

课堂教学方法与艺术实用丛书 ⑮

于明 主编

数学学习

方法指导



课堂教学方法与艺术实用丛书 (35)

数学学习方法指导

于 明 主编

国际文化出版公司

《课堂教学方法与艺术实用丛书》编委会

主 编	于 明		
副主编	王波波		
编 委	田晓娜	王波波	冯克诚
	于 明	杨邵豫	陈遵平
	周德明	崔雪松	孙永清

目 录

数学课业学习是模型学习	(1)
数学课业学习是数学语言的学习	(2)
有意义内化数学学习	(3)
数学接受学习	(5)
数学发现学习	(8)
数学学习的抽象性和逻辑性	(10)
数学能力的成分及其测试方法	(12)
附：数学学习学习习惯序列及其培养	(14)
数学课业学习的基本环节	(18)
数学学习的基本过程	(18)
数学课业学习的原则与基本方法	(20)
数学启导自学法	(23)
中学数学“自学辅导学习指导法”	(25)
五阶段单元学习指导模式	(26)
小学数学“五段自学辅导”法	(36)
初中数学“二级自学辅导法”	(41)
三环节二次强化自学辅导法	(44)
数学课文预习方法	(48)
数学教材“三读”法	(50)
阅读数学课本的习惯培养	(54)
学习数学概念的两种基本课堂模式比较	(55)
数学概念学习十六法	(57)

数学定义学习的步骤和方法	(63)
数学命题学习的步骤方法	(70)
数学例题学习的步骤	(74)
小学书面练习“五步”法	(77)
附：满负荷“立体式”数学作业模式	(78)
附：数学练习的“六性”要求	(81)
数学解题检验十四法	(83)
简便运算的八式	(90)
良好的计算习惯培养四法	(91)
复合文字题解题思路训练八法	(93)
验算应用题能力的培养	(98)
解应用题的六种基本思路	(100)
小学生查错习惯培养	(104)
数学知识记忆十七法	(105)
数学复习的常规方法	(114)
附：问卷引导复习法	(117)
教材复习六法	(119)
数学问题解决的心理分析	(125)
小学数学思维训练的八种类型	(127)
数学思维的一般程序策略	(131)
暴露思维过程的一般方法	(134)
“一题多解”的成因及功能	(136)
审题与分析策略十法	(138)
数学归纳法证题步骤与技巧	(144)
推广与归纳中的退缩策略	(150)
数学类比推理方法	(155)

数学课业学习是模型学习

数学的研究对象是客观世界的纯关系、形式和结构，它毫无任何物质性和能量特征，是完全脱离了事物的物质内容的高度抽象物，即数学模型。因此，很自然地，数学学习的直接对象应当而且必须是数学模型。

中学数学就是一个为当代青少年基础教育服务的具有基础性、综合性和发展性等诸多特点的较为复杂的数学模型，它是由经过精选和教法方面加工的若干相互关联的子模型构成的。每个子模型又由若干相互关联的模型块构成。这样形成的中学数学知识系统，具有确定的结构，可以发挥良好的教育功能，对中学生来说，有很高的学习价值。

因此也可以说，中学生数学学习的过程也就是在他们原有的认知结构的基础上建构数学模型的过程。必须循序渐近，要从小的简单的数学模型学起，如每个数学概念、表达式、公式、函数、方程式、不等式、几何图形和定理，都是较小的数学模型。然后逐步掌握较大的数学模型。大的模型并不是一些小模型的简单凑合和堆砌，而是一种整合。在中学数学中，若干小模型总是被整合到一个更大更复杂的模型中，在小模型之间增加了更多的关系和联系，使得这些小模型比原来更充实和完善。例如，方程、不等式与函数的关联，就是一个极富有说服力的例子。

数学学习是数学模型的学习，意味着学习者要不断地对已掌握的数学模型进行建构，这些数学模型只是暂时地不变

动。否则，知识就不确定，学习就无法进行。然而这里强调建构表明，不论是原结构还是新结构都不会和初学时保持一样，它们是不断地变化和发展，不断地变得更加充实和完善。因此，数学学习者不能只谋求知识总量和增加，还要追求知识的质的变化。这就要求学习者在学习过程中不断地加强理解与沟通，扎扎实实，循序渐进。

因此，数学学习的对象首先应当是数学基础知识、基本理论的学习。显然该特征对中学数学教学具有重要指导作用。正如我们所看到的，如今的数学教育有许多值得强调的东西，譬如，我们有时强调理论联系实际，有时强调问题解决，有时强调智能发展，有时强调素质培养等等。但是这些方面在数学学习中显然都不能脱离数学基础知识、基本理论的掌握来实现。

数学课业学习是数学语言的学习

数学学习活动基本上是数学思维活动，而数学语言是数学思维的工具，所以掌握数学语言是顺利地、有成效地进行数学学习活动的重要基础之一。学习者应当把数学语言的掌握同数学知识的学习紧密地结合起来，将其视为数学学习的重要组成部分。

学习者应当从语义和语法两方面去学习数学语言，既要明确符号的意义又要掌握使用它的方法和规则。学习者还要在书面上、口头上学会运用有关的数学语言，经常注意运用它表述、阐释和回答数学问题，并正确运用它认真完成数学

作业。

对于中小学生而言，学习数学语言、学习数学的形式化，应当是适度的、渐近的。中学阶段数学语言的学习应当是形式化与非形式化的有机结合。

有意义内化数学学习

学生在课堂里所学到的书面知识，是由语言文字或其他符号表示的。学生的学习任务实际上是双重的，既要掌握一整套符号体系，又要掌握符号所代表的实际内容。如果学生把这两方面的任务都完成了，这就是意义学习；如学生只记住符号本身，而不了解或不完全了解符号所代表的实际内容，那就是机械学习。

数学非常尊重逻辑并运用逻辑来组织，使得数学高度严谨，有很强的系统性。此外，在一个数学知识系统中，各知识点、块之间有着确定的内在实质性关联。这些特点决定了数学学习应当而且必须是注重知识内在关联的系统化的学习。这恰好与进行有意义学习所必须的外部条件相符合。数学有意义学习可以是接受学习也可以是发现学习，不论进行何种有意义学习，都需要学习者具有有意义学习的心向，积极主动地思考，在知识的实质性关联中加深理解，把握知识的来龙去脉，只有这样，学习者才能形成良好的数学认识结构。

有意义内化的心理过程

数学理论的有意义内化要经历两个阶段。第一阶段，学

生首先意识到数学理论的内容，即数学理论在认知结构中进行“登记”；然后开始考虑它的逻辑依据，这样新理论与原有的有关内容就开始发生联系；最后要寻求得到这一理论的思维过程，这意味着，新理论要转化为个人参照系，使得与本人的数学认知结构趋于和谐。第二阶段乃是数学理论的应用和保持，即在不同具体情景中应用数学理论，获得反馈信息，以加深对它的理解。在理解了抽象的意义之后，把它“转移”到自己熟悉的、联系密切的、浅显直观的事物中去，即由抽象到直观（这种直观是数学的抽象直观）。正是通过这一阶段，才能实观数学理论抽象意义的直觉性保持。与有意义内化相对的是数学理论的机构内化，即新理论与认知结构的原有理论建立起一种任意的、逐字逐句的联想。

有意义内化学习应该具备两个先决条件：

一是学习材料本身必须具有潜在的意义。“潜在的意义”是相对具体学习者而言的。比如“心理学”这个词，对我们来说，是有意义的，但对学龄前儿童来说，却是无意义的。也就是说，任何有意义的学习材料，如果学习者不具备理解它的生理或心理条件，那它对这个学习者而言，仍然是一个无意义的东西。从这个意义上讲，任何学习材料所具有的意义，都是潜在的，只有被学习者所真正理解，才能转换为观实的意义。

二是学习者必须具备进行意义学习的心理意向。也就是说，学习者进行有意义学习时，必须有一种积极主动的思维状态，积极努力把新知识同自己的原认知结构融为一体。

对教材进行意义学习应该注意以下几点：

(1) 要注意分析寻找新知识与学生原有知识基础的联系

点。前面说过，任何学习材料都具有“潜在意义”，只有当学习者具备能够理解它的条件时，才具有实质性的意义。如果不具备这个条件，那么就要变成机械学习。这个条件就是学生能否把新知识同自己的原有知识基础联系起来，寻找这种联系点或联系办法。例如幼儿学乘法口诀，如果不只是使幼儿记住“三七二十一”这个口诀，而是摆三堆水果糖，每一堆都是7个，再告诉他这三堆水果糖加起来一共有21个，这就是“三七二十一”。那他对“三七二十一”的学习就可能是意义学习了。

(2) 要重视对教材整体关系的了解和掌握。教材的编排是以“课”为单位组成“单元”的，又以“单元”为单位组成全册教材的。课与课之间，单元与单元之间存在着种种知识联系。不清楚各课和各单元之间的联系究竟在什么地方，每学一种新知识，就不容易找到与旧知识的联系点，势必加强了机械学习的倾向。因此，要注意弄清楚每一课之间的内在联系，能真正把前课作为后课的基础，新旧知识能充分地衔接起来，这才能促进意义学习，提高学习和记忆效果。

(3) 要调动进行意义学习的心理意向。有没有进行意义学习的心理意向，是促进意义学习防止机械学习的关键因素之一。事实上，确有很多学生并不是没有能力掌握知识，而是不善于思考，只想逐字逐句地记住它能应付考试就行了。

数学接受学习

1. 数学接受学习的概念

根据奥苏伯尔的观点，一般认为，接受学习的特点是：要

学习的全部内容是以定论形式呈现给学习者。这种学习任务不涉及学习者方面的任何独立的发现，只需要他们将材料如一首诗或一条公理那样加以内化，以便日后的某个时刻可以再现并运用。

(1) 这里所说的“内容”：按一般的理解，所谓“内容”，是指现成的结论性知识。例如，一个概念的定义，一个定理的文字叙述，一个方法的程序等。这种理解对于数学学习来说是不全面的。事实上，在课堂教学中，对学生而言，数学知识内容具有两方面的含义：(i) 结论性的数学知识（称之为数学理论）——概念的定义、定理的文字叙述和逻辑证明的文字表达、方法规则的程序等；(ii) 围绕着数学理论而进行的一切数学活动（称之为数学活动）。在接受学习中，数学理论总是通过一定的数学活动而呈现在课堂上，这种活动对教师来说未必是客观的，但对学生来说，就完全是客观的知识性的东西了，而且也是学生应当接受的。

(2) “定论形式”：对于数学理论来说，如何理解“定论”形式呢？比如，对于定理“三角形内角和等于 180° ”，所谓以定论表式呈现给学习者，是不是意味着，直接把这个定理告诉学生就完事了呢？

在数学接受学习中，所谓把数学理论以定论形式呈现给学生，意味着从总体上说，数学理论不是以学生自己的发现为主要方式而获得的。但“呈现”绝不仅仅是孤立地呈现“结论”。数学理论必然处于一定的系统中，呈现就是要把数学理论连同它的来龙去脉呈现出来。

在呈现数学理论的同时，呈现者的行为本身就构成了一种数学活动，这便是数学活动的呈现。

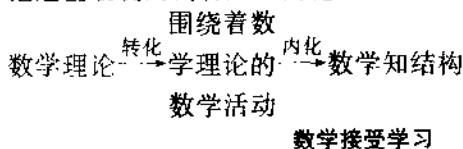
(3) “不涉及学习者方面的任何独立的发现”：这里的发现是指一种活动，因而就有内外之分，即内部发现活动与外

部发现活动。在数学接受学习中，所谓“不涉及学习者方面任何独立的发现”，实际上是指不涉及学生方面的外部发现活动。事实上，在接受学习中，学生不是外部活动的主体，但这并不意味着学生的内部活动也不存在任何发现过程。实际上，第一，学生在接受学习过程中，内部的思维活动可能是紧随着呈现者的外部活动而进行的，因而就有可能有发现的过程；第二，学生在有意义接受学习中，其内化过程必然要经历一个自我发现的过程。

(4)“内化”：一般认为，“所谓内化，就是新旧学习材料的内容有机地结合。”（邵瑞珍等编著《教育心理学——学与教的原理》）所谓“有机”，是指事物构成的各部分互相关联协调，而具有不可分的统一性，就象一个生物体那样。既然这里用了有机，那就意味着建立起非人为的实质性联系。如果是这样，那接受学习必定是有意义的，因此，把接受学习划分成机械的和有意义的就没有什么意义了。因此，可以说，内化就是一种过渡（转化），通过这种过渡，新旧材料在认知结构中建立起某种联系，并得以贮存下来。这样，内化才有机械和有意义之分。

2. 数学接受学习的心理过程

在接受学习中，数学理论首先被转化成一定的数学活动而呈现出来，比如由教师讲解或者由课本书面描述等。学生把这些呈现的内容加以内化。



有意义接受学习的条件是：

(1) 数学理论有潜在意义，即数学理论本身具有逻辑意义，并且学习者认知结构中又具备适当的知识基础。

(2) 学生具备有意义学习的心向，即学生有积极主动地把新材料与认知结构中原有的适当内容加以联系的倾向性。

(3) 内化过程是有意义的。接受学习中，数学理论和数学技能的有意义内化仅仅限于有意义内化的第一阶段。

数学发现学习

1. 发现学习的概念

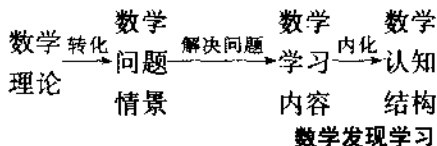
发现学习从提出至今已有很长的历史了，其中经历了蓬勃发展的时期。虽有不少心理学工作者对它作了广泛、深入的研究，又有很多学校在实际课堂教学中加以运用和推广。但是究竟什么是发现学习，却向来歧义纷呈，连发现法的倡导者布鲁纳本人所下的定义也几度变迁，而且他所指出的发现学习的内涵也不够清楚。布鲁纳曾列述了发现学习的若干特征，但其中有些特征其实是发现学习和接受学习两种方式所共有的。

现在一般认为，发现学习的主要特点是不把学习的主要内容提供给学习者，而是由学习者独立发现，然后内化。换言之，在发现学习中，学习者的优先任务是有所发现。

2. 数学发现学习的心理过程

发现学习的心理过程是一个极为复杂的过程，在课堂学习中，学习内容首先被转化为一种问题情景，然后学生通过

解决问题而获得学习内容，并加以内化。



有意义发现学习的条件是：

(1) 问题具有潜在意义，即数学认知结构中的理论知识对解决面前的问题是充分的。

(2) 学生具有有意义学习的心向。

(3) 解决问题的过程是有意义的。由于解决问题的心理过程是很复杂的，因此，如何确定解决问题的过程是有意义的，还是一个尚待解决的问题。但是，可以肯定地说，并非一切解决问题的过程都是有意义的。例如，在许多情况下，学生对解决问题过程中所涉及的概念法则和定理没有理解，只要记住问题的类型就可以完成这一过程。难怪许多学生对一些涉及基础知识的题解决不了，但对有些难题却解得很顺手。这和在物理学中可以不懂有关概念和原理只要按照操作程序进行操作，同样可以解决某些高难问题一样。总之，要使解决问题的过程成为有意义的，首先必须建立在真正理解概念、原理、原则的基础上，必须使构成操作的各部分成为有意义的。

(4) 内化过程是有意义的。在发现学习中，有意义内化包括两个方面：(i) 对发现学习中所涉及的所有已知的数学理论、技能和活动经验的继续内化。(ii) 对在发现学习过程中得到的新的数学理论、技能和数学活动经验的有意义内化。这一内化过程与接受学习中的有意义内化类似。

应当指出，在发现学习中，部分内容的内化过程是伴随着发现的进行而进行的，并非一切内容都是等到发现完成以后再内化。

数学学习的抽象性和逻辑性

抽象性是一门科学均具有的共性。然而，数学的抽象和其他自然科学不一样。在数学的抽象中，仅仅保留了对对象的量的特征，而完全舍弃了它们的质的内容。而且其抽象程序远远超过了自然科学中的一般抽象。例如对于自然数的认识：

1, 2, 3, ..., 101, 102, 103, ..., 1001, 1002, 1003,
...

无限制地继续下去时，相应的数距我们越来越远。很远很远的大数是决不可能由真实事物中直接抽象出来的，而只能依靠人的想象。这种想象的数，实际上是人的思维的产物，把它看成是一种“理想元素”。类似地直线的无限性，极限，有理数的稠密性，实数的连续性等概念，也都是理性思维的结果，不可能直接为人们所感知。

然而，实践是检验真理的标准，随着科学的发展和人们认识的深入，到了19世纪，高斯给出了复数（虚数）的几何表示，帮助人们直观地理解了它的真实意义，随后又在流体力学中得到了应用。在数学和其他科学中复数日益起着不可估量的作用，在19世纪中叶以后遂发展成一个庞大的数学分支——复变函数论。由此可见，理想元素对数学及科学实践

所起的积极作用。一般说来，随着数学的发展，理想元素在数学中占据着越来越重要的位置。正如数学史家 M. 克莱因所指出：1700 年以后，越来越多的、更远离自然界的、从人的脑子中源源不断地涌出的概念，进入了数学。它们逐渐取代了那些“直接观念性”的概念，并在数学中占据了主导地位。列宁曾指出：幻想是极其可贵的品质，有人认为，只有诗人才需要幻想，这是没有理由的，这是愚蠢的偏见！甚至在数学上也需要幻想的，甚至没有它就不可能发明微积分。

由于数学研究对象的抽象性，就决定了数学学习的抽象思维特征，这种抽象性，当尚未熟悉它的思维方法时，似乎感到很难把思维特征也是可以办到的。只要我们通过初等数学、高等数学课程的认真学习，仔细体会它的概念和论证方法的抽象特征，自觉学习、运用这种思维方法来思考和分析问题，经过一段时间的训练，便可逐步培养起这种抽象思维能力。

借助于逻辑学的帮助而建立起来的数学体系，具有一个突出的特点，就是它在逻辑上的严密性。无论是在高等数学还是初等数学中，严密性都是至关重要的。虽然严密性是相对而言的，它随着科学及数学的发展在变化着。过去被大数学家认为是严密的证明，今天却因其不完善而被抛弃的情形也屡见不鲜。然而，严密性的要求毕竟在始终不断推进着数学研究的向前发展，它使数学（特别是在数学基础方面）在实质上和在面貌上发生了很大的变化。基于这种意义，可以认为，现今以一组不证明的命题、一组不定义的术语为基础的公理数学，才是最严格最广泛最抽象的科学体系。

今天，我们在大学或中学中学习数学，虽然没有必要过

分强调演绎论证的训练,但必要的逻辑推理训练是不可少的,因为它是创造性数学思维中不可少的工具。

数学能力的成分及其测试方法

1. 数学能力的成分

实验证明,数学能力有如下成分:

(1) 注意能力——在数学活动中,对数学材料数学关系和数学问题及思维过程和情感体验的注意能力;

(2) 观察能力——对用符号、字母、数字所表示的或文字所表示的数学关系式、命题、问题及对图表、图象或几何图形的结构特点的观察能力;

(3) 记忆能力——对符号、数字、数学关系式、逻辑模式和图象、几何图形的记忆能力;

(4) 联想能力——在解决数学问题的过程中,从已知信息中产生和选择达到目标的信息的联想能力;

(5) 概括能力——抽象概括各种数学对象,对各种数量关系和空间关系及运算方法的能力;

(6) 迁移能力——是指人们已经获得的数学知识、技能、方法和态度,对学习新的知识、技能、方法和态度起促进作用的能力;

(7) 运算能力——在运算过程中,要求达到简捷、灵活、合理、正确的能力;

(8) 逻辑思维能力——对已有的数学信息运用数学推理的思维方式进行具体思维(动作思维和形象思维)与抽象思