

根据教育部《国家课程标准》编写

龙门 专题

初中数学

几何证明

主 编 南秀全
本册主编 南秀全



龍 門 書 局

www.Longmenbooks.com

- ◎ 组稿编辑：田 旭
- ◎ 责任编辑：马建丽 李妙茶
- ◎ 封面设计：

龙门专题



朱师达 (2005年湖北省理科第一名，现就读于北京大学元培计划实验班)

《龙门专题》这套书习题讲解详细而具体，不仅例题，而且每章后的练习题都有详细的解答过程，只要认真阅读和揣摩，就一定能起到举一反三的效果，这是非常难能可贵的。



徐岸汀 (2003年广东省理科第一名，综合总分900分，现就读于北京大学元培计划实验班)

《龙门专题》这套书是一套很好的教辅材料，知识板块合理细化，我曾经有几个知识点掌握得不够好，后来有针对性地选择了几本，弥补自己不足，感觉用起来很方便，成绩也提高得很快。这套书题目难度把握得也很好，是巩固基础、提高能力不可缺少的好帮手。



王佳杰 (2004年上海市高考第一名，上海市优秀毕业生，高考总分600分)

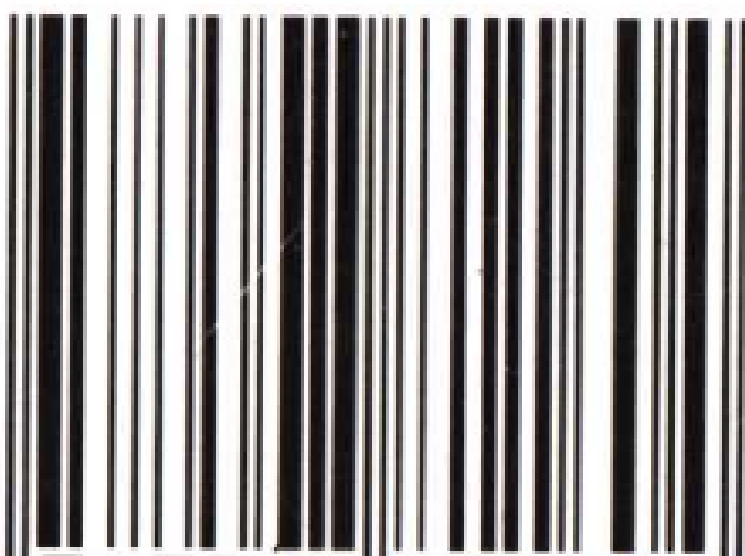
《龙门专题》这套书给你的是脚踏实地备战考试的正道，如果还有老师在旁指导挑选出最重要的例题和习题，有和你同样选择《龙门专题》的同学相互切磋的话，那就几乎是完美了。



刘诗泽 (2005年黑龙江省高考理科第一名，现就读于北京大学元培实验班)

好的参考书必须要根据考试的方向走，围绕考试的考查重点来布局。我在备考时使用《龙门专题》这套书，正是紧跟着考试走，例如数学等科目的参考书，都在每小节后列出了相关的典型考题，以进一步强化复习相关知识点。

ISBN 7-5088-1160-7



9 787508 811604 >

ISBN 7-5088-1160-7

定价：15.00 元



几何证明

主 编 南秀全

本册主编 南秀全

编 者 付东峰 肖九河 石 润

姜文清 余 梦 肖一鸣

汪 彬



龍門書局

北京

版权所有 翻印必究

举报电话:(010)64034160,13501151303(打假办)

邮购电话:(010)64034160

图书在版编目(CIP)数据

几何证明/南秀全主编;南秀全分册主编. —北京:科学出版社:
龙门书局,2006

(龙门专题)

ISBN 7-5088-1160-7

I. 几… II. ①南…②南… III. 几何课—中学—教学参考资料 IV. G634.633

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 089959 号

组稿编辑:田 旭/责任编辑:马建丽 李妙茶/封面设计:耕 者

龙 门 书 局 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

www.longmenbooks.com

北京市东华印刷厂 印刷

科学出版社总发行 各地书店经销

*

2006 年 8 月第 一 版 开本:A5(890×1240)

2006 年 8 月第一次印刷 印张:9 3/4

印数:1—20 000 字数:282 000

定 价: 15.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)



策划者语

生命如歌

——来自北大清华优秀学子的报告

未名湖畔，博雅塔旁。

六月的晨光穿透枝叶，懒散地泻落在林间小道上，水银泻地。微风拂起，垂柳摇曳，湖面荡起阵阵涟漪，黑魇魇的博雅塔倒映在湖面，随着柔波翩翩起舞。林间传来朗朗的读书声，那是晨读的学子；湖畔小径上不断有人跑过，那是晨练的学子；椅子上，台阶上，有人静静坐着，那是在求索知识的宝库……

在北大，每个早晨都是这样的；在清华，每个早晨也都是这样；其实在每一所高校，早晨都是一幅青春洋溢、积极进取的景象！

在长达两年的时间里，我一直在组织北大、清华的高考状元、奥赛金牌得主还有其他优秀学子到全国各地去巡回讲演。揭开他们光彩夺目的荣誉的面纱，他们是那样的平凡、普通，跟我们是那么的相像接近；但在来来往往出差的路上，深入了解他们的过去、成长历程，我才发现，在平凡、普通的背后，他们每个人的成长都勾勒出一道独特的风景，都是一段奋斗不息、积极进取的历程，他们的生命都是一首隽永悠长的歌曲，成功更是偶然中的必然。

小朱，一个很认真、很可爱的女孩子，高中之前家庭条件十分优越，所以一直学习平平，不思进取；在她上高中前，家庭突遭变故，负债累累，用她妈妈的话说，“家里什么都没有了，一切只能靠你自己了。”她说自己只有高考一条路，只有考好了，才能为家里排忧解难。我曾经在台下听她讲自己刻苦学习的经历：“你们有谁在大年三十的晚上还学习到深夜三点？你们又



有谁发烧烧到 39 度以上还在病床上看书? ……”那一年,她以总分 684 分成为了浙江省文科高考状元。

小弟姓谭,因为年龄最小,所以大家都叫他小弟,2003 年广东省理科状元,佛山人。我们到广东巡讲结束后,车到了佛山,他却不下车,他说从这里找不到回家的路,因为在佛山上了三年学,除了回家的路知道,从来没有走出过学校的大门。我们只好把他送到广州汽车站,只有在那里他才知道怎么回家。我们大家都哈哈大笑,觉得有些不可思议,只有司机师傅道出天机:“小谭要是能找到回家的路,就不会是高考状元了!”

陆文,一个出自父母离异的单亲家庭的女孩,她说,她努力学习的动力就是想让妈妈高兴,因为从小她就发现,每次她成绩考得很好,妈妈就会很高兴。为了给妈妈买一套宽敞明亮的房子,她选择了出国这条路,考托福,考 GRE,最后如愿以偿,被芝加哥大学以每年 6.4 万美金的全额奖学金录取为生物方向的研究生。6.4 万美金,相当于人民币 52 万。

齐伟,湖南省高考第七名,清华大学计算机学院的研究生,最近被全球最大的软件公司 MICROSOFT 聘为项目经理;霖秋,北京大学数学学院的小妹,在坚持不懈的努力中完成了自身最重要的一次涅槃,昨天的她在未名湖上游弋,今天的她已在千里之外的西雅图……

还有很多很多优秀学子,他们都有自己的故事,酸甜苦辣,但都很真实,很精彩。亲爱的同学们,你们是否也已有了自己的理想,有

了自己憧憬的高等学府,是否也渴望着跟他们一样的优秀?在分享这些优秀的学姐学哥们成功的喜悦时,你是否会有很多的感慨,曾经虚度光阴的遗憾,付出与收获不符的苦恼,求知而不入其门的焦虑?我有幸与他们朝夕相处,默默观察,用心感受,感受颇深。其实他们与你一样,并不见得更聪明,或者与众不同,但他们的成功却源于某些共同的特质:目标明确,刻苦勤奋,执着坚韧,最重要的一条是:他们都“学而得其法”,——这,就是为什么我们在本书的前言要讲述他们故事的原因;这,也是



我们策划出版《龙门专题》这套丛书的原因了。

在跟这些清华、北大优秀学子的交往过程中,曾多次探讨过具体学习方法的问题,而学习辅导资料则是他们反复谈到的话题。我们惊喜地发现:他们及他们的同学中,大部分人都使用过《龙门专题》这套书,有很多同学对《龙门专题》推崇备至,有人甚至还记得本套丛书的一些经典例题和讲解。有时,看着他们互相交流使用《龙门专题》心得时的投入,像小孩子一样争辩着其中哪个知识版块,哪道题目最经典实用时的忘我,我们的激动溢于言表,于是,我让他们把自己使用这套书的心得体会写下来,跟更多的学子们来分享。说句实话,对本套丛书的内容和体例特点,他们的理解很全面也很深刻。受篇幅所限,在此只能简要地摘录一部分,与同学们共勉:

朱师达:(男,2005年湖北省理科第一名,现就读于北京大学元培实验班)

对于数学、物理、化学等科目来讲,一定要有高质量的练习,《龙门专题》这套书习题讲解详细而具体,不仅例题,而且每章后的练习题都有详细地解答过程,只要认真阅读和揣摩,就一定能起到举一反三的效果,这是非常难能可贵的。

王佳杰:(2004年高考上海市第一名,毕业于上海控江中学,高考总分600(满分610分),现就读于北京大学,获2004年上海优秀毕业生,2004年北大新生奖学金等荣誉)

《龙门专题》所选的题目固然多,但决无换个数字就算新题的滥竽充数之招;题目虽然要求较高,但坡度合理,决非书后题和奥赛题的简单结合;《龙门专题》虽然针对的是全国卷的考生,但却也覆盖了所有上海卷的基本考点,又略微拔高一些,基于课本又高于课本——这正是上海考试卷的一向风格。总而言之,这套书给你的是脚踏实地备战考试的正道,如果,还有老师在旁指导挑选出最重要的例题和习题,有和你同样选择《龙门专题》的同学相互切磋的话,那就几乎是完美了。

孙田宇:(2005年吉林省文科第一名,高考总分682)

参考书是每一位学生在学习过程中必不可少的,我在自己备考时用的是

《龙门专题》。很推崇其中的“知识点精析与应用”、“综合应用篇”。“知识点精析与应用”将基础知识脉络理清,可检验我们对基础知识的掌握是否牢固扎实。“综合应用篇”则可以帮助我们打开综合题和应用题的解答思路,面对纷繁多样的试题,发掘一些固定的方法,以不变应万变,我从中受益匪浅。

李原草:(男,2003年安徽省高考文科第一名,现就读于北京大学光华管理学院,曾获得北京大学明德奖学金和社会工作优秀奖)

我认为,一本好的参考书首先要条理清晰,重点突出,讲述透彻明了,参考书是对教材的补充而不是简单的重复。《龙门专题》这套书,依据教材而不是简单地重复教材,将数学、物理、化学等学科的知识分成很多知识点、知识块,分为很多册,分别加以总结和归纳,非常适用于平时有针对性地查漏补缺和系统强化复习。

徐惊蛰:(2003年河南省高考理科第一名,高考总分697,北京大学光华管理学院金融系)

我觉得《龙门专题》这套书非常人性化,适合不同的学生根据自身情况有针对性地进行辅导学习。题目设计难度适宜,由浅入深。我当时在排列组合、电磁学等章节上学得不是很好,做题也不得心应手,而这几本龙门的参考书,讲解非常细致,不论是前面对于章节要点的总结归纳,还是后面习题的解析都比较到位,尤其是练习题的答案,像这样详尽明晰的解析是很少见的。所以这样的书比较适合在某些知识版块上学习有困难的同学,以及自学者使用。建议专题细化的同时,也可以将某知识版块的内容与相关知识点结合、联系,使学生加强综合能力,融会贯通,而不仅仅掌握本知识版块。

刘诗泽:(2005年黑龙江省高考理科第一名,现就读于北京大学元培实验班)

好的参考书必须要根据考试的方向走,围绕考试的考查重点来布局。《龙门专题》这套书正是紧跟着考试走,例如数学等科目的参考书,都在每小节后列出了相关典型考题,以进一步强化复习相关知识点。

一本好书可以改变一个人的命运!我们真诚的希望每一个学生都能学会学习,梦想成真。

《龙门专题》,走向清华北大的阶梯!

《龙门专题》编委会

2006年8月中



目 录

基础篇	(1)
第一章 探索证明方法	(1)
1.1 定义、命题与定理	(1)
1.2 证明	(10)
第二章 证明初步	(22)
2.1 相交线、平行线	(22)
2.2 三角形	(41)
2.2.1 三角形中的边与角	(41)
2.2.2 多边形	(54)
2.2.3 全等三角形	(67)
2.3 轴对称变换在几何证明中的应用	(87)
第三章 证明的再认识	(107)
3.1 四边形的证明	(107)
3.2 相似形的证明	(134)
3.3 锐角三角函数与证明	(156)
3.4 旋转变换在证明中的应用	(165)
第四章 圆	(179)
4.1 点与圆	(179)
4.2 直线与圆	(199)
4.3 圆与圆	(220)
4.4 圆的综合	(233)

CONTENTS



综合篇	应用篇		(244)
第一章	直线形		(244)
第二章	相似形与圆		(259)
第三章	代数与几何		(279)
第四章	几何中的探索与证明		(291)

基础篇

第一章 探索证明方法

1.1 定义、命题与定理

学习指导

[考纲要求]

本节知识是几何证明最基础的部分,主要介绍了定义、命题、定理和公理的含义以及相关的概念,理解命题的题设和结论,判断命题的真假,了解定理、公理的从属关系是需要掌握的内容.

[重点聚焦]

重点:1. 能够找出命题的题设和结论,能根据生活经验识别命题的真假.
2. 理解定义、定理、公理是识别命题真假的依据.

难点:1. 理解定理、公理的联系和区别.
2. 能够写出命题的题设和结论,能够写出一个命题的逆命题.

知识点精析与应用

知识点精析

1. 定义

对名称或术语的含义加以描述,作出明确的规定,也就是给出了它们的定义.

例如:“具有中华人民共和国国籍的人,叫做中华人民共和国的公民”是“中华人民共和国公民”的定义.

“在一个方程中,只含一个未知数,并且未知数的指数是1,这样的方程叫做一元一次方程”是“一元一次方程”的定义.

“两组对边分别平行的四边形叫做平行四边形”是“平行四边形”的定义.

2. 命题

判断一件事情的语句叫做命题.

命题一定要是“判断一件事情”的句子,而有些句子,如“你是小彬吗?”,“你吃过早饭了吗?”,“过点 A 作直线 EF ”等,没有对某一事件作出什么判断,这样的句子就不是命题.

例如,下列句子都是命题:

- (1) 熊猫没有翅膀;
- (2) 任何一个三角形一定有直角;
- (3) 负数都小于 0;
- (4) 0 小于 -2 .

3. 命题的组成及一般表述形式

每个命题都由题设(已知条件)和结论两部分组成,其中题设是已知事项,结论是由已知事项推出的事项.

命题一般表述形式为“如果……,那么……”的形式,其中“如果……”部分就是命题的题设部分,“那么……”引出的是命题的结论部分.

事实上,有些命题并没有写成“如果……,那么……”的形式,这时只要我们将命题的题设和结论明确后,就可以改写成“如果……,那么……”的形式.如“对顶角相等”这个命题,我们不能写成“如果对顶角,那么相等”,而应改写为“如果两个角是对顶角,那么它们相等”.

组织语言也挺重要

4. 真命题与假命题

并不是所有的命题都是正确的,其中正确的命题叫做真命题,错误的命题叫做假命题.如“两点之间线段最短”,“熊猫没有翅膀”,“负数都小于 0”都是真命题,而“ 0 小于 -2 ”,“任何一个三角形一定有直角”则是假命题.

5. 真假命题的识别

要判断一个命题是否是真命题,可通过简单的推理予以判别.而要说明一个命题是假命题时,往往只需举出一个例子,使之具备命题的题设,而不具备命题的结论就可以了,这样的例子称为反例.举反例是说明一个命题是假命题的行之有效的方法.

6. 公理和定理

公理:客观存在的,被人们所公认的正确命题称为公理.公理无需证明,它是作为论证其他命题的一种原始依据,如“两点之间线段最短”,“过直线外一点,有且只有一条直线与已知直线平行”等都是公理.

定理:通过论证是真命题的命题叫做定理.定理和公理都是我们今后证明的

依据.

7. 互逆命题和互逆定理

(1)逆命题:在两个命题中,如果第一个命题的题设是第二个命题的结论,而第一个命题的结论又是第二个命题的题设,那么这两个命题叫做互逆命题,如果把其中一个叫做原命题,那么另一个叫做它的逆命题.

注意:任何命题都有逆命题,只要将它的题设和结论交换位置即可.但原命题与它的逆命题不一定同真同假,它们的真假没有任何联系.

(2)逆定理:如果一个定理的逆命题经过证明是真命题,那么它也是一个定理,这两个定理叫做互逆定理,其中一个叫做另一个的逆定理.

注意:并不是每个定理都有逆定理,这是与逆命题的主要区别.如“对顶角相等”它有逆命题,但却没有逆定理.

解题方法指导

[例1] 判断下列语句是否是命题?如果是命题,试判别其真假.

- (1)画线段 $CD=3\text{cm}$;
- (2)两直线相交有且仅有一个交点;
- (3)若 $a \perp b, c \perp b$, 则 $a \perp c$;
- (4)直角都相等;
- (5)如果两个角不相等,那么这两个角不是对顶角;
- (6)小明上学去了吗?

[点拨] 可依据命题的含义对上述六个语句进行分析,即可知道哪些是命题,对于命题的真假可依据已学过的知识予以分析判断.

[解答] (1)不是命题,它只告知一件事件,而没有对事件作出任何判断;

(2)是命题,而且是一个真命题;

是否作出“判断”是解题关键

(3)是命题,但它是一个假命题;

(4)是命题,而且是一个真命题;

(5)是命题,而且是一个真命题;

(6)不是命题,因为它没有对某一事件作出判断.

[说明] 解决这类问题时,通常应从语句本身出发,挖掘出其中是否存在对某事件作出某种判断,从而可知该语句是否是命题.至于命题的真假性判别,则需要借助以往学过的数学知识或了解过的生活经验来进行推理,作出正确说明.

[例2] 指出下列命题的题设和结论.

- (1) 同位角相等, 两直线平行;
- (2) 同角的余角相等;
- (3) 平行于同一直线的两条直线平行;
- (4) 同旁内角不互补, 两直线不平行.

[点拨] 命题由题设和结论两部分组成, 因而只要将所给命题进行恰当的分析后, 即可知该命题的题设和结论分别是什么.

[解答] (1) 题设: 同位角相等,

结论: 两直线平行.

(2) 题设: 两个角是同一个角的余角,

结论: 这两个角相等.

(3) 题设: 两条直线都平行于同一直线,

结论: 这两条直线平行.

(4) 题设: 同旁内角不互补,

结论: 两条直线不平行.

[说明] 指出一个命题的题设和结论, 应注意将命题合理分析, 以便指出题设和结论各是什么.

[例3] 请将下列命题改写成“如果……那么……”的形式.

- (1) 等角的补角相等;
- (2) 相等的角是对顶角;
- (3) 两点确定一条直线.

[点拨] 将上述命题改写成“如果……那么……”的形式时, 首先应将命题的题设和结论分清楚, 以便将其改写成一般形式.

[解答] (1) 如果两个角是相等角的补角, 那么这两个角相等;

(2) 如果两个角相等, 那么这两个角是对顶角;

(3) 如果过已知两点作直线, 那么能够且只能够作一条直线.

[说明] 在改写过程中应注意语句通顺, 表述清楚、简洁, 并保证改写后不改变原命题的原意.

基础达标演练

1. 判断下列说法是否正确? 正确的打“√”, 错误的打“×”.

(1) “如果 $\angle 1 = 150^\circ$, 则 $\angle 1$ 是钝角”, 这就是“钝角”的定义. ()

- (2)命题由题设和结论两部分组成. ()
- (3)有些命题可以写成“如果……那么……”的形式,但并非所有命题都能写成“如果……那么……”的形式. ()
- (4)要说明一个命题是真命题(或是假命题),只要举出一个使结论成立(或不成立)的例子就行. ()
- (5)“过直线外一点 P 作直线的垂线”是一个命题. ()
- (6)定理和公理都是人们公认的正确命题,不需要推理论证而得到. ()
2. 下列语句中,是命题的是 ()
- A. 两点确定一条直线吗
- B. 在直线 CD 上任取点 E
- C. 在同一平面内,不相交的两条直线叫做平行线
- D. 两个锐角的和大于直角
3. 下列命题中,是真命题的是 ()
- A. 两条直线被第三条直线所截,同位角相等
- B. 大于 90° 的角是钝角
- C. 若对顶角互补,则构成这两个角的两条直线互相垂直
- D. 互补的两个角相等
4. 下列命题中,是假命题的是 ()
- A. 若 $a > b, b > c$, 则 $a > c$
- B. 互补的两角是邻补角
- C. 已知直线 a, b, c , 若 $a \perp b, b \parallel c$, 则 $a \perp c$
- D. 垂直于同一直线的两条直线平行
5. 假命题是指 ()
- A. 题设成立而结论不成立
- B. 题设和结论都成立
- C. 题设不成立而结论成立
- D. 题设和结论都不成立
6. 判断一件事情的语句叫做_____,而定义的含义是_____.
7. 命题“内错角相等,两直线平行”中,“两直线平行”是命题的_____部分,“内错角相等”是命题的_____部分.
8. “如果 $a \perp b, b \perp c$, 那么 $a \parallel c$ ”这个命题的题设是_____,结论是_____,这个命题是_____命题.
9. “互补的两个角中一个一定是锐角,另一个一定是钝角”是_____命题.
10. 把命题“垂线段最短”改写成“如果……那么……”的形式为_____.
11. 把“两直线平行,内错角相等”改写成“如果……那么……”的形式为_____.
12. 请写出一个你所知道的定理是_____,写出一个你所知道的公理是_____.

13. 指出下列命题的题设和结论,并判别其真假.

- (1)若 $a < 0, b < 0$, 则 $ab > 0$;
- (2)在一个三角形中,如果有两个角相等,那么它们所对的边也相等;
- (3)从直线外一点引这条直线的所有线段中,垂线段最短.

14. 把下列命题改写成“如果……那么……”的形式.

- (1)邻补角的平分线互相垂直;
- (2)等量减等量差相等;
- (3)两点之间,线段最短;
- (4)互余的两个角不一定相等.

答案与提示

1. (1)× (2)✓ (3)× (4)× (5)× (6)×

2. D 3. C 4. B 5. A

6. 命题;对名称或术语加以描述

7. 结论;题设

8. 如果 $a \perp b, b \perp c$; 那么 $a \parallel c$; 真

9. 假 提示:如两个角都是直角.

10. 如果从直线外一点向已知直线上的点引线,那么垂线段最短.

11. 如果两直线平行,那么内错角相等.

12. 三角形的任意两边之和大于第三边;两点确定一条直线.(答案不唯一)

13. (1)题设: $a < 0, b < 0$; 结论: $ab > 0$. 这是真命题;

(2)题设:在一个三角形中,有两个角相等;结论:这两个角所对的边也相等.
这是一个真命题;

(3)题设:直线外一点与直线上所有点所连结的线段;结论:垂线段最短. 这是一个真命题.

14. (1)如果两个角互为邻补角,那么这两个角的角平分线互相垂直;

(2)如果用相等的量减去相等的量,那么所得的差相等;

(3)如果两点之间用线段连结,那么线段最短;

(4)如果两个角互余,那么这两个角不一定相等.

视野拓展

难点指津

本节的难点是指出命题的题设、结论,并根据原命题写出逆命题,这需要较强的理解能力和语言组织能力.





综合延伸

[例4] “在一个三角形中,如果有两条边相等,那么这样的三角形叫做等腰三角形.”这就是给出了等腰三角形的定义.类似地,请你给“锐角”下个定义,你能行吗?

[点拨] 对一个名称或术语的含义加以描述,作出明确的规定,这就是给名称或术语下定义了.“锐角”的含义是指大于 0° 而小于 90° 的角,因而给它下个定义应不是难事.

[解答] 锐角:如果一个角的度数大于 0° 而小于 90° ,那么这个角称为锐角.

怎样下定义呢?

[说明] 对一个名称或术语下定义,一定要保证名称或术语的内涵和外延都恰当,既不能含糊不清,模棱两可(如用“好像”、“大概”、“差不多”、“类似”等语句),又不能使其含义出现偏差或歧义,同时语句必须清晰明了,不能啰嗦.

[例5] 写出下列命题的逆命题,并判断逆命题的真假,如果是假命题,请举出一反例.

(1)如果两个角是同角或等角的补角,那么这两个角相等.

(2)如果两个有理数相等,那么它们的平方也相等.

(3)全等三角形的对应边相等.

(4)到一个角的两边的距离相等的点,在这个角的平分线上.

[点拨] 要正确地写出每个命题的逆命题,必须分清每个原命题的题设和结论.判断一个命题是真命题,它必须符合某个定义、公理或定理或者能由它们证得,判断一个命题是假命题,只要能举出一个反例即可.

[解答] (1)逆命题是:如果两个角相等,那么这两个角是同角或等角的补角.它是一个假命题,例如:如图 1-1-1, $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$,显然 $\angle A = \angle A'$,但 $\angle A$ 与 $\angle A'$ 并非是同角或等角的补角.

(2)逆命题是:如果两个有理数的平方相等,那么这两个有理数相等.它是一个假命题,例如: $(-2)^2 = 2^2$,但 $-2 \neq 2$.

(3)逆命题是:如果两个三角形的三边对应相等,那么这两个三角形全等.它是一个真命题,即是边边边公理.

(4)逆命题是:在角的平分线上的点到这个角的两边距离相等,它是一个真命题.

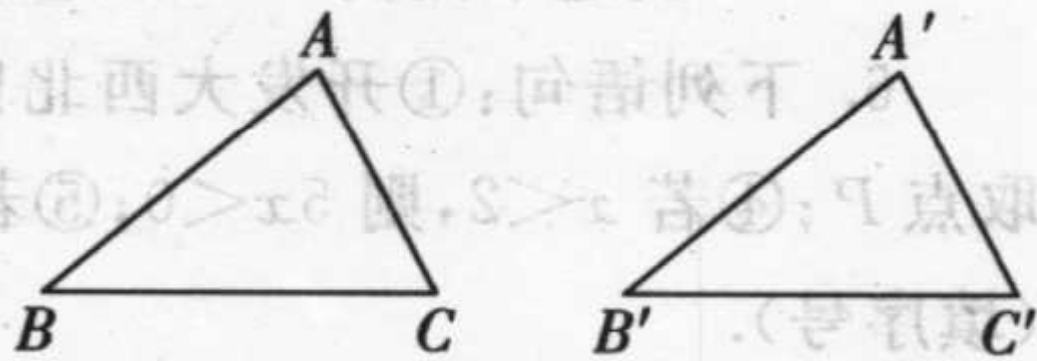


图 1-1-1

