新世纪高等院校精品教材
浙江大学城市学院资助项目

微积分学教程（上册）

——面向独立学院理、工、经、管、医等专业

主编 莫国良 唐志丰

浙江大学出版社

新世纪高等院校精品教材·数学类
浙江大学城市学院资助项目

微积分学教程（上册）

——面向独立学院理、工、经、管、医等专业

主　编　莫国良　唐志丰

浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分学教程. 上/莫国良,唐志丰主编. —杭州:
浙江大学出版社,2005.8
ISBN 7-308-04365-7

Ⅰ.微... Ⅱ.①莫... ②唐... Ⅲ.微积分—高等学
校—教材 Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 084059 号

内容简介

本书是按照教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的基本精神,为独立学院高等数学课程而编写的教材。

全书分上下二册,主要内容包括:一元函数微积分、无穷级数、常微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微积分。按分平台教学需要,将内容编排成十七章。其中第一章到第十二章为第一教学平台,内容注重几何直观和应用计算,为独立学院学生学习微积分课程所必须掌握的知识;第十三章到第十七章为第二教学平台,内容注重逻辑性与思辩性,供数学爱好者或需进一步深造的学生选学。

本书可作为独立学院理、工、经、管、医类等专业高等数学课程教材,也可作为其他本科院校高等数学课程的选用教材。

出版发行 浙江大学出版社
(杭州浙大路38号 邮政编码310027)
(E-mail:zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址:http://www.zjupress.com)
责任编辑 徐素君
排　　版 浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷 杭新印务有限公司
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 17.5
字　　数 355千字
版 印 次 2005年8月第1版 2006年5月第2次印刷
书　　号 ISBN 7-308-04365-7/O·326
定　　价 26.00元

序

浙江省独立学院的兴起，已有六年历史。然而在这六年之中，微积分的教学，始终沿袭非独立学院的旧例，未见有相应的变化，致使教学脱节，效果不著，已成为时下独立学院微积分教学普遍存在的一个问题。浙江大学城市学院莫国良、唐志丰等老师经过这几年的实践与探索，对此感触颇深，决心从教学内容和课程体系入手，进行大胆革新。作为改革的一部分，他们编写了适合于独立学院使用的《微积分学教程》，并在学院内作了全面试用，取得了颇为令人满意的效果。

《微积分学教程》(上、下册)将微积分课程设计成两个教学平台，第一平台的内容只涉及微积分课程中最基本、最重要、学生务必力求熟练掌握的内容和方法，概念以“直观”导入为主，强调运算和在初等连续模型上的应用。鉴于第一平台的内容，已能保证后续课程学习之必需，所以对一部分学生，微积分的学习可以到此为止。第二平台的内容，则是在第一平台基础上，适当强调微积分的逻辑基础与推理过程，以此给学生以一定的“理”的训练，其选读对象则是数学基础较好，对微积分有兴趣并希望进一步提高的学生，但最后选读与否，完全由学生自主决定。

浙江大学城市学院微积分教学的改革，充分体现了以人为本的思想，他们针对独立学院学生数学水平参差不齐的特点，按照不同的层次，不同的要求，对他们进行个性化的培养，使绝大部分学生经过学习，都能在原有基础上有实实在在的进步与提高，真正起到因材施教的效果。这样的改革，既符合时代的精神，也符合社会的需要，是一件任重道远、意义深远的工作。

丁善瑞

2005 年 5 月于杭州

前　　言

在全球经济一体化与科学技术快速发展的国际环境中，世界各国都竞相制定人才开发战略，大力发展高等教育，努力提高人力资本水平，中国独立学院的快速兴起就是新一轮高等教育发展的历史性选择。但独立学院的发展要求与之相关联的各方面也要协调配套地发展，其中教材建设就是相当重要的一环。

微积分是人类智力创造的最大成就之一。它有两方面巨大的功能。其一，它是解决数学物理世界、经济社会领域、工程领域与生物科学领域中各种复杂问题的强有力的方法论工具；其二，它是锻炼与培养人类严密精确思维、逻辑抽象思维与几何直观思维的卓有成效的手段。正因为这样，一般普通高校的各个系都在新生一年级开设微积分课程。

国内外微积分的教材相当多，但能适应独立学院学生特点的教材却相当少，许多独立学院目前使用的教材常常是综合性大学多年来一直沿用的教材，这样的教材在内容的取舍和编排上与独立学院学生的特点不太适应。它主要表现在：内容往往大而全，学生常常只会机械地套用公式，学完即忘，没有很好地掌握微积分思想；有些内容过分繁复，学生一听就头痛；有些作业过分繁难，技巧性过强，学生望而生畏，兴趣大减。

为满足独立学院教材建设的需要，浙江大学城市学院在2003年专门下拨经费支持《微积分》等课程的教材改革工作，本教材就是在这样的前提之下着手编写完成的，从着手编写、试用到正式出版，历时两年。

本教材的改革思路是将传统的微积分内容分成两个平台，第一平台的内容称为“直观微积分”，它强调应用与直观，是微积分的基本内容，必须为广大学生所掌握；第二平台的内容称为“理性微积分”，它是从传统的微积分内容中剥离出来的，这部分内容强调逻辑与思辨，相对来说较繁难。学生在学习完第一平台的内容后可以不选学第二平台的内容而不影响后继课程的学习。这样做，对数学基础较薄弱的学生或对数学兴趣不大的学生来说减轻了压力，而对数学基础较好或对数学兴趣较大的学生来说，仍有发展的余地。

第一平台讲授的内容为：(一)函数、极限、连续；(二)一元函数的微分学；(三)一元函数的积分学；(四)无穷级数；(五)常微分方程初步；(六)矢量代数与空间解析几何；(七)多元函数的微分学；(八)多元函数的积分学。

第二平台讲授的内容为：(一)极限的精确化；(二)无穷级数续论；(三)多元函数的

微积分学续论;(四)二阶常系数微分方程;(五)近似计算。

讲授第一平台内容的总课时数约为 170 个课时,讲授第二平台内容的总课时数约为 50 个课时

本教材可作为理、工、经、管、医类等专业微积分课程的教材。适当删减,还可作为文科类对数学要求较高的专业的高等数学教材。

遵循课程改革的思路,为方便学生更好地掌握微积分的精神,我们在编写过程中,尽量做到语言通俗,习题与例题难度适中,对某些章节作了与常规教材不一样的处置(如极限与连续),对某些内容我们讲得较细致(如微元法)。为了使学生对微积分的发展历史有一定的了解,我们编写了“微积分发展大事记”。为了使学生对著名数学家对微积分的贡献有所了解,我们在每章之后增加了一些著名数学家的简介,作为阅读材料。此外,在每章的开头,我们选录了一些数学名言,这些名言,当有益于微积分的学习。

本教材编写人员有莫国良、唐志丰、陈仲慈与叶显驰。其中第一章、第二章、第六章、第七章与第十章由莫国良执笔;第三章、第四章、第五章、第八章与第九章由唐志丰执笔;第十二章、第十三章与第十四章由陈仲慈执笔;第十一章、第十六章与第十七章由叶显驰执笔;第十五章由陈仲慈与叶显驰共同执笔。书中名家名言、数学家小传及微积分发展大事记由莫国良编写。

真诚地感谢丁善瑞教授,是他提议进行此项微积分教材的改革工作,本教材的主体思路也是由他设计的,他还为本教材写了序。

真诚地感谢金蒙伟教授,是他奉献了宝贵的时间对全书进行了审阅,并提出了许多宝贵的建议。

真诚地感谢吴明华副教授,他在本教材的编写工作中给予了许多有益的建议,许多次的讨论工作都是在他的主持下召开的,出版工作的具体联系事项,也都是由他帮助完成的。

真诚地感谢在试用期中的各位任课教师,他们不仅在试用稿试用之前花费许多时间进行舛错甄别,还在使用过程中不断地将失误之处加以纠正,并提出了许多宝贵意见。

真诚地感谢徐素君女士,她作为本书的责任编辑,在成书的过程中,始终给予了我们热忱的支持与帮助。

我们还要感谢浙江大学城市学院的院领导与教务部的领导,没有他们的支持与关心,这项工作也是不可能完成的。

由于成书仓促,诚盼有关专家、各校同行与广大读者给予批评指正,编者在此谨预致谢意。

编　者

2005 年 4 月

目　录

第一章　函　　数

数学是我们这个时代(18世纪)压倒一切的科学，它不声不响地扩大着自己的领域。谁要是不用数学来为自己服务，那有朝一日他就会发现，别人正在用数学来同自己对抗。

德国哲学家　赫尔巴特(J. F. Herbart，1776－1841)

我不准备比较详细地叙述，因为那样会使你们失去独立分析的愉快，会使你们的头脑失去在进行这种练习时所得到的好处。这种好处，依我看，是能从这门科学中吸取到的最主要的好处。没有正确的方法，即使有眼睛的博学者也会像瞎子一样盲目探索。天下之理，非见之极明，勿遽下断语。

笛卡尔(Descartes，Rene，1596－1650)

现实世界总是处在不断的变化过程中，各种各样的变化又总与量的变化联系在一起，而各种量的变化又往往不是相互独立的，而是有着这样那样的联系的，描述这种量与量之间联系的数学抽象就是我们所说的函数. 从字面上讲，函数就是“函寄”数，就是把一个数集中的任一数“函寄”到另一个数集中，由于数集的多样性及“函寄”方式的多样性，就形成了函数的多样性. 在中学期间，我们已初步接触到函数的概念及相关的问题，在微积分课程中，我们将用更高级的工具更细致地研究函数，随着微积分各章节的展开，函数更丰富的内涵会逐渐呈现在我们面前.

第一节　函数的概念

我们已经学过函数概念，叙述如下：

定义1.1　设A，B是非空实数集，如果按某个确定的对应关系f，使对于集A中的任意一个数x，在集合B中都有惟一确定的数y与之对应，那么就称$f:A\to B$为从集合

A 至 B 的一个**函数**,记作 $y = f(x), x \in A$.

其中,x 称为**自变量**,y 称为**因变量**,x 的取值范围 A 称为函数 f 的**定义域**;与 x 的值相对应的 y 的值叫做**函数值**,函数值的集合 $\{f(x) \mid x \in A\}$ 叫做函数的**值域**,记作 $f(A)$. 一般 $f(A) \subseteq B$.

对定义域 A 中每一个 x_0,都有值域中的 $y_0 = f(x_0)$ 与之对应,这样就形成了平面直角坐标系上的点 (x_0, y_0),当 x_0 取遍定义域 A 后,就形成了一个平面点集 $\{(x, f(x)) \mid x \in A\}$,这个平面点集,我们称之为函数 f 的**图形**,常见函数的图形是曲线,但也可以是难以描画的点集.

函数有两大要素:一是定义域;二是对应关系. 这两大要素一旦确定,值域必跟着确定.

两个函数相同,必须且只须定义域相同且对应关系相同.

注　一个函数的定义域可以是特别规定的,譬如函数 $y = \sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 就与函数 $y = \sin x$ 不同,前者的定义域是特别规定的,后者的没有专门规定,一个函数 $y = f(x)$ 的定义域没有专门规定时,它的定义域就取为使该函数有意义的所有 x 的集合,这时,这个集合称为该函数的自然定义域,简称为定义域.

表达一个函数有多种方法,常见有下面几种:

1. 用表格表示

例如,某班学生的英语统考成绩如下:

编号	01	02	03	04	05	06	07	08	09
成绩	67	89	68	90	65	45	87	77	45

编号	10	11	12	13	14	15	16	17	18
成绩	60	79	68	69	75	58	80	70	55

编号	19	20	21	22	23	24	25	26	27
成绩	72	78	84	87	75	90	65	68	57

这里,函数的定义域就是编号为 1 至 27 的自然数,值域就是英语成绩的全体,而对应关系就是编号与其下面英语成绩配对的全体.

2. 用图形表示

例如,仪器记录某人的心电图如下:

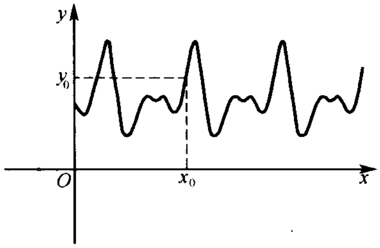

图 1-1

这里,x 表示时间,y 表示电流的活动强度,函数的定义域是正数集合,而对应关系则由图形表出(如图 1-1 中,x_0 对应 y_0).

3. 用解析式表示

例如,半径为 R 的球的体积公式为 $V=\frac{4\pi R^3}{3}$,则 V 是 R 的函数,定义域为 $(0,+\infty)$,对应关系是 $f:R\to\frac{4\pi R^3}{3}$.

注 有时为了方便,我们也用语言来表示函数,如某人身高是年龄的函数,某人的支出是收入的函数,某厂的利润是产量的函数等等.

函数的各种表示法各有其特点,一般地,表格法较适用于定义域为有限数集的函数,图形法比较直观清楚,解析法比较精确严密且易于运算,而用语言表示一种函数则常常是对对象的一种定性的描述.

一般地,能用解析法表示出来的函数也能用图形法表示出来,但也有例外,譬如下面的函数:

$$D(x)=\begin{cases}1, x\text{ 为有理数;}\\0, x\text{ 为无理数.}\end{cases}$$

就很难用图形法完整地表示出来. 反之一个能用图形法表示出来的函数也不一定能用解析法表示出来,譬如一个人的心电图函数就很难用解析式表示出来.

在本教材中,我们所面对的函数一般既能用解析法表示出来也能用图形法表示出来(虽然有的函数用图形法表示出来还是比较困难).

第二节 由已知函数产生新的函数

一、由加减乘除四则运算产生新的函数

我们所说的函数,其本质是将一个数变换成另一个数. 而数是可以进行加减乘除四

则运算的,因而函数本身也就有了加减乘除四则运算.

设 f 与 g 是定义域分别为 A 与 B 的两个函数,$A \cap B \neq \varnothing$,则当 $x \in A \cap B$ 时,可定义 f 与 g 的和、差、积、商函数分别为 $f(x)+g(x)$,$f(x)-g(x)$,$f(x)\cdot g(x)$ 和 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$,商函数要求 $g(x) \neq 0$.

例如,设　$f(x)=\mathrm{e}^x, x \in (0,+\infty)$,

$$g(x)=\sin x, x \in [-\pi, 2\pi],$$

则　$$f(x)\cdot g(x)=\mathrm{e}^x \cdot \sin x,\quad x \in (0,2\pi],$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\mathrm{e}^x}{\sin x},\quad x \in (0,\pi) \cup (\pi,2\pi).$$

二、由函数的复合产生新的函数

对定义域分别为 A 与 B 的函数 f 与 g,如果 g 的值域与 A 之交集非空,即 $A \cap g(B) \neq \varnothing$,令 $C=\{x \mid x \in B \text{ 且 } g(x) \in A\}$,则对任意 $x \in C$,定义函数 fg 为

$$(fg)(x)=f[g(x)], x \in C.$$

函数 fg 称为函数 f 与 g 的**复合函数**.

习惯上,我们用 $f[g(x)](x \in C)$ 直接表示复合函数 $(fg)(x)$.

例如,设　$y=f(x)=\mathrm{e}^x, x \in [0,+\infty)$,

$$y=g(x)=\sin x, x \in [-\pi,\pi],$$

则　$$(fg)(x)=f[g(x)]=\mathrm{e}^{\sin x}, x \in [0,\pi],$$

$$(gf)(x)=g[f(x)]=\sin(\mathrm{e}^x), x \in [0,\ln\pi].$$

由此例可见,两函数复合,一般 $f[g(x)] \neq g[f(x)]$.

函数经复合可以变得很复杂,其图形也难画得多,譬如 $y=\sin x$ 与 $y=\dfrac{1}{x}$ 是两个简单的函数,但其复合函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 就复杂得多.它的图形如图 1-2 所示.

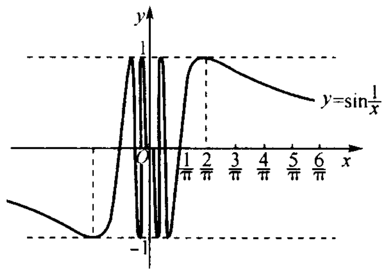

图 1-2

两个函数复合后仍是函数,它可与其他函数再次复合,于是就可能出现多重复合的情况,例如,

$$f(x)=\mathrm{e}^x, g(x)=\sin x, h(x)=x+4,$$

则　$$f(gh)=f\{g[h(x)]\}=\mathrm{e}^{\sin(x+4)}.$$

反之我们也可以把一个复合函数视为由几个简单函数复合而成的函数.

例如,函数 $y=\ln[\sin(x^2+1)]$ 可以看作是由 $y=\ln u$,$u=\sin v$ 与 $v=x^2+1$ 复合后表示的函数,并称 u,v 为**中间变量**,以区别于自变量 x,因变量 y.

三、由函数的逆产生新的函数

一个函数自变量取不同值但对应的函数值有可能相同，譬如函数 $y=x^2,x\in[-4,4]$，它的值域为$[0,16]$，则 $\forall y_0\in(0,16]$（这里 $\forall$ 表示“对任意的”，下同）都有定义域中的两个数$x_0=\sqrt{y_0}$ 和 $x_1=-\sqrt{y_0}$ 与之对应.

但如果我们把函数 $y=x^2$ 的定义域限制在$[0,4]$，则 $\forall y_0\in[0,16]$，都只有惟一的 $x_0=\sqrt{y_0}\in[0,4]$ 与之对应. 此时，我们就可以建立一个从$[0,16]$ 到$[0,4]$ 的对应关系：

$$x=\sqrt{y},y\in[0,16].$$

函数 $x=\sqrt{y}$ 就称为函数 $y=x^2,x\in[0,4]$ 的反函数. 它的定义域为$[0,16]$，值域为$[0,4]$.

函数 $x=\sqrt{y},y\in[0,16]$ 的图形与函数 $y=x^2,x\in[0,4]$ 的图形是一样的.

习惯上，我们总是用 x 表示自变量，y 表示因变量，于是 $x=\sqrt{y}$ 可以改写成 $y=\sqrt{x}$，并称函数 $y=\sqrt{x},x\in[0,16]$ 为函数 $y=x^2,x\in[0,4]$ 的反函数（我们今后讲的反函数都采用这种改写了的形式）. 但是经过改写后的函数 $y=\sqrt{x}$ 的图形与 $y=x^2$ 的图形已不一样，它们关于直线 $y=x$ 对称. 如图 1-3 所示.

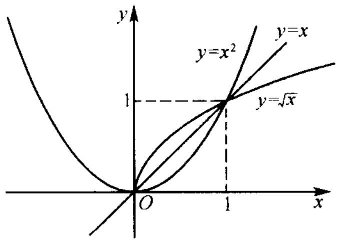

图 1-3

一般地，我们有下面反函数的定义：

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 A，值域为 B，如果对任意 $y\in B$，都有惟一的 $x\in A$，使 $y=f(x)$，则可以定义一个从数集 B 到数集 A 的对应关系：

$$f^{-1}:y\to x,\text{满足 } y=f(x),$$

由此得到一个新函数 $x=f^{-1}(y),y\in B$. 习惯上，常用 x 表示自变量，y 表示因变量，因此此函数也可表示为$y=f^{-1}(x)$，其定义域为数集 B，值域为数集 A，称它为函数 $y=f(x),x\in A$ 的**反函数**（此时就称 $y=f(x)$ 为 $y=f^{-1}(x)$ 的**直接函数**）.

对某个函数 $y=f(x)(x\in A)$ 来说，它的反函数未必存在. 在后面一节中，我们将叙述一个反函数存在的充分性定理.

但是对某个函数 $y=f(x)$（其定义域为 A，值域为 B）来说，如果其反函数 $y=f^{-1}(x)$（定义域为 B，值域为 A）存在，则有下列结论成立：

(1) 函数 $y=f(x)$（其定义域为 A，值域为 B）的图形与函数 $y=f^{-1}(x)$（定义域为 B，值域为 A）的图形关于 $y=x$ 对称.

(2) 函数 $y=f(x)$（其定义域为 A，值域为 B）与函数 $y=f^{-1}(x)$（定义域为 B，值

域为 A)互为反函数,即

$$f[f^{-1}(y)] \equiv y, y \in B;$$
$$f^{-1}[f(x)] \equiv x, x \in A.$$

注 上面的等式特别重要,由它衍生的特殊的等式如下:

当 $a > 0$,且 $a \neq 1$ 时,由于 $y = a^x$(定义域为$(-\infty, +\infty)$,值域为$(0, +\infty)$)与 $y = \log_a x$(定义域为$(0, +\infty)$,值域为$(-\infty, \infty)$)互为反函数,故有等式:

$$a^{\log_a y} = y, y \in (0, +\infty).$$
$$\log_a a^x = x, x \in (-\infty, +\infty).$$

又函数 $y = \sin x$(定义域为$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,值域为$[-1,1]$)与函数 $y = \arcsin x$(定义域为$[-1,1]$,值域为$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$互为反函数,故有等式:

$$\sin[\arcsin(y)] = y, y \in [-1,1].$$
$$\arcsin[\sin(x)] = x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

对于函数 $y = \cos x$ 与 $y = \arccos x$、函数 $y = \tan x$ 与 $y = \arctan x$ 也有类似的等式.

第三节 函数的特性

函数的特性就是函数所具有的特殊的性质,研究一个函数的重要任务之一就是要研究这个函数的特性,如果我们对某一个函数的各种特性都把握好了,那么我们对这个函数也就"心中有数"了.

常见函数的特性有:单调性、奇偶性、周期性、有界性等.其中单调性、奇偶性、周期性在中学课本中已有所介绍,为完整起见这里再叙述一下,请注意一下某些地方的区别.

一、单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 A,$A_1 \subseteq A$,若 $\forall x_1, x_2 \in A_1$,且 $x_1 < x_2$ 时,都有

$$f(x_1) \leqslant f(x_2)(f(x_1) < f(x_2)),$$

则称 $f(x)$ 在 A_1 上**单调增加(严格单调增加)**.

类似地,有**单调减少**与**严格单调减少**的概念.

一个函数如果在某集合 C 上单调增加或单调减少,就称这个函数在集合 C 上具有单调性.一个函数如果在集合 C 上是严格单调增加或严格单调减少的,就称这个函数在集合 C 上具有严格的单调性.如果此时 C 是区间,就称 C 是单调区间.

要注意一个函数的单调性与所考虑的区间密切相关,一个函数可以不在它的定义

域里单调增加或单调减少，但它可以在它的定义域的一个子集合上单调增加或单调减少. 譬如 $y = x^2$ 在它的定义域里不具有单调性，但它却在 $(-\infty, 0]$ 上严格单调减少，在 $[0, +\infty)$ 上严格单调增加.

在整个实轴上既单调增加又单调减少的函数是常值函数 $y = c$.

按定义出发判断一个函数在哪些区间上是单调的并不容易，但本书第四章会提供给我们一个较方便的判断方法.

在集合 A 上单调的函数未必有反函数，但在集合 A 上严格单调的函数一定有反函数，我们有下面的定理.

定理 1.1 设函数 $f(x)$ 的定义域为 A，值域为 B，如果 $f(x)$ 在 A 上严格单调增加(或减少)，则在值域 B 上存在反函数 $x = f^{-1}(y), y \in B$，且 f^{-1} 在 B 上也是严格单调增加(或减少).

证 $\forall y \in B, \exists x \in A$(这里符号 $\exists$ 表示“存在”，下同)，使 $y = f(x)$，定义 $f^{-1}(y) = x$，我们证明这样定义的 f^{-1} 确实是一个函数，这只要证明 f^{-1} 的单值性就可以了. 事实上，如果另有 x_1 使 $f^{-1}(y) = x_1$，则亦有 $y = f(x_1)$，这样 $f(x) = f(x_1)$，由于 f 是严格单调的，因此 $x = x_1$，即 f^{-1} 确实是一个函数.

又假若 $f(x)$ 在 A 上是严格单调增加的，我们证明 f^{-1} 在 B 上也严格单调增加. 如若不然，则存在 y_1, y_2，虽有 $y_1 < y_2$，但 $f^{-1}(y_1) \geqslant f^{-1}(y_2)$. 现设 $x_1 = f^{-1}(y_1)$，$x_2 = f^{-1}(y_2)$，则 $x_1 \geqslant x_2$，而 $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$，由于 $f(x)$ 在 A 上是严格单调增加的，故又有 $y_1 \geqslant y_2$，这与 $y_1 < y_2$ 相矛盾. □

二、奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 A，关于原点对称，如果 $\forall x \in A$，都有

$$f(-x) = f(x)\,(f(-x) = -f(x))$$

则称函数 $f(x)$ 在定义域 A 上为**偶函数(奇函数)**.

在平面直角坐标系中，偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

在集合 A 上既是偶函数又是奇函数的函数是常数函数 $y = 0$.

三、周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 A，若存在非零常数 T，使 $\forall x \in A$，都有 $x + T \in A$，而且

$$f(x + T) = f(x),$$

则称函数 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数. 显然如果 T 是 $f(x)$ 的周期，则 $2T$、$3T$ 等也是它的周期，在这些周期中，如果存在一个最小的正数，则这个最小的正数称为最小正周期，平时我们所说的函数的周期都是指最小正周期.

一个周期函数也许不存在一个最小的正周期，譬如常值函数以任意非零数为周期，

但它没有最小正周期.

设有集合 A,如果对任意非负常数 M,$\exists x \in A$,使不等式 $|x| \geqslant M$ 成立,则称集合 A 称为**无界集**.

任意一个周期函数的定义域必是一个无界集.

四、有界性

在中学期间,函数的有界性并没有作特别的强调,在高等数学里,函数的有界性却是一个非常重要的概念.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 A,$A_1 \subseteq A$,若存在常数 M_1,使 $\forall x \in A_1$,都有

$$f(x) \leqslant M_1,$$

则称 $f(x)$ 在 A_1 上**有上界**,并称 M_1 是 $f(x)$ 在 A_1 上的一个上界. 如果若存在常数 M_2,使 $\forall x \in A_1$,都有

$$f(x) \geqslant M_2,$$

则称 $f(x)$ 在 A_1 上**有下界**,并称 M_2 是 $f(x)$ 在 A_1 上的一个下界. 如果若存在正常数 M,使 $\forall x \in A_1$,都有

$$|f(x)| \leqslant M,$$

则称 $f(x)$ 在 A_1 **上有界**.

与函数的单调性一样,一个函数的有界性与所考虑的区间有关,如 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在其定义域中是无界的,但当 $a > 0$ 时,$f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty, -a) \cup [a, +\infty)$ 上有界. 又若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在数集 S 上有界,则 $f(x) \pm g(x)$ 与 $f(x) \cdot g(x)$ 均在 S 上有界,但 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 就不一定在 S 上有界.

不难证明,$f(x)$ 在 A_1 上有界的充分必要条件是 $f(x)$ 在 A_1 上既有上界又有下界.

一个在其自然定义域上有界的函数称为**有界函数**.

关于复合函数的有界性,我们有下面的命题:

如果 $f(x)$ 在数集 A 上有界,又 $g(x)$ 在 B 上有定义,且 $g(B) \subseteq A$,则 $f[g(x)]$ 在 B 上有界.

因为函数 $\sin x$,$\cos x$,$\arctan x$,$\mathrm{arccot}\, x$ 在整个实轴上有界,故对任意函数 $g(x)$,复合函数 $\sin[g(x)]$,$\cos[g(x)]$,$\arctan[g(x)]$,$\mathrm{arccot}[g(x)]$ 都在 $g(x)$ 的定义域上有界. 特别我们常用到下面的不等式:

$$\left|\sin \frac{1}{x}\right| \leqslant 1, x \neq 0, x \in \mathbf{R};$$

$$\left|\cos \frac{1}{x}\right| \leqslant 1, x \neq 0, x \in \mathbf{R};$$

$$\left|\arctan\frac{1}{x}\right|<\frac{\pi}{2},x\neq 0,x\in\mathbf{R};$$

$$\left|\operatorname{arccot}\frac{1}{x}\right|<\pi,x\neq 0,x\in\mathbf{R}.$$

设 $\delta>0$，以 2δ 为区间长度，以 x_0 为中心的开区间称为 x_0 的 **δ 邻域**，用 $U(x_0,\delta)$ 表示，即

$$U(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta\}.$$

称集合 $\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}$ 为 x_0 的**去心 δ 邻域**，记为 $\mathring{U}(x_0,\delta)$.

第四节　初等函数

在初中时，我们学习了正比例函数、反比例函数、一次函数与二次函数.

在高中时，我们又学习了指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数.

我们把下列函数称为**基本初等函数**：

(1) 常值函数 $y=c,c\in\mathbf{R}$.

(2) 幂函数 $y=x^\alpha,\alpha\in\mathbf{R}$.

(3) 指数函数 $y=a^x,a>0,a\neq 1$.

(4) 对数函数 $y=\log_a x,a>0,a\neq 1$.

(5) 三角函数 $y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\tan x$、$y=\cot x$、$y=\sec x$、$y=\csc x$.

(6) 反三角函数 $y=\arcsin x$、$y=\arccos x$、$y=\arctan x$、$y=\operatorname{arccot} x$.

其中指数函数、对数函数、三角函数($y=\sin x$；$y=\cos x$；$y=\tan x$)的图形与性质在中学的教材中已有详述，这里不再重复. 下面将就其余函数的图形与性质作一概述.

1. 常值函数 $y=c,c\in\mathbf{R}$.

常值函数的定义域为 R，值域为单元素集 $\{c\}$，其图形是通过点 $(0,c)$ 且平行于 x 轴的直线，其斜率为 0.

2. 幂函数 $y=x^\alpha,\alpha\in\mathbf{R}$.

幂函数是“内容”最丰富的函数，由于 α 取值的不同，其图形与性质都有显著的不同. 某“类”α 值对应着某“类”幂函数，搞清楚每一“类”幂函数的“代表性函数”，对于全盘掌握该函数有好处，对于后面内容的学习也大有裨益. 下面将对 α 作分“类”讨论.

(1) $\alpha=0$，此时幂函数为 $y=x^0$，由于 0^0 无意义，故此时的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，值域为 $\{1\}$.

(2) 如果 α 是正有理数，即 $\alpha=\frac{m}{n}$(m,n 是互质的正整数).

1°. n 为奇数，而 m 也是奇数时，幂函数 $y=x^{\frac{m}{n}}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为