北京启航考试学校教学用书

启航考研冲刺

2006最后5套题

（数学一）

北京启航考试学校编

中国市场出版社

律师声明

北京启航考试学校组织考研专家精心编著的《启航考研冲刺最后5套题》，多年来深受全国考生欢迎，但也屡遭不法分子抄袭和盗版。为了保护著作权人的合法权益，申张法律正义，本律师得授权发表如下表明：

北京启航考试学校独家拥有本书完整的著作权，该权益受中国及国际版权相关法律的充分保护。未获北京启航考试学校的书面许可，任何自然人、法人或其他组织不得以任何形式抄袭、转载、复制、改编、摘录本书的任何内容。否则，本律师将代表北京启航考试学校依法追究其民事侵权责任，并协助公安机关追究其刑事责任。

北京中普律师事务所

严旭然律师

图书在版编目(CIP)数据

启航考研冲刺最后5套题/北京启航考试学校编．—北京：中国市场出版社，2005.12

ISBN 7－80155－955－X

Ⅰ.启… Ⅱ.北… Ⅲ.研究生—人学考试—习题 Ⅳ.G643

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第122617号

书　　名：启航考研冲刺最后5套题
作　　者：北京启航考试学校
出版发行：中国市场出版社
地　　址：北京市西城区月坛北小街2号院3号楼(100837)
电　　话：编辑部(010)68034190　读者服务部(010)68022950
发行部(010)68021338　68020340
68024335　68033577
经　　销：新华书店
印　　刷：廊坊人民印刷厂
规　　格：787×1092毫米　1/8　5.5印张　100千字
版　　本：2005年12月第1版
印　　次：2005年12月第1次印刷
书　　号：ISBN 7－80155－955－X/G·40
定　　价：36.00元(共3册)

判断模拟试题优劣的标准
（代前言）

2006年硕士研究生入学考试的复习已经进入了最后的冲刺阶段，如同往年一样，启航学校也将在这关键时刻为广大考生奉献两道大餐：《启航考研冲刺最后5套题》和《启航考研政治考前20天20题》。

这已经是《启航考研冲刺最后5套题》连续第八年出版了。长久以来，我们已经习惯了好事者以《考研政治最后×套题》为题的模仿和炒作，甚至对直接的抄袭和盗版也有了些许麻木。我们深知，严谨是品质的保障，责任心是对考生最好的回报。“投之以桃，报之以李”，启航为考生备考贡献绵薄之力，考生就会回报启航以信任。

需要提醒考生的是，最后阶段模拟训练在考研政治复习中具有非常重要的地位，其目标主要有二：检测复习成效；感受考试氛围。模拟试题的质量直接关系到以上两个目标能否实现。

一套优秀的模拟试题必须满足以下三个标准：

一是，选材新颖。目前市面上不少模拟练习题照抄照搬，将考生过去做过的习题简单地拼凑出成套试题。因此，考生拿到这类模拟练习题后，都有一种似曾相识的感觉，陈旧的试题让人失去了新鲜感和兴奋感，模拟练习的成效自然也会大打折扣。因此，优秀的模拟练习题在选材上必然比较新颖，突出考查考生运用已经掌握的知识和原理分析新问题、新材料的能力，绝不能仅仅是对以往陈旧习题的简单排列和组合。

二是，命题严谨科学。严谨和科学是考研试题的最大特征。错漏百出，甚至不能自圆其说的试题肯定不是一道合格的模拟试题。此外，需要提醒考生的是，模拟练习的严谨和科学不仅仅体现在试题本身，更需要对试题所提供的参考答案和解析进行全面判断。

三是，导向性较强。作为最后阶段的复习材料，模拟练习题必须突出考研复习的重点，引导考生在最后阶段的复习中将精力集中在那些考查可能性比较大、综合性比较强的知识点上。

8年来，《启航考研冲刺最后5套题》之所以赢得了考生的广泛信任，不仅因为坚持以全新命制的试题为主（80%以上的试题都是全新命制的），更因为秉承了启航一贯的严谨态度，集中了启航名师的全部智慧，对最后阶段的复习具有较强的导向性。

愿2006版的《启航考研冲刺最后5套题》能对考生最后阶段的复习发挥更大的作用。

编者

2005年12月2日

启航教育在线 www. qihang. com. cn

为适应形势发展需要，启航学校在2003年创办了大型综合性教育网站——启航教育在线。启航教育在线依托北京启航考试学校在考研培训领域积累的丰富经验和良好品牌优势，在师资队伍建设、教学方案制定、服务 配套等方面具有独特优势。同时，启航教育在线还运用当今世界领先的网络信息技术、电子投影技术和电子排版技术制作网络教育课件，保证课件质量。

与其他网络教育课程相比，启航教育在线的网络课程具有以下优势：

★视听同步，面授感强，避免了网络课堂形同录音的尴尬；

★不限听课次数（但限听课进度），确保复习效果；

★提供在线和离线两种方式，离线方式（先下载再听课）可节约80%网络费用；

★充分考虑各地网络环境的差异，窄带网络（如拨号等）环境亦可轻松视听。

为了让广大学员进一步了解启航网络课堂，启航教育在线制作了免费视听课程，学员可以随时登录 www. qihang. com. cn 免费视听。

启航考研网络课程

科　目	授课老师	费　用
考研政治串讲	包仁、杨凤城等	200元
考研政治20天20题精讲	特约教授	100元
考研英语串讲	王若平	200元

启航新书推荐

《启航考研政治冲刺重点与模考测评》 **12月出版**

本书依照《2006年全国硕士研究生入学政治理论考试大纲》的要求以及2006年考生在最后冲刺复习阶段的需要，分两个部分对2006年考研考生进行冲刺复习指导。一、政治理论各科冲刺重点，包括哲学、政治经济学、毛泽东思想概论、邓小平理论与三个代表重要思想概论，以及时政与当代世界经济与政治的复习重点范围；二、政治模考题及其测试结果讲评，包括两套试卷及其参考答案、评分标准，试题的难度、区分度、信度、效度分析等。

《启航考研冲刺最后5套题（政治）》	已出版
《启航考研冲刺最后5套题（英语）》	已出版
《启航考研冲刺最后5套题（数学）》	已出版
《启航考研政治20天20题》	12月底出版

启航最新网络课程推荐

（详情请登录 www. aim99. com）

2006年考研政治串讲	包仁、杨凤城等	200元
2006年考研英语串讲	曹其军全程	200元
2006年考研西医串讲	北大医学部团队	250元
2006年考研政治20天20题精讲	特约教授	100元

目 录

启航考研数学模拟试卷(一) …………………………………………… (1)

启航考研数学模拟试卷(二) …………………………………………… (8)

启航考研数学模拟试卷(三)…………………………………………… (14)

启航考研数学模拟试卷(四)…………………………………………… (21)

启航考研数学模拟试卷(五)…………………………………………… (28)

启航考研数学模拟试卷(一)答案与解析……………………………… (35)

启航考研数学模拟试卷(二)答案与解析……………………………… (45)

启航考研数学模拟试卷(三)答案与解析……………………………… (55)

启航考研数学模拟试卷(四)答案与解析……………………………… (64)

启航考研数学模拟试卷(五)答案与解析……………………………… (73)

启航考研数学模拟试卷(一)

数学(一)试卷

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分,把答案填在题中横线上)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin(x-t)^2\,\mathrm{d}t}{x^2\ln(1-2x)}=$ ________.

(2) 设曲线 Γ 为由 $A(3,2,1)$ 到 $B(-1,0,2)$ 的线段,则 $\int_\Gamma (x+y+z)\mathrm{d}s=$ ________.

(3) $\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{1-x}}=$ ________.

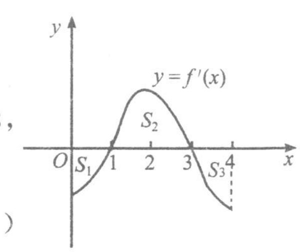
(4) 微分方程 $(2x\sin y+3x^2y)\mathrm{d}x+(x^3+x^2\cos y+y^2)\mathrm{d}y=0$ 的通解是________________.

(5) 已知二次曲面方程 $x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$ 可以通过正交变换化为椭圆柱面方程 $\eta^2+4\xi^2=4$,则 $a=$ ________, $b=$ ________.

(6) 商场出售10台洗衣机,其中3台次品,现已售出1台洗衣机,在余下的洗衣机中任取两台发现均为正品,则原先售出一台为次品的概率为________.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(7) 设 $f(0)=2$, $f'(x)$ 在 $[0,4]$ 上的图形如右图,其中三块面积 $S_1=3$, $S_2=4$, $S_3=2$,则 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 上的最大值与最小值分别为 ( )



(A) 3, −4　　(B) 5, −1　　(C) 5, −4　　(D) 3, −1

(8) 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导,且 $f(x)<g(x)$,则必有 ( )

(A) $f(-x)>g(-x)$　　(B) $f'(x)<g'(x)$

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$　　(D) $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t<\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$

(9) 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}a_n}{S_n^2}=$ ( )

(A) 发散　　(B) 绝对收敛　　(C) 条件收敛　　(D) 收敛性不确定

(10) 设 $\Omega:\begin{cases}x^2+y^2+z^2\leqslant 2z\\ z\geqslant\dfrac{1}{2}\end{cases}$,则 $\iiint\limits_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}v=$ ( )

(A) $2\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 f(r)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r$　　(B) $2\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi} f(r)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r$

(C) $2\pi\int_0^1\mathrm{d}r\int_{\frac{1}{2}}^{1+\sqrt{1-r^2}} f(\sqrt{r^2+z^2})r\,\mathrm{d}z$　　(D) $2\pi\int_{\frac{1}{2}}^2\mathrm{d}z\int_0^{\sqrt{2z-z^2}} f(\sqrt{r^2+z^2})r\,\mathrm{d}r$

(11) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为两个 n 阶方阵,现有四个命题:

① 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为等价矩阵,则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价;

② 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的行列式相等,则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为等价矩阵;

③ 若 $\boldsymbol{AX}=0$ 与 $\boldsymbol{BX}=0$ 均只有零解,则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为等价矩阵;

④ 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为相似矩阵,则 $\boldsymbol{AX}=0$ 与 $\boldsymbol{BX}=0$ 解空间的维数相等.

以上命题中正确的是 ( )

(A) ① ③　　(B) ② ④　　(C) ② ③　　(D) ③ ④

(12) 设 $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$,其中 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 分别为 m 阶、n 阶的对称阵,且 $\boldsymbol{A}$ 可逆, $\boldsymbol{C}$ 为 $m\times n$ 矩阵,记

$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\\ 0 & \boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{DP}=$ ( )

(A) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & 0\\ 0 & \boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & 0\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ 0 & \boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & 0\\ 0 & \boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\end{pmatrix}$

(13) 设总体 $X\sim N(\mu,25)$,在 $\alpha=0.05$ 的检验水平下检验 $H_0:\mu=0$; $H_1:\mu\neq 0$,如果所选取

的拒绝域 $R=\{|\overline{X}|\geqslant 1.96\}$，则样本容量 $n=$ （ ）

(A)25 (B)16 (C)9 (D)36

注：标准正态分布函数值 $\Phi(1.96)=0.975$，$\Phi(1.645)=0.95$

(14) 随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其分布函数为 $F(x)$，随机变量 $Y=F(\overline{X})$，则 $P(Y\leqslant 1/2)$ 的值 （ ）

(A) 与参数 μ 和 σ^2 有关 (B) 与参数 μ 有关，但与 σ^2 无关

(C) 与参数 μ 无关，但与 σ^2 有关 (D) 与参数 μ 和 σ^2 无关

二、解答题（本题共 9 小题，满分 94 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

(15)（本题满分 12 分）设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，且 $f(x)=\begin{cases} x & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 0 & 1<x<2 \end{cases}$，写出 $f(x)$ 的傅立叶级数与其和函数，并求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ 的和.

(16)（本题满分 12 分）计算 $I=\iint_{\Sigma}-y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $\sum$ 是圆柱面 $x^2+y^2=4$ 被平面 $x+z=2$ 和 $z=0$ 所截出部分的外侧.

(17)（本题满分 10 分）求函数 $f(x,y)=(x-1)^2+(y-2)^2+1$ 在区域 $\boldsymbol{D}: x^2+y^2\leqslant 20$ 上的最大值和最小值.

(18)（本题满分 12 分）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内有 2 阶连续导数，

(1) 写出 $f(x)$ 在 $\frac{a+b}{2}$ 处的一阶泰勒展开式；

(2) 证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使 $f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$；

(3) 若 $f'\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$，则至少存在一点 $\eta\in(a,b)$，使 $|f(b)-f(a)|\leqslant\frac{(b-a)^2}{4}|f''(\eta)|$.

(19)（本题满分 12 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内大于 0，且 $xf'(x)=f(x)+\frac{3a}{2}x^2$（$a$ 为常数）. 又曲线 $y=f(x)$ 与 $x=1,y=0$ 所围成的图形 $\boldsymbol{S}$ 的面积为 2，求函数 $f(x)$，并问 a 为何值时，图形 $\boldsymbol{S}$ 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积最小.

(20)（本题满分 9 分）设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，证明：

(1) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 有相同的特征值；

(2) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 同一特征值是否有相同的特征向量，举例说明；

(3) 证明 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 不同的特征值所对应的特征向量正交.

(21)（本题满分 9 分）设 4 元非齐次线性方程组 (A) 为 $\begin{cases} x_1-3x_2-5x_3+2x_4=-1 \\ x_1+7x_2+10x_3+7x_4=a \end{cases}$，而 $\alpha=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0\right)^{\mathrm{T}}$ 是 4 元非齐次线性方程组 (B) 的一个解，方程组 (B) 的导出组的基础解系为 $\beta_1=(1-3b,-1,1,b)^{\mathrm{T}}$，$\beta_2=(7,1,0,-2)^{\mathrm{T}}$，试确定方程组 (A) 与 (B) 有公共解的条件，并在有公共解时求出所有公共解.

(22)（本题满分 9 分）随机变量 X_1 与 X_2 相互独立，X_i 服从参数为 $i,p(0<p<1)$ 的二项分布 $(i=1,2)$，令随机变量 $Y_1=\begin{cases} 0 & X_1+X_2=1 \\ 1 & X_1+X_2\neq 1 \end{cases}$，$Y_2=\begin{cases} 0 & X_2-X_1=2 \\ 1 & X_2-X_1\neq 2 \end{cases}$，

(1) 试确定 p 的值，使 Y_1 与 Y_2 的协方差最小；

(2) 当 Y_1 与 Y_2 的协方差最小时，求 $Z=Y_1^2+Y_2^2$ 的概率分布.

(23)(本题满分 9 分)假如 0.50,1.25,0.80,2.00 是来自总体 X 的简单随机样本值.已知 $Y=\ln X$ 服从正态分布 $N(\mu,1)$.

(1)求 μ 的最大似然估计值;(2)求 X 的数学期望 b;(3)求 b 的置信度为 0.95 的置信区间.

注:标准正态分布函数值 $\Phi(1.96)=0.975$,$\Phi(1.645)=0.95$

启航考研数学模拟试卷(二)

数学(一)试卷

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分,把答案填在题中横线上)

(1)设方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$,确定 $y=y(x)$,则 $y''(0)=$ ________.

(2)一平面过坐标原点,且垂直于平面 $\pi_1: x-y+z-7=0$ 和 $\pi_2: 3x+2y-12z+5=0$,则此平面方程为________.

(3)设 $S: x^2+y^2+z^2=4$,则$\oint\!\!\oint_S (x^2+y^2)\mathrm{d}s=$ ________.

(4)设 $f(x)=\dfrac{1}{\pi x}+\dfrac{1}{\sin\pi x}-\dfrac{1}{\pi(1-x)}$,$x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right)$,试补充定义 $f(1)$ 使得 $f(x)$ 在$\left[\dfrac{1}{2},1\right]$上连续,则$f(1)=$ ________.

(5)若 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为$\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4}$,则行列式 $|\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{E}|=$ ________.

(6)已知总体 $\boldsymbol{X}$ 的概率密度只有两种可能,设 $\boldsymbol{H}_0: f(x)=\begin{cases}1/2, 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, \quad 其他.\end{cases}$,$\boldsymbol{H}_1: f(x)=\begin{cases}x/2, 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, \quad 其他.\end{cases}$,对 $\boldsymbol{X}$ 进行一次观测得样本 x_1,规定当 $x_1\geqslant\dfrac{3}{2}$ 时,拒绝 $\boldsymbol{H}_0$,否则就接受 $\boldsymbol{H}_0$,则此检验的第一类错误 $\alpha=$ ________,第二类错误 $\beta=$ ________.

二、选择题（本题共8小题，每小题4分，满分32分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内）

(7) 方程$\int_0^x \sqrt{1+t^6}\,dt - \int_0^{\cos x} e^{-t^2}\,dt = 0$在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内实根个数为 (　　)

(A)3　(B)2　(C)1　(D)0

(8) 设长度为1的细杆AB上任一点处的密度与该点到细杆A端的距离的平方成正比，比例系数为$k>0$，则细杆的质心坐标为 (　　)

(A) $\frac{3}{5}$　(B) $\frac{3}{4}$　(C) $\frac{2}{3}$　(D) $\frac{5}{7}$

(9) 下列命题中正确的是 (　　)

(A) 设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散，则$a_n \geqslant \frac{1}{n}(n \geqslant N)$

(B) 设$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$收敛，且$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛

(C) 设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$、$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$至少一个发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$发散

(D) 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$收敛

(10) 设空间曲线Γ位于上半球面$x^2+y^2+z^2=4$上，曲线Γ在xy平面上的投影线的方程为$\begin{cases} x^2+y^2=3 \\ z=0 \end{cases}$，则曲线$\Gamma$上点$(\sqrt{3},0,1)$处的切向量为 (　　)

(A)$\{0,\sqrt{3},0\}$　(B)$\{\sqrt{3},0,0\}$　(C)$\{\sqrt{3},1,0\}$　(D)$\{1,\sqrt{3},0\}$

(11) 设三阶矩阵$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$，若$\mathbf{A}$的伴随矩阵的秩等于1，则必有 (　　)

(A)$a=b$，或$a+2b=0$　(B)$a=b$或$a+2b\neq 0$

(C)$a\neq b$且$a+2b=0$　(D)$a\neq b$且$a+2b\neq 0$

(12) 二次型$f=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$的规范型为 (　　)

(A)$f=z_1^2+z_2^2+z_3^2$　(B)$f=z_1^2+z_2^2-z_3^2$

(C)$f=z_1^2-z_2^2-z_3^2$　(D)$f=z_1^2-z_2^2$

(13) 设随机变量X在$[a,b]$上服从均匀分布，$(a>0)$，且$P(0<X<3)=\frac{1}{4}$，$P(X>4)=\frac{1}{2}$，则$p(-1<X<5)=$ (　　)

(A)3/4　(B)1/2　(C)1/4　(D)1/6

(14) 假设随机变量X与Y都服从正态分布$N(0,\sigma^2)$，且$P(X\leqslant 1, Y\leqslant -1)=1/4$，则$p(X>1, Y>-1)=$ (　　)

(A)1/4　(B)1/2　(C)3/4　(D)1

三、解答题（本题共9小题，满分94分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

(15)（本题满分10分）设$u(x)$连续且$u(x)=1+\frac{1}{2}\int_x^1 u(y)u(y-x)\,dy$，求$\int_0^1 u(x)\,dx$.

(16)（本题满分12分）设密度为1的立体Ω由不等式$\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 1$表示，试求

(1) 任一点$P(x,y,z)$到直线$L: x=y=z$的距离；

(2)Ω绕直线L的转动惯量.

(17)（本题满分 12 分）$\dfrac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ 在下列区域 D 内是否为某个函数的全微分?若存在,求出一个这样的函数,不存在说明理由,(1) $D: y>0$;(2) $D: x^2+y^2>0$.

(18)（本题满分 12 分）设 $\{a_n\}$ 为单调递减的正数列,证明(1) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在;(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n-a_{n+1}}{\sqrt{a_n}}$ 收敛.

(19)（本题满分 12 分）设 $f(t)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有连续的二阶导数,$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=1$,且二元函数 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$,(1) 求 $f(t)$ 的表达式;(2) 求 $\dfrac{f(t)}{t}$ 在 $[1,+\infty)$ 上的最大值.

(20)（本题满分 9 分）设有向量组 $(\boldsymbol{A})\ \alpha_1=\begin{pmatrix}1\\3\\0\\5\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\4\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}$ 与向量组 $(\boldsymbol{B})\ \beta_1=\begin{pmatrix}1\\-3\\6\\-1\end{pmatrix}$,$\beta_2=\begin{pmatrix}a\\0\\b\\2\end{pmatrix}$ 试问:当 a,b 为何值时,向量组 $(\boldsymbol{A})$ 与 $(\boldsymbol{B})$ 等价?

(21)（本题满分 9 分）已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的 3 维列向量,满足 $\boldsymbol{A}\alpha_1=-2\alpha_1-4\alpha_3$,$\boldsymbol{A}\alpha_2=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$,$\boldsymbol{A}\alpha_3=\alpha_1+3\alpha_3$,

(1) 求矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{A}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\boldsymbol{B}$;

(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值;

(3) 求可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵.

(22)（本题满分 9 分）设随机落在曲线 $y=2x-x^2$ 与 x 轴所围闭区域内的点的分布是均匀分布，以 (X,Y) 表示落点的坐标，(1) 求 Y 的概率密度函数和分布函数；(2) 求落点到坐标原点距离的平方的数学期望.

(23)（本题满分 9 分）设总体的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases} ax\mathrm{e}^{-x^2/\lambda}, & x>0, \\ 0, & x\leqslant 0. \end{cases}$ 其中 $\lambda>0$，且 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为简单随机样本. (1) 确定常数 a；(2) 求 λ 的最大似然估计量；(3) 由(2) 中求出的估计量是否为 λ 的无偏估计量？

启航考研数学模拟试卷(三)

数学(一) 试卷

考生注意：本试卷共二十三题，满分 150 分，考试时间为 3 小时.

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

(1) $\int_0^4 x\sqrt{4x-x^2}\,\mathrm{d}x=$ ________.

(2) 由曲线 $\begin{cases} 3x^2+2y^2=12 \\ z=0 \end{cases}$ 绕 Y 轴旋转一周得到的旋转曲面在点 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处的切平面方程为________.

(3) 以 $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{2x}+\sin x$ (C_1,C_2 为任意常数) 为通解的二阶常系数线性非齐次方程为________.

(4) 当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)=kx^2$ 与 $\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小，则 $k=$ ________.

(5) 已知向量组 $\alpha_1=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(2,3,4,4)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(3,2,1,t)^{\mathrm{T}}$ 所生成的向量空间的维数是 2，则 $t=$ ________.

(6) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{10}$ 为来自 X 的简单随机样本，$Y=\dfrac{a(X_1^2+X_{10}^2)}{X_X^2+X_3^2\cdots+X_9^2}$ 服从 F 分布，则 $a=$ ________.

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内）

(7) 设 $f'''(x_0)$ 存在，且 $f'''(x_0)\neq 0$，$f''(x_0)=0$，则下列结论中成立的为 (　　)

(A) x_0 是 $f(x)$ 的驻点　　(B) x_0 是 $f(x)$ 的极值点

(C) $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点　　(D) 以上三个答案都不对

(8) 设有直线 $l_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+8}{1}$, $l_2:\begin{cases}x-y=6\\2y+z=3\end{cases}$, 则 l_1 与 l_2 的夹角为 ( )

(A) $\dfrac{\pi}{6}$ (B) $\dfrac{\pi}{4}$ (C) $\dfrac{\pi}{3}$ (D) $\dfrac{\pi}{2}$

(9) 设由平面图形 $a\leqslant x\leqslant b, 0\leqslant y\leqslant f(x)$ 绕 x 轴旋转一周所成的立体 Ω 的密度为 1, 其中 f 连续, 则立体 Ω 对 x 轴的转动惯量为 ( )

(A) $\dfrac{\pi}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (B) $\dfrac{\pi}{2}\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$ (C) $\dfrac{\pi}{2}\int_a^b f^3(x)\mathrm{d}x$ (D) $\dfrac{\pi}{2}\int_a^b f^4(x)\mathrm{d}x$

(10) 设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处二阶可导, 且 $f'(x_0)<0, f''(x_0)<0$, 若 $\Delta x>0$, 记 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, $\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$, 则 ( )

(A) $\Delta y>\mathrm{d}y>0$ (B) $\Delta y<\mathrm{d}y<0$ (C) $\mathrm{d}y>\Delta y>0$ (D) $\mathrm{d}y<\Delta y<0$

(11) 已知 $\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4$ 是 $AX=0$ 的基础解系, 则此方程组的基础解系可以选用 ( )

(A) $\eta_1+\eta_2, \eta_2+\eta_3, \eta_3+\eta_4, \eta_4+\eta_1$

(B) $\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4$ 的一个等价向量组

(C) $\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4$ 的一个等秩向量组

(D) $\eta_1, \eta_1+\eta_2, \eta_1+\eta_2+\eta_3, \eta_1+\eta_2+\eta_3+\eta_4$

(12) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵, $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 为可逆矩阵, 下列命题不正确的是 ( )

(A) 若 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AQ}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组与 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价

(B) 若 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PA}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组与 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价

(C) 若 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PAQ}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的行(列)向量组与 $\boldsymbol{B}$ 的行(列)向量组等价

(D) 若 $\boldsymbol{A}$ 的行(列)向量组与 $\boldsymbol{B}$ 的行(列)向量组等价, 则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价

(13) 设二维随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布 $N(0,-1;1,4;0)$, 则下列结论不正确的是 ( )

(A) X 与 Y 相互独立 (B) $aX+bY$ 服从正态分布

(C) $P(X-Y<1)=1/2$ (D) $P(X+Y<1)=1/2$

(14) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_9$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{16}$ 是分别来自两个相互独立的正态总体 $\boldsymbol{N}(2,3)$ 和 $\boldsymbol{N}(1,4)$ 的简单随机样本. 又 $\overline{X},\overline{Y}$ 分别表示两组样本的均值, 则 $\overline{X}-\overline{Y}-1$ 服从 ( )

(A) $\boldsymbol{N}\left(1,\dfrac{17}{18}\right)$ (B) $\boldsymbol{N}\left(0,\dfrac{7}{18}\right)$ (C) $\boldsymbol{N}\left(0,\dfrac{7}{12}\right)$ (D) $\boldsymbol{N}\left(0,\dfrac{1}{12}\right)$

三、解答题(本题共 9 小题, 满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15)(本题满分 12 分) 设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, 且满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$, 又 $g(x,y)=f\left(xy,\dfrac{1}{2}(x^2-y^2)\right)$, 求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

(16)(本题满分 12 分) 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{(x^3+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+x^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 其中 $\sum$ 是上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧.

(17)（本题满分 12 分）将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数，并求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

(18)（本题满分 12 分）一子弹以速度 $v_0=200\ \mathrm{m/s}$ 打进一厚度为 0.1 m 的板，然后穿透它，以速度 $v_1=80\ \mathrm{m/s}$ 离开板，设板对子弹的阻力与运动速度的平方成正比，求子弹穿透板所需的时间.

(19)（本题满分 10 分）设函数 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上连续，在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)\neq 0$，

(1) 证明：对于任意 $x\in(0,l)$，至少存在一 $\theta\in(0,1)$，使得

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t=x[f(\theta x)-f(-\theta x)]$$

(2) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0+0}\theta$.

(20)（本题满分 8 分）设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵 $\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{ABA}^{-1}=\boldsymbol{BA}^{-1}+3\boldsymbol{E}$，

求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

(21)（本题满分 10 分）已知 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & -a\\ 2 & a & -2\\ -a & -1 & 1\end{bmatrix}$，求 A 的特征值与特征向量，并指出 A 可以相似对角化的条件.

(22)（本题满分 9 分）现将两封信投入编号为 1,2,3 的 3 个邮筒，设 X,Y 分别表示投入第 1 号和第 2 号邮筒的信的数目，试求(1)(X,Y) 的联合分布；(2)X 与 Y 是否相互独立？(3)$Y=0$ 时 X 的条件分布；(4) 随机变量函数 $U=XY$ 的概率分布；(5)X 与 Y 的相关系数.

(23)（本题满分 9 分）设 G 是由 X 轴、Y 轴及直线 $2x+y-2=0$ 所围成的三角形区域，二维随机变量(X,Y) 在 G 内服从均匀分布，(1) 求 X 和 Y 的相关系数；(2) 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x\mid y)$ 及 $f_{Y|X}(y\mid x)$；(3) 求 $P\{Y\geqslant X\}$.

启航考研数学模拟试卷(四)

数学(一)试卷

考生注意:本试卷共二十三题,满分150分,考试时间为3小时.

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分,把答案填在题中横线上)

(1) 设二元函数 $z = xe^{x+y} + (x+1)\ln(1+y)$,则 $dz\big|_{(1,0)} =$ ________.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x - \sqrt{ax^2+bx+1}) = 2$,则 $a =$ ________,$b =$ ________.

(3) 交换积分次序 $\int_0^1 dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{2-x} f(x,y)dy =$ ________.

(4) 设函数 $f(x) = x^2 (0 \leqslant x \leqslant 1)$,$s(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$,$-\infty < x < +\infty$,

其中 $b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx n = 1,2,\cdots$,则 $S\left(-\frac{1}{2}\right) =$ ________.

(5) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & a \\ 1 & a & 9 \end{pmatrix}$,其中 $a < 0$,且齐次方程组 $AX = 0$ 有非零解,A^* 是 A 的伴随阵,则齐次方程组 $A^* X = 0$ 的通解是________.

(6) 设随机变量 X 服从参数为3,1/3的二项分布,Y 服从[0,3]上的均匀分布,且 X 与 Y 相互独立,

则 $\begin{vmatrix} X & X-1 & 1 \\ 0 & Y & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} > 0$ 的概率是________.

二、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(7) 设曲线积分 $\int_L [f(x) - e^x]\sin y dx - f(x)\cos y dy$ 与路径无关,其中 $f(x)$ 具有一阶连续导数,且 $f(0) = 0$,则 $f(x) =$ ( )

(A) $\frac{e^{-x}-e^x}{2}$ (B) $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (C) $\frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1$ (D) $1 - \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}$ 等于 ( )

(A) $\int_1^2 \ln^2 x dx$ (B) $2\int_1^2 \ln x dx$

(C) $2\int_1^2 \ln(1+x)dx$ (D) $\int_1^2 \ln^2(1+x)dx$

(9) 对于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n^p} + \frac{1}{n^{3-p}}\right)$,下列结论正确的是 ( )

(A) $p > 0$ 时,级数收敛 (B) $p > 1$ 时,级数收敛

(C) $0 < p < 2$ 时,级数绝对收敛 (D) $1 < p < 2$ 时,级数绝对收敛

(10) 设方程 $x - \ln x + k = 0$ 在区间 $0 < x < +\infty$ 内有两个相异的实根,则 ( )

(A) $k \leqslant -1$ (B) $k \geqslant -1$ (C) $k > -1$ (D) $k < -1$

(11) n 阶矩阵 A 经初等行变换得到矩阵 B,那么下列命题中正确的是 ( )

(A) A 与 B 有相同的特征值 (B) $AX = b$ 与 $BX = b$ 是同解方程组

(C) A 与 B 的列向量组是等价向量组 (D) A 与 B 有相同的特征向量

(12) 设 A 是秩为3的4阶矩阵,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是非齐次线性方程 $Ax = b$ 的三个解,若 $\alpha_1 + 2\alpha_2 = (0,-6,-3,6)^T$,$\alpha_2 - 2\alpha_3 = (1,3,3,-1)^T$,则 $Ax = b$ 的通解为 ( )

(A) $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

(13) 已知随机变量 $X \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$，$Y \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$，$E(XY)=\frac{5}{8}$，则 $P(X+Y\leqslant 1)$ 等于 (　　)

(A)1/8　(B)1/4　(C)3/8　(D)1/2

(14) 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，μ 已知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自 X 的简单随机样本，在统计量 S^2，$\frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n}X_i(X_i-X_{i-1})$，$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 中，有(　　)个不是 σ^2 的无偏估计

(A)1　(B)2　(C)3　(D)4

三、解答题(本题共 9 小题，满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15) (本题满分 10 分) 设 φ,ψ 都具有二阶偏导数，

$$z=\frac{1}{2}[\varphi(y+ax)+\varphi(y-ax)]+\frac{1}{2a}\int_{y-ax}^{y+ax}\psi(t)\mathrm{d}t,\text{试求}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

(16) (本题满分 12 分) 用变量代换 $t=\sqrt{x}$ 化简微分方程 $4x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+2(1-\sqrt{x})\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-6y=\mathrm{e}^{3\sqrt{x}}$ 并求此方程的通解.

(17) (本题满分 12 分) 计算曲线积分 $I=\oint_\Gamma (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$，其中 Γ 是用平面 $x+y+z=\frac{3}{2}$ 截立体：$0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant z\leqslant 1$ 的表面所得的截痕，若从 OX 轴的正向看去取逆时针方向.

(18) (本题满分 12 分) 设一底半径为 r，高为 h 的圆锥形容器被隔成左右对称不相通的两部分，两部分都装满水. 若把右半部分的水抽出一部分，使容器的中间隔板的左边所受的压力为右边所受压力的 8 倍，求抽掉右边那部分水所需做的功.