出实际系统的执行边界条件;解此边界条件方程,问题得解。

功的互等法的特点是:概念清晰、计算简单、通用和有效。概念清晰是指,计算伊始便给出挠曲面方程的通用表达式,在这表达式中,清晰地表明了实际系统的载荷项、边界力项和边界位移等诸项对挠度的贡献。计算简单的原因是,功的互等法不需要求解微分方程,载荷项对挠曲面方程的贡献表现为载荷与基本解相乘的简单积分;边界力的贡献表现为边界力与基本解边界位移乘积的简单积分;边界位移的贡献表现为边界位移与基本解边界力乘积的简单积分。这些积分运算都极其简单;相反地,如果要求解与这些载荷项、边界力项和边界位移诸项相对应的微分方程,那求解过程要复杂得多。通用是指,该法便于求解各种载荷的作用,特别是便于复杂边界条件问题的求解。通用的另一层涵义是指该法可用于求解杆、板、壳的平衡、振动和稳定等一系列问题。功的互等法还是本书所提出的弯曲矩形板广义位移理论的计算基础,由此也可以进一步地说明该法的通用性这一特点。有效是指,功

的互等法实际上是位移法和力法的混合法，用利兹法得到的是下限解，用屈列弗茨法得到的是上限解，而用功的互等法得到的解是位于下限和上限的中间解；有效的另一层涵义是，用该法得到的是相当精确的封闭解析解。

0.3 弯曲矩形板的广义位移理论

下面以平衡问题为例来说明弯曲矩形板的广义位移理论。

弯曲矩形板平衡问题的广义位移理论包括广义支承边矩形板和广义支承边矩形板实际系统的两个定义；还包括修正的功的互等定理、位移叠加等价性原理和广义位移解真实性的证明三个原理。现分述如下。

定义弯矩和挠度都为已知的直边为广义支承边；定义四直边均为广义支承边的矩形板为广义支承边矩形板。很明显，广义支承边矩形板可以蜕化成各直边为简支、固定、悬空（包括角点悬空）和弹性支承的任意组合的矩形板。

定义在多种载荷作用下的广义支承边矩形板为广义支承边矩形板实际系统，多种载荷已包括分布载荷、分布力矩、集中载荷和集中力矩，还可以包括实际作用的其他情况的载荷。

这样，广义支承边矩形板实际系统几乎涵盖了所有可能作用的载荷和四直边为各种支承任意组合的矩形板。因此，每一个具体工作载荷和具体边界条件的矩形板都可以由该广义支承边矩形板实际系统蜕化而得。

弯曲矩形板修正的功的互等定理指出：对于形状、尺寸和材料都相同而且都处于真实状态的线弹性小挠度弯曲矩形板，不管它们的表面力、边界力和边界位移是否相同，均有第一薄板系统的外力在第二薄板系统相应位移上所做的功，等于第二薄板系统的外力在第一薄板系统相应位移上所做的功。

根据这一修正命题，可以在一单位横向集中载荷作用的四边简支矩形板这一基本系统（如图 0.3.1 所示）和广义支承边矩形板实际系统（如图 0.3.2 所示）之间应用修正的功的互等定理，从而得到实际系统的挠曲面方程为

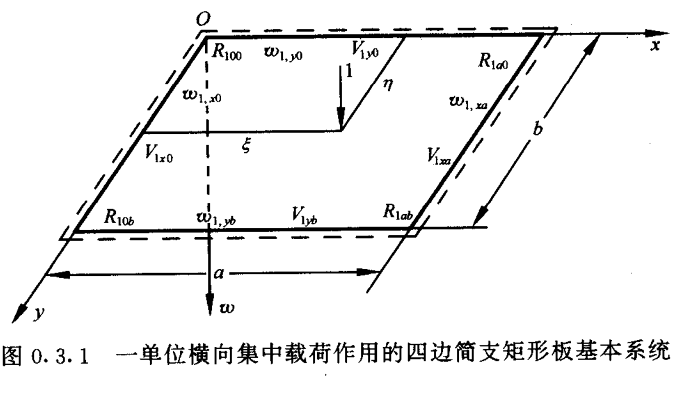


图 0.3.1　一单位横向集中载荷作用的四边简支矩形板基本系统

$$w(\xi,\eta)=\int_0^a\int_0^b\bar{q}\ \bar{w}_1\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_0^b(V_{1x}w_x)_0^a\mathrm{d}y-\int_0^a(V_{1y}w_y)_0^b\mathrm{d}x$$
$$-\int_0^b(M_xw_{1,x})_0^a\mathrm{d}y-\int_0^a(M_yw_{1,y})_0^b\mathrm{d}x+[(R_1k)_0^a]_0^b \qquad (0.3.1)$$

式(0.3.1)称为广义支承边矩形板实际系统的广义位移解。

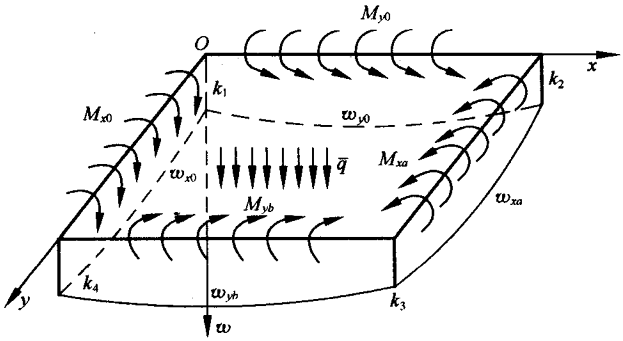


图 0.3.2　广义支承边矩形板实际系统

位移叠加等价性原理说明了式(0.3.1)右端实际系统的载荷项、边界力项和边界位移项对广义位移解的叠加贡献。

广义位移解真实性定理证明了广义位移解式(0.3.1)满足弯曲薄板微分平衡方程、静力边界条件和位移边界条件。

功的互等定理的贝蒂命题限定两组力必须作用于同一弹性体，根据这一命题，是不可以在上述四边简支矩形板基本系统和广义支承边矩形板实际系统之间应用功的互等定理的。

这样，根据修正的功的互等定理，可在一单位横向集中载荷作用下的四边简支矩形板基本系统和广义支承边矩形板实际系统之间应用功的互等定理，得到了实际系统的广义位移解，并说明了这一广义位移解表达式与位移叠加原理等价，同时证明了广义位移解是真实解，从而完成了弯曲矩形板平衡问题广义位移理论的概括性论述。

弯曲矩形板振动问题和稳定问题的广义位移理论的论述，与上述论述基本相同，不再赘述。

第一章　弯曲直梁的广义位移理论

本章将给出弯曲直梁静力弯曲变形、受迫振动动力响应和稳定问题临界状态的广义位移解。为此，将首先引入广义支承端直梁的概念，并把受多种载荷作用下的广义支承端直梁作为实际系统。在弯曲变形、受迫振动和稳定问题的实际系统与它们相应的基本系统之间分别应用修正的功的互等定理，从而得到相应的实际系统的广义位移解，并证明这些位移解是真实解。最后，给出这些广义位移解的应用。这些广义位移解的引入，对于解决相应的各种边界条件问题都是简单、通用和有效的。

1.1　弯曲直梁变形的广义位移解

1.1.1　直梁的基本公式及广义支承端直梁

本节将介绍小挠度细长直梁在弹性范围内的基本公式。受力直梁如图 1.1.1(a)所示，微段受力如图 1.1.1(b)所示。

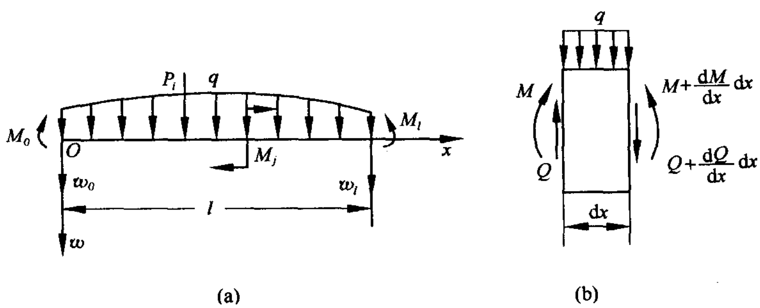


图 1.1.1　弯曲直梁

据图 1.1.1(b)，由平衡条件，可得梁的内力关系为

$$\frac{dQ}{dx}=-q \tag{1.1.1}$$

$$\frac{dM}{dx}=Q \tag{1.1.2}$$

$$\frac{d^2M}{dx^2}=-q \tag{1.1.3}$$

弯曲直梁的微段变形如图 1.1.2 所示。

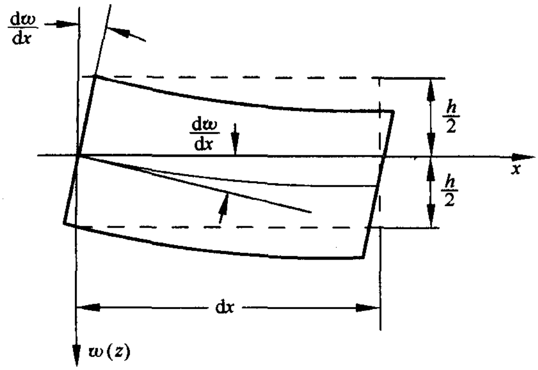


图 1.1.2　直梁微段变形

根据伯努利平面假设及单向受力假设，则有

$$u = -z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} \tag{1.1.4}$$

$$e = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -z\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2} \tag{1.1.5}$$

$$\sigma = -Ez\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2} \tag{1.1.6}$$

根据轴向力平衡条件，可以确定梁的中性轴通过横截面中心；对于矩形横截面梁，由正应力所构成的内弯矩可表达为

$$M = b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma z\mathrm{d}z = b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} - Ez^2\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}z = -EJ\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2} \tag{1.1.7}$$

由式(1.1.2)和(1.1.3)可得

$$Q = -EJ\frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3} \tag{1.1.8}$$

$$EJ\frac{\mathrm{d}^4w}{\mathrm{d}x^4} = q \tag{1.1.9}$$

式(1.1.9)是弯曲直梁在分布载荷作用下的微分平衡方程。

有了微分方程式(1.1.9)，再利用边界条件，给出的问题便成为可解的了。通常的边界条件为简支端、固定端和自由端。

顺便说一下，传统上称之为“自由端”的边界条件并不一定自由，它有可能受集中力和集中力矩的作用，因此，它宜称为“悬空端”。但为习惯起见，仍沿用自由端的命名。

本节将引入广义支承端的概念。所谓广义支承端，系指挠度和弯矩都为已知的支承端。两端都为广义支承端的直梁为广义支承端直梁。图 1.1.1(a)即为一广义支承端直梁。当广义支承端的挠度和弯矩都为 0 时，它就蜕化为简支端；而当挠度

为 0，弯矩不为 0 时，它可能成为固定端；而当挠度不为 0，弯矩也不为 0 时，它可能成为受力的自由端。同时，广义支承端也可能成为挠度和转动都为弹性的弹性支承端。广义支承端和广义支承端直梁的引入，是建立直梁广义位移解的基础。

1.1.2 δ 函数及其各阶导数

为了导出有一集中力 P_0 和一集中力矩 M_1 作用的直梁的挠曲轴微分方程，以及为了证明弯曲直梁广义位移解的存在，本小节将介绍 δ 函数及其各阶导数的相关理论。

考虑一阶梯函数 $H(x-x_0)$，其表达式为

$$H(x-x_0)=\begin{cases}1 & (x>x_0)\\ \dfrac{1}{2} & (x=x_0)\\ 0 & (x<x_0)\end{cases} \tag{1.1.10}$$

与式(1.1.10)相对应的图形如图 1.1.3 所示。

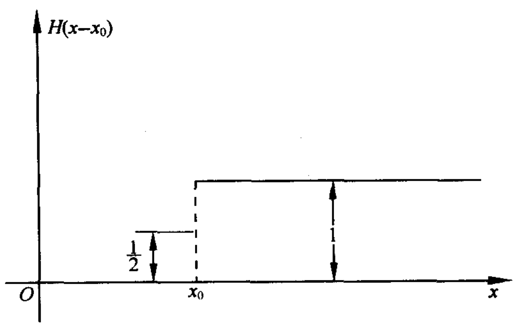


图 1.1.3 阶梯函数 $H(x-x_0)$

再考虑一函数 $\delta_h(x-x_0)$，其表达式为

$$\delta_h(x-x_0)=\begin{cases}\dfrac{1}{2h} & (x_0-h<x<x_0+h)\\ \dfrac{1}{4h} & (x=x_0-h \quad 或 \quad x_0+h)\\ 0 & (x>x_0+h \quad 或 \quad x<x_0-h)\end{cases} \tag{1.1.11}$$

与式(1.1.11)相应的图形如图 1.1.4 所示。

当 $h\to 0$，定义一新的函数 $\delta(x-x_0)$，且其表达式为

$$\delta(x-x_0)=\lim_{h\to 0}\delta_h(x-x_0) \tag{1.1.12}$$

根据式(1.1.11)，显然有

$$\delta(x-x_0)=\begin{cases}0 & (x\neq x_0)\\ \infty & (x=x_0)\end{cases} \tag{1.1.13}$$

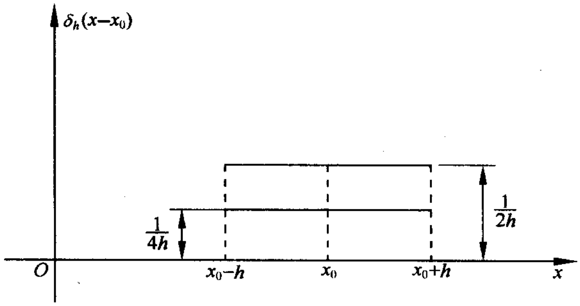


图 1.1.4　$\delta_h(x-x_0)$函数

由图 1.1.4 可以看出，$\delta_h(x-x_0)$与 x 轴间所围成的面积为 $2h\cdot\dfrac{1}{2h}=1$，与 h 无关，所以，对于任意满足 $a<x_0<b$ 的 a 和 b，均有

$$\int_a^b \delta(x-x_0)\mathrm{d}x = 1 \tag{1.1.14}$$

式中，$\delta(x-x_0)$定义为作用于 x_0 处的 delta 函数或脉冲函数。

应该看到，阶梯函数 $H(x-x_0)$在 x_0 点处既不连续也不可微，它不具有经典意义下的求导可能，但是可以利用差商取极限的方法来处理阶梯函数 $H(x-x_0)$的相关问题。如果称阶梯函数为广义函数，那么这广义函数差商取极限的问题便可称之为广义导数。

1. δ 函数的若干性质

(1) δ 函数是阶梯函数的广义导数，即

$$\delta(x-x_0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H(x-x_0) \tag{1.1.15}$$

式(1.1.15)在 $x\neq x_0$ 时显然成立，因为在等式两端都为 0。在 $x=x_0$ 处，经典意义上的导数并不存在。形式上的广义导数可以定义为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H(x-x_0)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta H(x-x_0)}{\Delta x}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\{H[x-(x_0-h)]-H[x-(x_0+h)]\}\end{aligned} \tag{1.1.16}$$

式(1.1.16)中的 $H[x-(x_0-h)]$和 $H[x-(x_0+h)]$示于图 1.1.5 中。

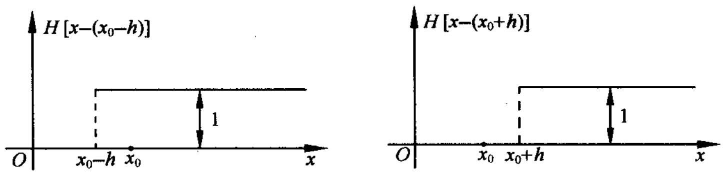


图 1.1.5　$H[x-(x_0-h)]$和 $H[x-(x_0+h)]$函数