

中学数学自学辅导教材 (修订二版)

代 数

第二册 (一) 课本

中国科学院心理研究所 卢仲衡 主编



地 质 出 版 社

0122
42:3

统一书号：7038·新158
定 价：1.00元（共三册）
书 号：129—392

中学数学自学辅导教材（修订二版）

代 数

第二册 （一） 课本

中国科学院心理研究所 卢仲衡 主编

北京海淀区教师进修学校 张士充 审阅

地 质 出 版 社

内 容 简 介

本套教材按照中学数学教学大纲的要求编写，经教育部批准公开出版发行，全套书共包括代数四册、几何两册以及配套使用的练习本和测验本，程度和内容基本和人民教育出版社编的初级中学数学课本一致，但富有学习心理学特点，能激发学习者的兴趣、自信心和主动精神，同时，便于因材施教和自学成才。本教材自1965年开始试用，进行过多次修订。本版本又在1983年修订版的基础上进行了校勘订正。目前，自学辅导教学法已在全国二十八个省、市、自治区的部分中学推广实验，在培养学生自学能力、形成自学习惯、自学能力迁移和学科全面发展方面的效果显著。本套教材可作为正式中学的实验课本，也可以在教师指导下用于自学，又是同年级学生课外阅读和社会青年、青工、干部等自学的良好读物，同时，对中学数学教师和教研人员亦有一定的参考价值。

中学数学自学辅导教材（修订二版）

代 数

第二册（一）课 本

中国科学院心理研究所 卢仲衡 主编
北京海淀区教师进修学校 张士充 审阅

责任编辑：张 珊 赵 棣

地质出版社出版

（北京西四）

沧州地区印刷厂印刷

（沧州市西环中街82号）

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

开本：787×1092¹/₃₂ 印张（共三册）：22⁵/₈ 字数：498,000

1985年9月沧州修订二版·1985年9月第一次印刷

印数：1—200,085册 定价：3.00元（共三册）

统一书号：7038·新158

前 言

一、中学数学自学辅导实验教材是1965年由中国科学院心理研究所卢仲衡根据人民教育出版社课本内容，运用九条有效的学习心理学原则并结合我国优秀教师的教学经验，首次编写出的一种自学教材。使用这套教材的教学过程，由我国著名心理学家蔺菽先生定名为“自学辅导教学”。

开始，这套教材每册有三个本子，一是课本，一是留有空白让学生做题的练习本，一是答案本，当时曾称“三本”教学（现在已把答案附在课本后面，增加了一个小测验本，即没有答案的练习题本）。1966年初在北京市女六中和西四中学与常规教学班级进行对比实验，效果略优于对比班，学生的学习时间对比比班缩短四分之一以上。后由于十年动乱，实验被迫停止。1973年至1974年重新在北京一七二中和三中进行实验，在连续一年半的实验中，不仅获得与1966年实验的同样效果，而且学习者自学能力成长的速度对比比班快多了。但是在“四人帮”的干扰破坏下，实验无法深入下去。1978年以来，在上级领导和各方面的支持下，我们又恢复并逐步扩大了实验，现已在全国二十八个省、市、自治区的几百个班级进行实验。由于使用这套教材的教学特点是在教师指导、辅导下以学生的自学为主，能充分调动学生的学习积极性和主动性，绝大多数实验班的学生在学业成绩、自学能力成长、自学能力迁移和学科全面发展四个指标上都取得了良好的效果。

1983年中国科学院心理研究所组织专家进行鉴定，结果表明，中学数学自学辅导教材和自学辅导教学法不仅确能提高实验班学生学习数学的能力，而且完全适用于青年自学和各种形式的成人教育。

二、使用这套教材做实验时，教师启发、指导、提问、答疑和小结等平均每课时约占10分钟左右的时间，而且这些活动都是在课时开始或结束前进行的，中间约有30分钟至35分钟让学生集中精力粗、细、精地阅读课本内容，接着做练习和对答案，中间不打断学生的思路，以便让快者快学，慢者慢学。学生学完老师规定的进度之后，可以自学参考书或人教社编的课本。学生自学时，老师可以巡回视察学生的学习情况并辅导差生。学生做练习，应在做完一大题所包含的全部小题以后再对答案，而不要做一小题就对答案，以免造成思维步子过小，影响思维能力的成长；但也不要全部做完一个练习再对答案，这样容易出现连锁性的错误（具有较好的数学才能的学生可以做完一个练习再对答案）。本套教材的使用方法详见《教育研究》1982年第11期“怎样进行自学辅导教学实验”一文，或看卢仲衡编的《中学数学自学辅导教学实验文选》第一集的最后一篇。

三、为了便于老师和学习者检查对自学教材的掌握程度，每学完一个小单元（几个练习）之后，就有一个小测验，测验题单独装订成册，由教师掌握。小测验是没有答案的，学生做完后交老师批改。个人自学的，可以互改或找高年级的学生帮助批改。每个小测验几乎都包含概念题、基本题、变式题和思考题（教师可以根据具体情况来增删），这样可以全面了解学习者掌握知识和思维能力发展的情况。教师对小测验题要认真详细地批改。对于多数学生没有掌握的

某类型题或带有普遍性的错误，老师可以进行复习性的讲述，务须使绝大多数学习者弄懂为止。对于个别学习者出现的错误，则可在课上或课下进行个别辅导，不必进行全班讲述，以免影响大多数学生的时间。

四、练习本中间编有选作题，这是为那些精力有余、时间充分、喜欢探索的同学们准备的。感到学习吃力、时间不足的同学可以不做或少做。这些题目比较繁难，带有“*”号的题更难，学习者最好量力而为，否则不仅无益反而有碍于正常的学习。

五、这套中学数学自学辅导教材是参照人教社编的数学课本，经过改写、重写而成，1983年根据人教社最新版本的初级中学数学课本进行了修订。这次又对全书的文图做了校勘订正。代数第一册由卢仲衡、宋同率编写，曾请严以诚、孙嘉谟等同志提过宝贵意见，特此致谢。由于水平所限，错误之处定然不少，请批评指正。

中国科学院心理研究所
数学自学辅导教学实验组

1985年6月

目 录

第五章 二元一次方程组	1
5.1 问题的提出.....	1
5.2 二元一次方程和它的解.....	3
5.3 二元一次方程组和它的解.....	7
5.4 二元一次方程组的解法.....	10
(一) 代入消元法.....	11
(二) 加减消元法.....	15
5.5 三元一次方程组.....	24
5.6 列方程组解应用题.....	30
小 结.....	37
第六章 整式乘除法	39
一、整式的乘法	39
6.1 同底数幂的乘法.....	42
6.2 幂的乘方.....	45
6.3 积的乘方.....	47
6.4 单项式乘法.....	50
6.5 单项式与多项式相乘.....	54
6.6 多项式乘以多项式.....	57
二、乘法公式	64
6.7 平方差公式.....	65
6.8 两数和与两数差的平方公式 (统称完全平方公式).....	69
(一) 两数和的完全平方公式.....	69
(二) 两数差的完全平方公式.....	70

6.9 两数立方和与立方差公式	72
三、整式的除法	77
6.10 同底数幂的除法	77
6.11 单项式除以单项式	80
6.12 多项式除以单项式	82
6.13 多项式除以多项式	83
小 结	86
第七章 因式分解	88
7.1 因式分解的意义	88
7.2 提取公因式法	89
(一) 提取公因式是因式分解的一种方法	89
(二) 怎样确定公因式	91
(三) 提取公因式的步骤	92
(四) 当公因式为多项式时提取公因式的方法	93
(五) 改变原多项式某项因式的形式后, 提取公因式	95
(六) 复习提取公因式一节的内容	98
7.3 应用公式法	100
(一) 平方差公式	101
(二) 立方和与立方差公式	103
(三) 完全平方公式	105
(四) 公式中的字母代表多项式	107
(五) 五个因式分解的公式及因式分解的一般步骤	109
7.4 可化为 $x^2 + (a+b)x + ab$ 型的二次三项 式的因式分解	112
7.5 分组分解法	120
(一) 四项式的分组分解法	120
(二) 拆项或添项分组分解法	127
(三) 复习分组分解法	132

7.6 总复习	134
(一) 因式分解的意义	134
(二) 提取公因式法	134
(三) 应用公式法	135
(四) 常数项分解法	136
(五) 分组分解法	137
(六) 按步骤想题	138
(七) 利用因式分解化简和解方程	140
(八) 应用题举例	142
7.7 因式分解的选学项目	144
(一) 十字相乘法	144
(二) 利用十字相乘法分解可以化成二次三项式的式子	146
(三) 五项式的分组分解法	148
(四) 六项式的分组分解法	149
小 结	151
第八章 分式	154
8.1 分式	154
8.2 分式的基本性质	157
8.3 约分	163
8.4 分式的乘法	170
8.5 分式的除法	172
8.6 分式的乘方	175
8.7 最低公倍式	178
8.8 通分	181
8.9 分式的加减法	187
(一) 分母相同的分式的加减法	187
(二) 分母不相同的分式的加减法	189
8.10 繁分式	195

8.11 含有字母已知数的一元一次方程·····	193
8.12 可化为一次方程的分式方程·····	201
8.13 分式方程的应用题举例·····	203
小 结·····	211

练习题答案

第五章 二元一次方程组·····	214
第六章 整式乘法·····	234
第七章 因式分解·····	260
第八章 分式·····	284

第五章 二元一次方程组

5.1 问题的提出

在第三章里，学到一元一次方程解应用问题时，做过下面类型的题目。

问题 1 一年级的一、二两班共有学生98人。又知二班比一班多4人，问每班各有多少学生？

这个问题中有两个未知数：一班学生人数和二班学生人数。同时也有两个条件：①两班学生人数之和等于98；②二班学生人数与一班学生人数之差等于4。当时我们解这类问题时，是根据条件之一（如①）得等量关系：

二班学生数 + 一班学生数 = 学生总数。

再利用另一条件（如②），把一个未知数用另一个未知数表示出来：

二班学生数 = 一班学生数 + 4。

这样，只须用一个字母 x 表示未知数，即一班学生人数，则第二个未知数——二班学生人数，就可用含 x 的代数式 $x + 4$ 表示出来了。于是可把根据条件①得出的等量关系写成含有一个未知数的等式：

$$x + 4 + x = 98,$$

即列出一个一元一次方程再求解，求得一班学生数为47人，二班学生数为51人。

现在要问，为什么不用两个字母分别表示两个未知数

呢？如用 x 表示一班人数， y 表示二班人数，并把两个条件所表明的两个等量关系：

$$\text{一班学生数加二班学生数} = 98,$$

$$\text{二班学生数减一班学生数} = 4,$$

分别写成含未知数的等式，则有：

$$x + y = 98, \quad (a)$$

$$y - x = 4, \quad (b)$$

可以看出，设一个未知数列一个一元一次方程来求解，不如设两个未知数，列这样两个方程来得直接，容易考虑。

下面我们再看问题 2。

问题 2 买 3 公尺毛呢和 4 公尺的确良用 91 元，买 2 公尺同样的毛呢和 5 公尺同样的的确良用 77 元。问毛呢每公尺多少元？的确良每公尺多少元？

对于这个问题，可以用 x 表示 1 公尺毛呢的价值，用 y 表示 1 公尺的确良的价值，把题中两个条件所给出的两个等量关系写成两个含未知数的等式：

$$3x + 4y = 91, \quad (c)$$

$$2x + 5y = 77. \quad (d)$$

这的确比列出一个一元一次方程简捷明了得多（有兴趣的同学可用过去的办法列出一个一元一次方程并求解，答案是毛呢每公尺 21 元，的确良每公尺 7 元）。

以上的想法很好。但是，这样得到的含有未知数的等式 (a) 与 (b)、(c) 与 (d) 中的任一个，叫做什么方程呢？(a) 和 (b) 为一组，(c) 和 (d) 为另一组，每组的两个方程之间又有什么关系呢？能够从 (a) 和 (b) 一组求出问题 1 的解答，从 (c) 和 (d) 一组求出问题 2 的解答吗？

这些问题提出来了，下面将一个一个一个地去解决。现在我

们先做一些练习，为以下的学习和解决上面那些有意思的问题作必要的准备。

(翻开练习本做练习一)

5.2 二元一次方程和它的解

前面(a)和(b)、(c)和(d)是四个含有未知数的方程。单独看每一个等式，都含有两个未知数，而且含有未知数的项的次数都是1。过去说过，方程中的“元”指的是未知数，“次”指的是含未知数的项的次数。因此，把含有两个未知数并且含有未知数的项的次数都是1的等式叫做二元一次方程。所以，(a)、(b)、(c)、(d)中的每一个方程，都是一个二元一次方程。

学习一元一次方程时，我们把适合一元一次方程的未知数的值，叫做一元一次方程的解，并且知道，任一个一元一次方程都有且只有一个解。那么一个二元一次方程是否有解呢？什么叫作它的解呢？下面，我们以问题1中的方程(a)为例来讨论这个问题。

方程(a)为：

$$x + y = 98.$$

它在问题1中的实际意义是等量关系：

一班学生人数 + 二班学生人数 = 学生总数。

一般意义是：两数之和等于98。那么满足这个条件的两数是只有一对呢，还是有许多对？显然不止一对，可以随便列举，如：1和97，2和96，等等。既然不止一对，怎样把所有能满足条件的“数对”一对对地都求出来呢？

应用方程同解原理，我们曾把一元一次方程都变成

$ax = b$ ($a \neq 0$) 的形式, 并从而解出 $x = \frac{b}{a}$, 即用已知数把未知数 x 表示出来。用样, 应用方程同解原理, 也可以把方程 (a), 即 $x + y = 98$ 变成

$$y = 98 - x.$$

在这个方程里, 如果 x 取一个值, 就可以求出与它对应的 y 的一个值。例如:

$$\begin{cases} x = -1, \\ y = 99; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = 97; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2.5, \\ y = 95.5; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 100, \\ y = -2. \end{cases} \dots\dots (I)$$

显然, 把上面每一组 x 与 y 的值代入方程 (a), 都能使等式成立, 也就是都适合 (或满足) 方程 (a)。对于方程 (b)、(c) 或 (d), 也都有类似的情况。

我们称能够适合一个二元一次方程的一对未知数的值, 叫做这个二元一次方程的一个解。

上面我们已求出了方程 (a) 的一些解, 显然, 由于 x 可以取任何数, 并且 y 都能得到相应的数, 因此, 这样的数对是有无限多个的。所以一般来讲, 一个二元一次方程是有无限多个解的。所有的这些解构成一个以数对为元素的集合, 称为二元一次方程的解集合。

注意: 二元一次方程的每个解, 都必须如前面 (I) 式中那样记法, 因为两个数配成一对 (或一组) 才是方程的一个解, 并且所谓“对”、“组”中的两个数, 是有顺序的。如对方程 $x + y = 98$ 来说

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 98, \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} x = 98, \\ y = 0, \end{cases}$$

是两个不同的解。用上面的记法, 就既能表明一个解是一对 (一组) 数而不是一个数, 又能表明这对数中第一个是 x 的

值，第二个是 y 的值，是有顺序的。

(翻开练习本做练习二)

一般一个二元一次方程都有无数个解。但是在列出二元一次方程解应用问题时，实际问题的解却不一定是无数个了。这是因为除了给出的等量关系的条件外，常常还有没有明显地提出的条件，解题时必须注意到这种条件，培养自己观察和审题的能力。请看下面的问题。

例1 长4米与长7米的钢筋共有5根，问两种长度的钢筋各自可能有几根？

分析：两种钢筋的根数之和等于5，可根据这个等量关系列方程。但还有两个没明显提出的条件，即每种钢筋的根数都必须为正整数，且它们都必须小于5，因此在解方程时，未知数的值就不能是没有限制的。

解：设4米长的钢筋有 x 根，7米长的钢筋有 y 根。根据题意得方程：

$$x + y = 5.$$

注意到 x 必须取小于5的正整数，即 x 只可取1、2、3和4，把它们分别代入方程，可求得 y 的对应值分别是4、3、2和1。

∴ 方程的解是

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 4; \end{cases} \begin{cases} x = 2, \\ y = 3; \end{cases} \begin{cases} x = 3, \\ y = 2; \end{cases} \begin{cases} x = 4, \\ y = 1. \end{cases}$$

答：长4米的钢筋和长7米的钢筋的根数分别可能是：

- (1) 1根和4根； (2) 2根和3根；
(3) 3根和2根； (4) 4根和1根。

单就方程 $x + y = 5$ 说，有无数个解；而这个问题把根数限制在小于5的正整数范围内，因此，只能有上面4个解。

例2 一个正两位数加上27，它的个位数字和十位数字就交换了位置，求这个两位数。

解：设个位数字是 x ，十位数字是 y 。

根据题意： $10y + x + 27 = 10x + y$ 。

整理得： $y = x - 3$ 。

y 不能小于等于0，因此 x 必须是大于3的数字，列表如下：

x	4	5	6	7	8	9
y	1	2	3	4	5	6

答：这个两位数是：14, 25, 36, 47, 58和69。

例3 在下列方程中，用含 x 的代数式表示 y ：

(1) $3x + y = 6$;

解： $3x + y = 6$

$\therefore y = 6 - 3x$;

(2) $5x - 2y = 6$ 。

解： $5x - 2y = 6$

$5x - 6 = 2y$

$\therefore y = \frac{5x - 6}{2}$ 。

注意：要求用含 x 的代数式表示 y ，则 y 的系数必须是1。

如例3的(2)必须写成 $y = \frac{5x - 6}{2}$ ，不能写成 $2y = 5x - 6$ 。

把新学的二元一次方程和过去学过的一元一次方程相比较，其共同点是：

(1)都是含有未知数的整式方程，都能根据方程的同解原理进行变形；(2)含有未知数的项的次数都是一次，即未