新筛法导论

相振泉 著

P、P+2

$2M=p+q$

$X^n+Y^n=Z^n$

陕西人民出版社

新筛法导论

相振泉　著

王　龙　任彩芹　相　新　参　著

陕西人民出版社

图书在版编目（CIP）数据

新筛法导论/相振泉著．—西安：陕西人民出版社，2006

ISBN 7-224-07584-1

Ⅰ．新...　Ⅱ．相...　Ⅲ．筛法—研究　Ⅳ．0156

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 020392 号

新筛法导论

作　　者：相振泉

出版发行：陕西人民出版社（西安北大街 147 号　邮编：710003）

印　　刷：陕西新胜印务有限公司

开　　本：850mm×1168mm　32 开　10 印张　1 插页

字　　数：220 千字

版　　次：2006 年 6 月第 1 版　2006 年 6 月第 1 次印刷

印　　数：1－1000

书　　号：ISBN 7－224－07584－1/0·18

定　　价：28.00 元

作者简介

相振泉，又名相振全，陕西西安人，现年45岁，研究生学历。自幼对数学有浓厚兴趣，高中时即开始自行研究高希尧教授的《世界数学历史名题一百例》。后从事教育教学工作，于工作和进修之余，潜心数学理论研究27年而不辍，尤其热衷于中国古代数学名著《九章算术》的探讨和研究，多方吸收李继闵教授《〈九章算术〉与刘徽研究》等古今中外数学论著之精华，形成了自己独特的数学理论。曾在《中学数学教学参考》杂志发表数学研究论文《定量估算达到定性结果》，开辟了数学研究的新领域。

前　言

筛法一词起源于公元前250年左右。希腊数学家埃拉托斯散(Eralasthenes)因提出对一正整数 N 如果不能被 $\leqslant\sqrt{N}$ 的任一正数所整除,那么,该数 N 必是素数(质数)的筛选质数(素数)的方法而得名。后来,在20世纪初期,挪威数学家布伦(V·Bnen)改进方法,引入大偶数($>e^{e^{49}}$)和殆素数的方法使之用于哥德巴赫猜想的研究上,使殆素数和成为 $9+9$。后来,这一方法被不少国家数学家改进并得出好的结果。中国数学家王元1956年得出 $3+4$;又在1957年得出 $3+3$ 和 $2+3$;数学家潘承洞1962年得出 $1+5$;1962年王元得出 $1+4$;1973年陈景润又得出 $1+2$,成为这大偶数殆素筛法最优秀的成果。同时德国的雷特马赫,英国的埃司特曼,意大利的蕾西,前苏联的夕太勃,匈牙利的瑞尼,前苏联的巴尔巴恩,前苏联的(小)维诺格拉朵夫,意大利的波皮里都在此方面有重大成就。沿着这一路径走的数学家们都有自己独到之处。在几乎同一时期的1934年,东印度的学生辛答拉姆又开辟了一个路径,他的方法和埃拉托斯散筛法没有一点联系。但是,有自己独到的见解(在本书第四章详述)。然而,他的这种筛法有很大的局限性,无法在代数学上长足发展,因而被人们淡忘。

笔者认为:一个有价值的理论是有它深厚的科学基础和广博的历史渊源的。《新筛法导论》一书通过对中国古代数学史和世界数学史的研究而得出了一些新的结论。尤其是对中国古

代数学史书《九章算术》中的分数理论和西方古代数学理论加以综合并和古老的筛法及辛答拉姆筛法相结合，使筛法和有理分数结下姻缘，成为一部完整系统的新筛法理论专著。如李继闵教授专著《〈九章算术〉及刘徽注研究》第 62 页《分数的算法与理论》一节中有：“古埃及人的分数算法是化为单分数(*tinit fraction*)进行的。而巴比伦人则是采用六十进位分数。由于西方古代分数表示和计算方法繁杂，致使欧洲分数理论长期停滞不前……我国古代数学在分数方面有着悠久的历史和卓越的贡献。《九章算术》是世界上系统地叙述分数算法的最早著作，远在欧洲之前大约一千五百年便建立了成熟的分数理论。”所以，本书是以《九章算术》的分数理论为基础进行研究的。

《九章算术》中的分数是从除法引入的。其“合分术”有云：“实如法而一。不满法者，以法命之。”这里“命之”即是命之为“分数”。可以译为：“被除数除以除数，如果不能整除，就定义了一个分数。”在《说文解字》中有“实，富也。以宀从贯；贯，货，贝也”是说“实”是钱财货物之总称，即泛指一切实物。而“法”的涵义起源于西周至秦汉的度量单位。由此可见：“法”在《九章算术》中是一个度量单位。在《九章算术》中，还规定了“以法为母，实余为子”。因而，在《新筛法导论》这部专著中笔者之意是取其：筛者选也，法者“分母”也，是选出分母中有价值的那些数。并不仅仅是为了和古代数学史中，埃及的埃拉托斯散的筛法或后来改进的多种多样的筛法区别，新的筛法理论最初是由分数理论的建立而建立起来的，而且，都是以发展《九章算术》中的分数理论为中心，而一步一步走出来的。使古老的中国分数的概念的两重性(一个数(分数)；一对数“法与实”的比率)动态地表现出来。实际上中国传统的筹算法：分数总被还原为一

对整数“法与实”进行分别运算，从而使在筹算法下进行“法实相推”的动态推演。因而，在形成的筛法理论中是以：还原“法与实”为目标；以“法实”相推理论为中心，进行继承和发展的，从而形成了一种新的，“法实相推”新的分数理论。在还原“法与实”的同时寻求到了一个万变而可以应之的一个很有规律的“实”。这一“实”就是数学史中不起眼的n!。然而，人类自今对n! 的认识确实是不够的。在本书中笔者专门有第二章n! 基本性质。本书中比较全面地研究了n! 的整数规律及众多的不等式与等式。从而以这个“实”为中心进行研究，并把分数对象放在和n! 有关的开区间中，巧妙地将“实”与“法”放在特定的区间中，将“法实相推”的动态分数灵活运用。如在整数$(n,2n)$，$(n,n+\sqrt{n})$，$(n,n+\frac{n}{2})$，$(\frac{3n}{3},2n)$ $([\frac{n}{2}],n)$……开区间中使数学归纳法得到发展从而形成了n! 筛法论为中心的整数筛素数理论体系。这一n! 筛法论是第三个层次，是本书重点的核心理论，也是笔者几十年心血的结晶。

本书共分十三章，从专题内容上讲，远远地超出目前各种数论书的深度，对具有很高价值的数学问题进行研究得出结论。如相差为2的素数分布的规律及其无限性的证明；费马大定理的初等证明；哥德巴赫猜想的证明；以及著名的(n^2,n^2+n)区间中有素数的证明；$(n^2,(n+1)^2)$区间有素数的证明；$(x,x+\sqrt{x})$中有素数的证明；$(x,\frac{3x}{2})$中有素数的证明；$(\frac{3x}{2},2x)$中有素数的证明；$(x,2x)$在x是特定条件下有$\geqslant\sqrt{2x}$个素数的证明；$(x,2x)$在特定条件下有两对孪生素数的证明；$(x,\frac{3x}{2})$及$(\frac{3x}{2},2x)$在特

定条件下，各有一对孪生素数的证明；以及$(\frac{x}{2},x)$中在特定条件下，有两对孪生素数的证明；(n!,n!+2n)n，为自然数时必有一个素数的证明等等，共涉及重大的数学、数论难题及重要定理170多个。从数学方法上讲运用数学归纳法的演绎法，及高斯函数的运用，使实数和有理数及整数有机地结合在一起。从而，从宏观的角度站在实数的平台观望素数的规律，让素数在它的实数区间中有规律地让人们观望，让它自身的规律展示出来。从思维的方法上讲，是从古代数学史中的分数入手，“法实相推”和“母子”为一的分合统一的分数理论，以全新的思维，全新的理念，而形成新的分数理论体系。从章节的联系上讲是前一章节的内容为后一章或后几章的内容做好向导，后面的证明必定要引用前面章节的定理，后面的问题必定在前面的内容下引出，从而使本书的内容在衔接上有前后呼应、互相关照的关系。全书在新筛法的结构上有三个层次：一、用实数关系筛分数法；二、用分数关系筛整数法；三、用整数关系筛素数法。这样让实数的稠密性在新的筛法体系中得以体现；使新筛法的体系层次化：实数关系→分数关系→整数关系(素数)，即实数筛法→分数筛法→整数筛法。这三个层次成为新筛法的三个建模层次，成为科学的新筛法体系。在理论的继承上以古典筛法为基础，以辛答拉姆筛法为借鉴，以古典的分数理论为根本，以现代逻辑学和数学归纳法为依据，从而使新筛法成为一个完整的科学的理论体系。

本书在每一章节后都有一定量的习题可以引导读者深入地钻研。从研究的深度上讲，本书以深入浅出的数学过程而让一般学过初等数论的读者可以读懂。从专业性质和成果上讲，完

全适合专业的同行们的口味，完全可以作为研究生以上的基础理论学科的教材。

相振泉

2005年8月于西安

目　录

引 论

数学归纳法应用中，其坚实的逻辑基础

在数学研究中数学界一直对数学归纳法的逻辑基础认识分歧不定，然而究其因，必得其果。

唯物主义是贯穿于科学的整个过程，自然辩证法是我们研究科学的指南，唯物主义和辩证法的结合是科学的唯物辨证法。恩格斯在《自然辩证法》第189页中有："世界上的任何归纳法都永远不会帮助我们把归纳过程弄清楚。只有这个过程的分析才能作到这一点。——归纳和演绎过程正如分析和综合一样是必然相互联系着的。我们不应当在两者之中牺牲一个而把一个高高地抬上天去，我们应当力求在其适当的地位来应用它们中间的任何一个，而要做到这一点就只有注意它们的相互联系，它们的相互补充。"这正是说，数学归纳法也不例外。在数学归纳法中应是归纳和演绎两种方法的结合体，是两种推理的有机结合而对立的统一体。

数学归纳法可追溯到1575年莫罗利科在其著作《算术》一书中，有这样的"递推"思想。后来在1645年帕斯卡的著作《论算术三角形》中得以应用。但在可靠性的逻辑基础上直到1889年意大利数学家皮亚诺发表的《算术原理新方法》中建立了公理化体系。即：

1. 在自然数中有这样一个数；没有任何自然数紧靠在它的前面。这个数我们用1来表示；

2. 对于任何一个自然数,有而且只有一个自然数紧跟在它的后面;

3. 任何一个自然数有不多一个紧靠在它前面的数;

4. (归纳公理)任何一个自然数集合 S,若:①1 属于 S;②如果某个自然数属于 S,那么,紧在它后面的自然数也属于 S;

那么 S 和整个自然数集合重合。

在这公理系统出现之后,数学归纳法才有了逻辑基础。然而,数学归纳法的可靠信度一直还在人们的心目中摇摆不定。因为,有人认为数学归纳法是一种归纳法而不承认演绎推理在其过程中的存在性;还有人认为数学归纳法不是归纳法,否认数学归纳法中的归纳推理的存在性;还有人认为数学归纳法是一种演绎法,否认归纳在数学归纳法中的存在性。这样一来至今大大地动摇了数学归纳法的可靠信度(参看罗增儒《关于数学归纳法的逻辑基础》,《中学数学教学参考》2004 年第 8 期,第 17——18 页)我认为在本文开头所引用的恩格斯的《自然辩证法》第 189 页的引言已经强有力地在理论上给予上面三种看法中的任何一种都是否定。因为,恩格斯指出"任何一种归纳法都不能把归纳过程弄清楚",那么数学归纳法也不例外。而且进一步指出:只有"分析"过程才能作到弄清楚。又更进一步指出:"归纳和演绎应在适当的地位才能做到相互补充",才能弄清这种归纳过程的本质。正是这样上面三种情况都有其片面性。我认为应具体情况具体分析,得出数学归纳法的本质过程。

数学归纳法中有归纳成分和演绎成分;相互存在相互补充的是两者有机结合的数学归纳法体系。

赵龙山在《数学通报》1992 年 9 月刊的《关于数学归纳法教学中的逻辑问题》认为:"数学归纳法的逻辑基础就是自然数的

最小数原理”。“按现代逻辑的观点将前提与结论之间有必然性联系的推理称为演绎推理。这样数学归纳法就当然是一种演绎法,但是我们还应看到数学归纳法中的一系列演绎推理实质上有无穷多个要断定 $P(n)$ 对所有自然数都成立也应该有无穷多个结论。要以有限的步骤去概括无穷多个结论,那这里就有归纳的意识和成分。因此,我们可以说,数学归纳法中有演绎推理而演绎推理又是为了归纳。”“数学归纳法与归纳法和完全归纳法是完全不同的论证方法”。

这样从理论上再次对数学归纳法中的归纳和演绎的客观存在性的肯定。

再从最小数原理和皮亚诺自然数公理的结合再对数学归纳法的逻辑基础进行论证。

自然数的最小数原理:任何自然数的非空集合,必有一个最小的自然数。

由最小数原理证明归纳公理即数学归纳法。

设 M 是数学归纳法中所说的条件的集合,取补集 S,它由所有不属于 M 的自然数构成;如果 M 不和整个自然数重合;那么,S 是非空集。由最小数原理:在 S 中有最小数 t,因为 $1\in M$ 故知 $t\neq 1$,根据上面所证明的 t 紧跟在某个自然数 n 的后面。因为 t 是 S 中最小数,所以,$n\notin S$,于是,$n\in M$,而紧跟在它后面的自然数 $t\notin M$ 这和集合 M 的定义相矛盾。这一矛盾表明,S 是空集,于是 M 和整个自然数集合重合。故 M 是满足一切自然数成立的集合。故数学归纳法原理成立。即①如果 $P(1)$ 成立②$P(n)$ 成立可以推出 $P(n+1)$ 成立。那么 $P(n)$ 对所有的自然数都成立。(Ⅰ)

不难证出:对于当不小于某一整数 n_0 的任意整数 n 的命

题。如果满足:条件①$n=n_0$ 时命题成立;②假设当 $n=k(k\geq n_0)$时命题成立。则当 $n=k+1$ 时命题也成立。那么这个命题对一切不小于 n_0 的整数成立。(Ⅱ)

不难证出:对于关于自然数 n 的数学命题如果满足:①$n=1,2,3\cdots l$ 时命题成立;②假设当 $n=k(k\geq l)$时命题成立,若当 $n=k+1$ 时命题也成立。那么,命题对一切自然数 n 成立(Ⅲ)。

下证:对于关于自然数命题,如果满足:

①当 $n=1$ 时命题成立;②假设 $n<k(k\geq 1)$时,命题成立,则 $n=k$ 时命题成立,那么这一命题对一切自然数 n 均成立的命题(Ⅳ)。

证明:若命题不是对一切自然数成立,设使命题不成立的自然数集合为 M,M 不是空集。由最小数原理,M 有最小数,设为 r,因为 $r\in M$,所以 $r\neq 1$,又 r 是 M 的最小数,故对小于 r 的数命题成立,但又由归纳公理知 r 也成立,即又有 $r\notin M$,这样是矛盾的。由此可见,$r\notin M$,即 M 是空集。因此,命题对一切自然数成立。证毕。

由上面(Ⅱ)(ⅠⅢⅣ)对于有关于自然数 n 的数学命题如(Ⅱ)满足①$n=n_0$ 时命题成立;②假设 $n=k(k\geq n_0)$时命题也成立,那么,对 $n=k+1$ 时命题也是成立的。这个命题对于一切不小于 n_0 的整数成立。这一命题的坚实的理论基础是自然数的最小数原理和皮亚诺自然数公理系统。(其中ⅠⅡⅢ也是相同的逻辑基础)而且,在这一命题中①$n=n_0$ 是归纳基础。②假设 $n=k$ 命题成立是归纳假设。由 $n=k$ 到 $n=k+1$ 命题成立。这一步是数学归纳法的中心,它是一系列推理构成的重要的一步,这一步能否成功也就是是否能由“无穷多个结论”通过这一步的概括。根据现代逻辑的观点,结论和前提是必然性联系的

推理称演绎推理。这一步其实质也就是演绎推理的过程。即在归纳假设条件下而进行的以归纳假设为条件的演绎推理。当然在这一步中不可回避地包含了:直言判断直接推理;直言判断间接推理;关系判断推理;联言推理;选言推理;假言推理;二难推理,三难推理……使用的方法有:同一法;反证法;一切间接证法在内的各种演绎推理方法。正是这样,我认为数学归纳法是聚枚举归推理在内的各种演绎推理的逻辑体系。

再看一个例证,如本书第一章第二节中:用数学归纳法证明:当 $n>1$ 时:

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$是有理分数(不是整数)

证明:①当 $n=2, S_2=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$;

当 $n=3, S_3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}$;

当 $n=4, S_4=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{25}{12}$;

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

②假设当 $2\leqslant n\leqslant k$ 时的一切和都是分数

即 $S_2, S_3, \cdots, S_n$ 全为分数。那么,引进参数:β

且 $M=S_{k-1}+\beta$(M 为整数,β 为正实数)由第一章第二节定理 4 有:开区间$(M, M+1+\frac{1}{k+1})$中仅有一个整数。(因 $M<x+1+\frac{1}{k+1}$)$(M\in N)$,$1<M+1+\frac{1}{k+1}-M=1+\frac{1}{K+1}<2$)令这个整数为 $x=M+1$,由于 $S_2, S_3, \cdots, S_{k-1}, S_K$ 均为有理数中的非整数(分数且均为正值),那么假设 $S_K=\frac{q}{p}(q>p>0)$　$k>1$ 且

$p、q \in N \quad (p、q)=1$，令 $S_{k+1}=M=S_{k-1}+\beta$ 那么，有 $M=S_{k-1}+\beta$ $=S_{k-1}+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}$ 有 $\beta=\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}$。

那么，$M=\frac{q}{p}+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}=\frac{q(k^2+k)+p(2k+1)}{p(k^2+k)}$，

$M=\frac{q(k^2+k)+p(2k+1)}{p(k^2+k)}$，

$Mp(k^2+k)=q(k^2+k)+p(2k+1)$，

$(Mp-q)(k^2+k)=q(2k+1)$，$\frac{k^2+k}{2k+1}=\frac{p}{Mp-q}$

而 $(k^2+k,2k+1)=1$，

$(Mp-q,p)=1$，由第一章第一节定理 1 有 $\begin{cases}k^2+k=p\\2k+1=Mp-q\end{cases}$

由 $\begin{cases}2(k+1)k=2p\\2(k+1)=Mp-q+1\end{cases}$

两式之比有 $k=\frac{2p}{Mp-q+1}$，有 $kMp-kq+k=2p$，

有 $kM-\frac{k(q-1)}{p}=2$，令 $\frac{k(q-1)}{p}=T$，（T 为整数）$k(q-1)$ $=pT$，

结合 $p=k(k+1)$，上两式相乘有：$q-1=T(k+1)$，代入：

$kM-\frac{k(q-1)}{p}=2$ 中有 $kM-T=2$，将 $q-1=T(k+1)$ 代入 $2k+1=Mp-(q-1)-1$ 中有 $2k+1=Mp-T(k+1)-1$。又将 $kM=T+2$ 代入有：$pkM+pT=2p$，

由于 $k\geqslant2$ 有 $T\geqslant1$ $p\geqslant2$，故有 $kM+T=2$

即有 $k=1$，$M=1$，$T=1$

即得 $k=1$ 和 $k\geqslant2$ 矛盾。故 S_{k+1} 不可能为整数 M，在此条

件下 S_{k+1} 也是分数。

又由第一章第二节定理 1 知 $(S_{k-1}+\beta, S_{k-1}+\beta+1+\frac{1}{k+1})$ 中仅有一个整数: $x=S_{k-1}+\beta+1=M+1$。这样:由此令 $S_{k-1}=M+1$ 由: $S_{k-1}+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}=\beta+1+S_{k-1}$,有 $\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}=\beta+1>1$

即 $\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}>1$ 和 $k\geqslant 2$ 矛盾。因而,在此条件下:

$S_{k-1}\neq M+1$ 因而,由数学归纳法 i, ii 知当 $n\geqslant 2$ 时的一切自然数均有 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}$ 值为分数。

从而命题得证。

当此时,如果不用演绎推理,或不承认演绎推理中的间接推理(反证法),在这里的数学归纳法的作用就无法发挥了。恩格斯《自然辩证法》指出:归纳为演绎提供条件(前提条件),演绎是为归纳做向导,又是为了归纳的结果而演绎。

刘茂才、张伟民主编的《科学学辞典》,第 58—59 页在解释"归纳与演绎"时有两段很有哲理的论断:"归纳与演绎是人类认识得最早的研究得最充分的两种重要的逻辑思维方法。归纳是从许多个别或特殊的事物中指出一般原则的思维方法。演绎是以一般的原则出发,推出特殊或个别事物的方法。它们反映了人们认识事物两条方向相反的思维途径,反映了客观事物的个别与一般关系。归纳与演绎是辩证统一的,既相互区别相互对立,又相互联系相互转化。演绎以归纳为基础,没有归纳,演绎的前提就不可能产生,要进行演绎推理是不可能的。没有归纳也没有演绎,演绎中包含有归纳,演绎不能离开归纳。完全脱离演绎的归纳,不是科学的归纳。归纳以演绎为指导,没有演